

Hormigón

Nº 188

Acero

ASOCIACIÓN
TÉCNICA
ESPAÑOLA
DEL
PRETENSADO

INSTITUTO
EDUARDO TORROJA
DE LA CONSTRUCCIÓN
Y DEL CEMENTO

COLEGIO OFICIAL
DE INGENIEROS
DE CAMINOS,
CANALES Y PUERTOS

MIEMBROS PROTECTORES DE LA ASOCIACION TECNICA ESPAÑOLA DEL PRETENSADO

Dentro de nuestra Asociación existe una categoría, la de "Miembro Protector", a la que pueden acogerse, previo pago de la cuota especial al efecto establecida, todos los Miembros que voluntariamente lo soliciten. Hasta la fecha de cierre del presente número de la Revista, figuran inscritos en esta categoría de "Miembros Protectores" los que a continuación se indican, citados por orden alfabético:

- AGROMAN EMPRESA CONSTRUCTORA, S.A.**—Raimundo Fernández Villaverde, 43. 28003 Madrid.
- ALVI, S.A. (PREFABRICADOS ALBAJAR).**—Orense, 10. 28020 Madrid.
- ARPO EMPRESA CONSTRUCTORA, S.A.**—Avda. de la Innovación, s/n. Edificio Espacio, planta 3.ª, mód. 4-7. 41020 Sevilla.
- AUTOPISTAS, CONCESIONARIA ESPAÑOLA, S.A.**—Plaza Gala Placidia, 1. 08006 Barcelona.
- CARLOS FERNANDEZ CASADO, S.L.**—Grijalba, 9. 28006 Madrid.
- CEMENTOS MOLINS, S.A.**—C.N. 340, Km. 329,300. 08620 Sant Viçenc dels Horts (Barcelona).
- CENTRO DE ESTUDIOS Y EXPERIMENTACION DE OBRAS PUBLICAS (CEDEX).** Gabinete de Información y Documentación.—Alfonso XII, 3. 28014 Madrid.
- COLEGIO DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS.**—Almagro, 42. 28010 Madrid.
- COLEGIO DE INGENIEROS TECNICOS DE OBRAS PUBLICAS.**—Miguel Angel, 16. 28010 Madrid.
- COLEGIO OFICIAL DE APAREJADORES Y ARQUITECTOS TENCICOS.** Centro de Documentación "Josep Renat".—Bon Pastor, 5. 08021 Barcelona.
- COLEGIO OFICIAL DE APAREJADORES Y ARQUITECTOS TECNICOS.**—Santa Eugenia, 19. 17005 Gerona.
- COL. LEGI OFICIAL D'ARQUITECTES DE CATALUNYA.**—Plaça Nova, 5. 08002 Barcelona.
- CONSULTECO, S.L.**—Pintor Lorenzo Casanova, 26. 03003 Alicante.
- C.T.T. STRONGNOLD, S.A.**—Aribau, 185. 08021 Barcelona.
- CUBIERTAS Y M.Z.O.V., S.A.**—Ayala, 42. 28001 Madrid.
- DRAGADOS Y CONSTRUCCIONES, S.A.**—Orense, 81. 28020 Madrid.
- DYWIDAG - SYSTEMS INTERNATIONAL, S.A.**—Azor, 25-27. Polígono Industrial Matagallegos. 28940 Fuenlabrada (Madrid).
- ECHO.**—De Hoeven, 15. B-3530 Houthalen (Bélgica).
- EMESA-TREFILERIA, S.A.**—Apartado 451. 15080 La Coruña.
- EMPRESA AUXILIAR DE LA INDUSTRIA, S.A. (AUXINI).**—Padilla, 46. 28006 Madrid.
- ENTRECANALES Y TAVORA, S.A. Biblioteca.**—Cardenal Spínola, s/n. Edificio E. 28016 Madrid.
- ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS.**—Ciudad Universitaria. 28040 Madrid.
- ESTEYCO, S.A.**—Menéndez Pidal, 17. 28036 Madrid.
- ESTUDIOS Y PROYECTOS TECNICOS INDUSTRIALES, S.A. (EPTISA).**—Arapiles, 14. 28015 Madrid.
- EUROCONSULT, S.A.**—Apartado 99. 28700 San Sebastián de los Reyes (Madrid).
- FERROVIAL, S.A.**—Príncipe de Vergara, 135. 28006 Madrid.

(Continúa en el int. de contraportada)

ASOCIACION TECNICA ESPAÑOLA DEL PRETENSADO

DECLARADA DE UTILIDAD PUBLICA CON FECHA 4-3-77

INSTITUTO DE CIENCIAS DE LA CONSTRUCCION
EDUARDO TORROJA (C.S.I.C.)

COLEGIO DE INGENIEROS DE
CAMINOS, CANALES Y PUERTOS

COMITE DE REDACCION

Director:

PIÑEIRO, Rafael

Vocales:

BARREDO, Carlos

JODAR, Juan

JULIA, Manuel

LLOMBART, José Antonio

ROMERO, Rafael

SANCHEZ-GALVEZ, Vicente

Censores:

ALCALA, Juan Luis

CUVILLO, Ramón del

ELICES, Manuel

GONZALEZ VALLE, Enrique

MANTEROLA, Javier

MORAN, Francisco

MORENO TORRES, Juan

MURCIA, Juan

POZO VINDEL, Florencio J. del

SIEGRIST, Carlos

Hormigón y Acero

n.º 188

3^{er} Trimestre 1993

CUOTAS ANUALES

	<u>ESPAÑA</u>	<u>EXTRANJERO</u>
Miembros "Personales" menores de 27 años	4.000 ptas.	
Miembros "Personales" (personas naturales)	8.000 ptas.	60 dólares
Miembros "Colectivos" (personas jurídicas).	20.000 ptas.	125 dólares
Miembros "Protectores" (personas naturales o jurídicas que deseen prestar una ayuda económica especial a la A.T.E.P.)	40.000 ptas.	250 dólares

(Más 15% IVA para España)

La Asociación, una de cuyas finalidades es divulgar los trabajos de investigación sobre la construcción y sus materiales, no se hace responsable del contenido de ningún artículo y el hecho de que patrocine su difusión no implica, en modo alguno, conformidad con la tesis expuesta.

De acuerdo con las disposiciones vigentes, deberá mencionarse el nombre de esta Revista en toda reproducción de los trabajos insertos en la misma.

APARTADO 19.002 - 28080 MADRID - TEL. Y FAX: 766 07 03

Depósito Legal: M-853-1958

Impreso: ACOR, S.A.- M. Hernández, 50 - MADRID

ISSN: 0439-5689

RELACION DE ENTIDADES QUE, EN LA FECHA DE CIERRE DEL PRESENTE NUMERO DE LA REVISTA, FIGURAN INSCRITAS, EN LA ASOCIACION TECNICA ESPAÑOLA DEL PRETENSADO, COMO "MIEMBROS COLECTIVOS".

ESPAÑA

AEPO, S.A.—Estudios y Proyectos.—Madrid.
ALTRESA, S.A.—Aranda de Duero (Burgos).
ASOCIACION ENGINYERS INDUSTRIALS DE CATALUNYA.—Barcelona.
ASOCIACION DE INVESTIGACION DE LAS INDUSTRIAS DE LA CONSTRUCCION.—
Paterna (Valencia).
CASTRO HERMANOS, S.L.—Mislata (Valencia).
CENTRO DE ANALISIS Y DISEÑO DE ESTRUCTURAS, S.A.—Oviedo.
CENTRO POLITECNICO SUPERIOR DE INGENIEROS.—Area de M.M.C. y T. de
Estructuras.—Zaragoza.
CEYD TECNICA, S.A.—Oviedo.
C.I.C., S.A.—Consultor de Ingeniería Civil, S.A.—Barcelona.
CIISA "CONSULTING E INGENIERIA INT., S.A.".—La Coruña.
CINSA-EP.—Lasarte-Oria (Guipúzcoa).
COLEGIO DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS. Demarcación de
Andalucía Oriental.—Málaga.
COLEGIO DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS. Demarcación de
Galicia.—La Coruña.
COLEGIO OFICIAL DE ARQUITECTOS DE BALEARES.—Palma de Mallorca.
COLEGIO OFICIAL DE ARQUITECTOS.—Demarcación de Valencia.—Valencia.
COLEGIO OFICIAL DE ARQUITECTOS VASCO-NAVARRO.—Bilbao.
CONTROLEX.—Alicante.
CUBIERTAS Y M.Z.O.V., S.A.—Barcelona.
DEPARTAMENTO DE CONSTRUCCIONES ARQUITECTONICAS.—Escuela Técnica
Superior de Arquitectura.—Sevilla.
DEPARTAMENTO DE MECANICA DE MEDIOS CONTINUOS Y TEORIA DE
ESTRUCTURAS.—Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y
Puertos. Universidad Politécnica. Madrid.
DIRECCION GENERAL DE CARRETERAS. Diputación Foral de Guipúzcoa. San Sebas-
tián.
DITECO, S.L.—Valencia.
E.E.P., S.A.—Elementos Estructurales Prefabricados, S.A.—Sant Fruitos de Bages (Bar-
celona).
ENAGA, S.A.—Pozuelo de Alarcón (Madrid).
ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE ARQUITECTURA. U.P.C.—Barcelona.
ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE ARQUITECTURA.—Biblioteca.—La Coruña.
ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE ARQUITECTURA.—Madrid.
ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE ARQUITECTURA.—Biblioteca.—San Sebastián.
ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE ARQUITECTURA.—Sevilla.
ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIEROS AGRONOMOS.—Biblioteca.—
Córdoba.
ESCUELA UNIVERSITARIA DE ARQUITECTURA TECNICA.—Castro de Elviña (La
Coruña).
ESCUELA UNIVERSITARIA DE ARQUITECTURA TECNICA.—Granada.
ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERIA TECNICA INDUSTRIAL.—Zaragoza.
ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERIA TECNICA MINERA. Biblioteca.—León.
ESCUELA UNIVERSITARIA POLITECNICA.—Universidad Castilla-La Mancha. Depar-
tamento de Mecánica Aplicada.—Albacete.
ESCUELA UNIVERSITARIA POLITECNICA.—Barcelona.
ESCUELA UNIVERSITARIA POLITECNICA.—Burgos.
ESCUELA UNIVERSITARIA POLITECNICA.—Córdoba.
ESCUELA UNIVERSITARIA POLITECNICA DE MANRESA.—Manresa (Barcelona).
ESTRUCTURAS Y ENCOFRADOS RETICULADOS, S.A.—Alicante.
EUROESTUDIOS, S.A.—Madrid.
FERNANDEZ CONSTRUCTOR, S.A.—Madrid.
FOMENTO DE CONSTRUCCIONES Y CONTRATAS, S.A.—Valencia.
FORJADOS DOL.—Esquivias (Toledo).

FUERZAS ELECTRICAS DE CATALUÑA, S.A.—Barcelona.
FUNDACION DE LOS FERROCARRILES ESPAÑOLES.—Madrid.
GIJON E HIJOS, S.A.—Motril (Granada).
G.O.C.S.L.—Vigo (Pontevedra).
HORMADISA, S.L.—Valga (Pontevedra).
IDEAM, S.A.—Madrid.
INBADELCA, S.A.—Baracaldo (Vizcaya).
INDUSTRIAS VEYGA, S.A.—Tarrasa (Barcelona).
INGENIERIA DE AUTOPISTAS Y OBRAS CIVILES, S.A.—Madrid.
INGENIERIA FLORS, S.A.—Grao de Castellón.
INGENIEROS Y ARQUITECTOS ASOCIADOS, S.A.—Zaragoza.
INSTITUCIONES COLEGIALES PARA LA CALIDAD EN LA EDIFICACION.—Murcia.
INSTITUT DE TECNOLOGIA DE LA CONSTRUCCIO DE CATALUNYA.—Barcelona.
INSTITUTO JUAN DE HERRERA.—Madrid.
J. CASTRO MATELO, S.A.—Sigüeiro (La Coruña).
JUNTA DE CASTILLA Y LEON.—Consejería de Fomento.—Valladolid.
JUNTA DE CASTILLA Y LEON.—Dirección General de Transportes y Carreteras. Servicio de Gestión.—Valladolid.
JUNTA DE CASTILLA Y LEON.—Servicio Territorial de Fomento.—Avila.
LABORATORIO GEOCISA. Biblioteca.—Coslada (Madrid).
LABORATORIO DE INGENIEROS DEL EJERCITO.—Madrid.
LABORATORIOS DEL SURESTE, S.L.—El Palmar (Murcia).
LAIN CONSTRUCCIONES.—Madrid.
LUIS BATALLA, S.A. (LUBASA).—Castellón de la Plana.
METALURGICA GALAICA, S.A.—Narón (La Coruña).
MINISTERIO DE DEFENSA. DIRECCION GENERAL DE INFRAESTRUCTURA.—Madrid.
MINISTERIO DE DEFENSA. DIRECCION DE INFRAESTRUCTURA DEL MANDO SUPERIOR DE APOYO LOGISTICO DEL EJERCITO.—Madrid.
MINISTERIO DE OBRAS PUBLICAS Y TRANSPORTES. DIRECCION GENERAL DE CARRETERAS. DEMARCACION CASTILLA-LEON.—Valladolid.
MINISTERIO DE OBRAS PUBLICAS Y TRANSPORTES. DIRECCION GENERAL DE CARRETERAS. SERVICIO DE PUENTES Y ESTRUCTURAS.—Madrid.
MINISTERIO DE OBRAS PUBLICAS Y TRANSPORTES. DIRECCION GENERAL PARA LA VIVIENDA Y ARQUITECTURA. SUBDIRECCION GENERAL DE NORMATIVA BASICA Y TECNOLOGICA.—Madrid.
MINISTERIO DE OBRAS PUBLICAS Y TRANSPORTES. SUBDIRECCION GENERAL DE NORMATIVA TECNICA Y ANALISIS ECONOMICO.—Madrid.
POSTENSA, S.A.—Bilbao.
PRAINSA.—Barcelona.
PREFABRICACIONES Y CONTRATAS, S.A.—Madrid.
PREFABRICADOS AGRICOLAS E INDUSTRIALES, S.A. (PRAINSA).—Zaragoza.
PREFABRICADOS DEL CEMENTO, S.A. (PRECESA).—León.
PREFABRICADOS DE HORMIGON, S.A. (CUPRE-SAPRE).—Valladolid.
PREFABRICADOS PARA NAVES Y VIVIENDAS, S.A.—Zaragoza.
PREFABRICADOS POUSA, S.A.—Santa Perpetua de Moguda (Barcelona).
PREFABRICADOS UNILAND, S.A.—Barcelona.
RUBIERA, S.A. FORJADOS Y CUBIERTAS.—León.
S.C.N., S.A.—Madrid.
SERVICIO MILITAR DE CONSTRUCCIONES.—Barcelona.
SERVICIO MILITAR DE CONSTRUCCIONES.—Burgos.
SERVICIO TERRITORIAL DE CARRETERAS.—Gerona.
SESTRA, S.A.L.—Andoain (Guipúzcoa).
SOCIEDAD ANONIMA ESPAÑOLA TUBO FABREGA.—Madrid.
SOCIEDAD ESPAÑOLA DE AUTOMOVILES DE TURISMO (SEAT). Biblioteca.—Barcelona.
SPANDECK CATALANA, S.A.—Barcelona.
TECNICA Y PROYECTOS, S.A.—Madrid.
TECNOS, GARANTIA DE CALIDAD, S.A.—Madrid.
TERRATEST, S.A.—Madrid.
TEXSA, S.A.—Barcelona.
TIGNUS, S.A.—Valencia.
TUBERIAS Y PREFABRICADOS, S.A. (TYPASA).—Madrid.
UNIVERSIDAD DE CADIZ.—Algeciras (Cádiz).
UNIVERSIDAD DE CANTABRIA. Biblioteca Universitaria.—Santander.

UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA.—La Laguna (Tenerife).
UNIVERSIDAD DE OVIEDO. Biblioteca Universitaria.—Oviedo.
UNIVERSIDAD POLITECNICA. Hemeroteca.—Valencia.
VIGUETAS MUBEMI, S.A.—Torrente (Valencia).
VISANFER, S.A.—Totana (Murcia).
VORSEVI, S.A.—Ingeniería y Control de Calidad.—Sevilla.

EXTRANJERO

ABCP/LIBRIS.—EBSCO.—Río de Janeiro (Brasil).
ASSOCIACAO BRASILEIRA DE CIMENTO PORTLAND.—Sao Paulo (Brasil).
BIBLIOTECA DEL DIPARTIMENTO DI ENGEENNERIA STRUTTURALE.—Politécnico
d'Torino: Torino (Italia).
COLTENSA, S.A.—Santa Fé de Bogotá. D.C. (Colombia).
CONSULBAIRES. INGENIEROS CONSULTORES, S.A.—Buenos Aires (Argentina).
FACULTAD DE INGENIERIA/UBA.—Estados Unidos de Norteamérica.
LABORATORIO DE ENGENHARIA DE ANGOLA.—Luanda (República Popular de
Angola).
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DEL PERU.—Lima (Perú).
SWETS SUBSCRIPTION SERVICE.—Lisse (Holanda).
UNIVERSIDAD CATOLICA DE QUITO. Biblioteca.—Quito (Ecuador).
UNIVERSIDAD CATOLICA DE VALPARAISO. Biblioteca Central.—Valparaiso (Chile).
UNIVERSIDAD DE PUERTO RICO. Biblioteca.—Mayagüez (Puerto Rico).

MIEMBRO CORRESPONDIENTE

ASOCIACION BOLIVIANA DEL PRETENSADO (A.B.P.).—La Paz (Bolivia).

* * *

AVISO IMPORTANTE

DISCUSION DE LOS ARTICULOS ORIGINALES PUBLICADOS EN LA REVISTA "HORMIGON Y ACERO"

Todos los artículos originales que se publican en "Hormigón y Acero", quedan sometidos a discusión y al comentario de nuestros lectores. La discusión debe limitarse al campo de aplicación del artículo, y ser breve (cuatro páginas mecanografiadas a doble espacio, como máximo, incluyendo figuras y tablas).

Debe tratarse de una verdadera discusión del trabajo publicado y no ser una ampliación o un nuevo artículo sobre el mismo tema; el cual será siempre aceptado para su publicación en nuestra Revista, pero con tal carácter.

Debe ofrecer un interés general para los lectores. De no ser así, se trasladará al autor del artículo al que se refiera, para que la conteste particularmente.

Los comentarios deben enviarse, por duplicado, a la Secretaría de la A.T.E.P., Apartado 19.002, 28080 Madrid, dentro del plazo de tres meses contados a partir de la fecha de distribución de la Revista.

El autor del artículo cerrará la discusión contestando todos y cada uno de los comentarios recibidos.

Los textos, tanto de las discusiones y comentarios como de las contestaciones de los autores de los correspondientes artículos, se publicarán conjuntamente en una Sección especial que aparecerá en las últimas páginas de la Revista.

hormigón y acero n. 188

índice

Págs.

- 457-0-188 Cálculo simplificado de flechas instantáneas en vigas de hormigón sometidas a flexión compuesta. Método propuesto para la Instrucción de hormigón pretensado EP-93** 9 - 22
Calcul simplifié des flèches instantanées des poutres en béton sollicitées en flexion composée. Méthode proposée pour le Code Espagnol de Béton Précontraint EP-93.
Simplified calculation of instantaneous deflections in concrete beams under compound bending. Proposed method for the Spanish Code of Prestressed Concrete EP-93.
F. Fargueta Cerdá; M.A. Fernández Prada y P. Miguel Sosa.
- 457-0-189 Ampliación del principio de los trabajos virtuales al cálculo de las deformaciones de las estructuras** 23 - 48
Application du principe des travaux virtuels pour l'évaluation des mouvements des structures.
Application of the principle of virtual work in the calculation of the displacements of structures.
A. del Río Bueno.
- 457-0-190 Análisis de placas sometidas a deformaciones impuestas, empleando una formulación de elementos finitos mixtos** 49 - 59
Analyse de plaques soumises à deformations imposées employant une formulation d'éléments finites mixtes.
Analysis of plates subjected to imposed deformations using a mixed finite element formulation.
L.M. Bozzo y J. Murcia.
- 457-0-191 Algunas conclusiones del análisis en el tiempo de estructuras de hormigón armado, relativas al cálculo de flechas diferidas** 61 - 71
Quelques conclusions du comportement différé des constructions en béton armé relatives au calcul des flèches différées.
Some conclusions for the time-dependent analysis of reinforced concrete structures concerning the calculation of delayed deflections.
J. Murcia.
- 457-8-167 Propuesta de normativa de criterios de proyecto de estructuras de hormigón en instalaciones nucleares** 73 - 80
Criteria pour les structures du béton aux installations nucléaires (proposition).
Design criteria for concrete structures in nuclear installations (Code Proposal).
M. Díaz-Llanos Ros.
- 591-2-250 Un reto de hormigón y acero: Normandía, record mundial de puentes atirantados** 81 - 104
Un défi de béton et d'acier: Normandie, record mondial de ponts haubanés.
A concrete and steel challenge: Normandy bridge, world record cable stay span.
C. de la Fuente.
- 837-8-18 Reparación localizada de columnas de hormigón con pérdida total de resistencia** 105 - 117
Réparation localisée de colonnes en béton ayant perdu toute capacité de résistance.
Short length repair of concrete columns with total strength loss.
J.L. Ramírez; J.M. Bárcena; J.I. Urreta; J.A. Sánchez y B. Hernández.

Normas que deben cumplir los artículos que se envíen para su publicación en "Hormigón y Acero"

1. CONDICIONES GENERALES

Los originales de los artículos que se desee publicar en "Hormigón y Acero", se enviarán a la Secretaría de la ATEP. Deberán cumplir rigurosamente las normas que a continuación se especifican. En caso contrario, serán devueltos a sus Autores para su oportuna rectificación.

Los que cumplan los requisitos exigidos pasarán al Comité de Redacción de la Revista el cual, previo informe y evaluación de su calidad por el correspondiente Cuerpo de Censores, decidirá si procede o no su publicación, sugiriendo eventualmente al Autor los cambios que, en su opinión, deben efectuarse para su final publicación en "Hormigón y Acero". Toda correspondencia en este sentido se mantendrá directamente con el Autor o primero de los Autores que figuren en el Artículo.

Los originales que por cualquier causa no fueran aceptados serán devueltos al Autor.

2. PRESENTACION DE ORIGINALES

Los originales se presentarán mecanografiados a doble espacio, por una sola cara, en hojas tamaño UNE A4. De cada artículo se enviará original y dos copias.

2.1. Título

El título, *en español, francés e inglés* deberá ser breve y explícito, reflejando claramente el contenido del artículo. A continuación se hará constar nombre y apellidos del Autor o Autores, titulación profesional y, si procede, Centro o

Empresa en el que desarrolla sus actividades.

2.2. Resumen

Todo artículo deberá ir acompañado de un resumen, *en español e inglés*, de extensión no inferior a cien palabras (unas ocho líneas mecanografiadas) ni superior a ciento cincuenta palabras (doce líneas).

2.3. Gráficos y figuras

Los gráficos y figuras deberán ir numerados correlativamente en el orden en que se citen en el texto, en el cual deberá indicarse el lugar adecuado de su colocación.

Se presentarán delineados en tinta china negra sobre papel vegetal o sobre papel blanco, o en reproducibles de muy buena calidad. Todas las figuras llevarán su correspondiente pie explicativo.

Los rótulos, símbolos y leyendas deberán ser tales que, tras su reducción a la anchura de una o dos columnas de la Revista (setenta y dos o ciento cincuenta mm, respectivamente) queden letras de tamaño no inferior a 1,5 mm y sean, en todo caso, fácilmente legibles.

2.4. Fotografías

Se procurará incluir sólo las que, teniendo en cuenta la reproducción, sean realmente útiles, claras y representativas. Podrán presentarse en copias de papel opaco negro o en color, en negativo, o en diapositivas. Se tendrán en cuenta las normas sobre tamaño de rótulos y leyendas dadas en el punto 2.3 anterior. Irán

numeradas correlativamente y llevarán su correspondiente pie explicativo.

2.5. Tablas y cuadros

Cumplirán las proporciones y dimensiones indicadas para las figuras. Llevarán numeración correlativa, citada en el texto, y un pie con la explicación adecuada y suficiente para su interpretación directa.

2.6. Unidades

Las magnitudes se expresarán, preferiblemente, en unidades del Sistema Internacional (S.I.) según las UNE 5001 y 5002.

2.7. Fórmulas, letras griegas, subíndices y exponentes

En las fórmulas se procurará la máxima calidad de escritura y emplear las formas más reducidas siempre que no entrañen riesgo de incompreensión. Para su identificación se utilizará, cuando sea necesario, un número entre paréntesis a la derecha de la fórmula.

Se cuidará especialmente que todas las letras griegas, subíndices y exponentes resulten perfectamente identificables, procurando evitar los exponentes complicados y letras afectadas simultáneamente de subíndices y exponentes.

Cualquier expresión que, por su complejidad, pueda dar lugar a interpretaciones equivocadas, se presentará manuscrita. Se diferenciarán claramente mayúsculas y minúsculas y aquellos tipos que puedan inducir a error (por ejemplo, la / y el l; la O y el cero; la K y la k, etc.).

2.8. Referencias bibliográficas

Las referencias bibliográficas citadas en el texto se recogerán al final del mismo dando todos los datos precisos sobre la fuente de publicación, para su localización.

Las citas en el texto se harán mediante números entre paréntesis. En lo posible, se seguirán las normas internacionales utilizadas generalmente en las diversas publicaciones, es decir:

Referencias de artículos publicados en revistas

Apellidos e iniciales del Autor o Autores; título del artículo; nombre de la publicación; número del volumen y fascículo; fecha de publicación, y número de la primera y última de las páginas que ocupa el artículo al que se refiere la cita.

Referencias de libros

Apellidos e iniciales del Autor o Autores; título del libro; edición; editorial, y lugar y año de publicación.

3. PRUEBAS DE IMPRENTA

De las primeras pruebas de imprenta se enviará una copia al Autor para que, una vez debidamente comprobadas y corregidas, las devuelva en el plazo máximo de quince días, con el fin de evitar el riesgo de que la publicación de su artículo tenga que aplazarse hasta un posterior número de "Hormigón y Acero".

En la corrección de pruebas no se admitirán modificaciones que alteren sustancialmente el texto o la ordenación del artículo original.

**NUEVA PUBLICACION
MANUAL H.P.7-92**

**RECOMENDACIONES PARA LA
CONSERVACION DE PUENTES
PRETENSADOS**

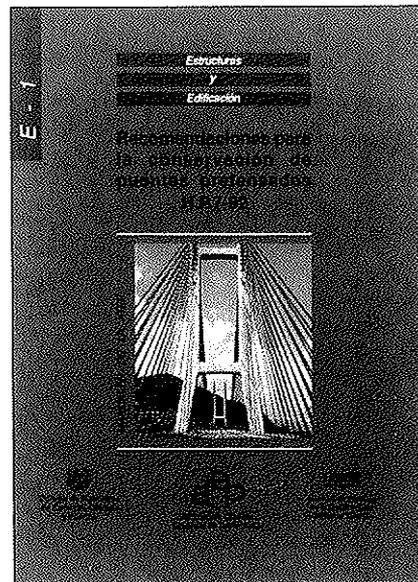
Continuando con la serie de Manuales que esta Asociación Técnica Española del Pretensado viene publicando, en los cuales se recogen las recomendaciones que se consideran idóneas para conseguir una adecuada realización de las obras pretensadas y su buen comportamiento a lo largo de su vida de servicio, se ha editado ahora el Manual H.P. 7-92, con el título "Recomendaciones para la conservación de puentes pretensados".

La necesidad de la conservación de las obras, cualquiera que sea su tipo y el material utilizado en su construcción, nace del inevitable deterioro que sufren en el transcurso del tiempo, y de las propias deficiencias inherentes, tanto a su proyecto como a su construcción, que se ponen de manifiesto, así mismo, a lo largo del tiempo. Por otra parte, la conservación permite también evitar la progresión de los daños hasta situaciones en que puede llegar a ser muy costosa, o incluso imposible, la reparación de la obra.

Pero no es esto sólo. Ocurre, además, que la conservación, tomada en su más amplio sentido, es fuente importantísima de enseñanzas para el proyecto, la construcción y la propia conservación de las futuras obras, evitando la repetición de errores.

Por todo ello, y a falta de una normativa oficial específica sobre el tema, se ha considerado de la mayor importancia preparar este Manual, con las recomendaciones necesarias para conseguir una buena conservación de los puentes pretensados, salvándose así la laguna hasta ahora existente en nuestro país en relación con este problema que en la actualidad tanto preocupa a todas las naciones del mundo, como lo demuestra la numerosa bibliografía existente sobre el particular y el que, en diversas Organizaciones y Reuniones Internacionales, la conservación de estas construcciones se haya elegido como tema fundamental de estudio.

Por otra parte, se ha estimado también interesante recoger en este Manual las oportunas recomendaciones para la mejor



aplicación de la técnica del pretensado en la realización de reparaciones y refuerzos de puentes.

Es evidente que, en numerosas ocasiones, se recurre a este tipo de actuaciones como a una operación más de la conservación. Y también lo es que la utilización del pretensado en estos casos, constituye uno de los medios más eficaces y de más creciente uso, con amplias aplicaciones en estructuras construidas con toda clase de materiales.

El precio de este Manual, de 166 páginas, tamaño DIN-A 4, con numerosas fotografías y tablas, es de DOS MIL QUINIENTAS PESETAS, IVA incluido, (VEINTIUN DOLARES USA, para el extranjero). No obstante, como siempre, a los Miembros de la A.T.E.P. se les concede un sensible descuento y podrán adquirir cuantos ejemplares deseen, al precio especial de MIL QUINIENTAS PESETAS, IVA incluido, (TRECE DOLARES USA, para el extranjero) cada uno.

Los pedidos deben dirigirse a esta Asociación Técnica Española del Pretensado, Apartado 19002, 28080 Madrid.

Debe tenerse en cuenta que, de conformidad con las normas al efecto establecidas, sólo podrán ser atendidas aquellas peticiones que vengan acompañadas, bien de cheque extendido a nombre de la Asociación por el importe total del pedido formulado, o bien de copia de la correspondiente orden de transferencia efectuada a la cuenta que la A.T.E.P. tiene abierta, con el número 1560/271, en la sucursal de Potosí, calle Bolivia nº 11, 28016 Madrid, del Banco Español de Crédito.

Cálculo simplificado de flechas instantáneas en vigas de hormigón sometidas a flexión compuesta. Método propuesto para la Instrucción de Hormigón Pretensado EP-93

Fernando Fargueta Cerdá
Ingeniero de Caminos

Dpto. Mecánica Medios Continuos y Teoría de Estructuras

Miguel Angel Fernández Prada
Pedro Miguel Sosa

Drs. Ingenieros de Caminos
Dpto. Ingeniería de la Construcción

Universidad Politécnica de Valencia

1. INTRODUCCION

La Instrucción EH-91 [ref. 1] y los códigos europeos de hormigón (Eurocódigo EC-2 [ref. 2] y Código Modelo 90 [ref. 3]) establecen métodos simplificados para el cálculo de flechas instantáneas en elementos de hormigón sometidos a solicitaciones de flexión simple. Sin embargo, se advierte la ausencia, en las citadas normas, de métodos igualmente simplificados para el cálculo de flechas instantáneas en piezas de hormigón armado sometidas a flexión compuesta, y que, por extensión, sean también aplicables a piezas pretensadas, en las que se alcance el estado de fisuración.

En efecto, la Instrucción EH-91 adopta, como método general de cálculo de flechas, la integración de curvaturas a lo largo de la pieza, pero no establece un valor de curvatura media que defina el comportamiento de la pieza entre el correspondiente a sección no fisurada (estado 1) y el correspondiente a sección completamente fisurada (estado 2).

Como método simplificado, válido sólo para el caso de flexión simple, la EH-91 propone el desarrollado por D.E. Branson

[ref. 4], que consiste en la utilización, para el cálculo de la flecha, de una inercia equivalente, I_e , que tiene en cuenta el estado de fisuración de la pieza. A nivel de sección, se define la inercia equivalente según la siguiente expresión:

$$I_e = \left(\frac{M_r}{M}\right)^3 I_1 + \left[1 - \left(\frac{M_r}{M}\right)^3\right] I_r \neq I_1 \quad (1)$$

siendo I_1 e I_r las inercias correspondientes a sección no fisurada (inercia de la sección homogeneizada o, simplificada, inercia de la sección bruta) y completamente fisurada, respectivamente. M_r es el momento nominal de fisuración de la sección y M es el momento flector que solicita a la sección, en el estado de cargas considerado.

A nivel de pieza, la inercia equivalente se define, en función de las condiciones de vinculación, mediante una interpolación lineal entre las inercias equivalentes correspondientes a las secciones central y extremas de la pieza.

Por su parte, el Eurocódigo EC-2 establece también, como método general de cálculo de flechas, el de integración de curvaturas y define, para elementos sometidos a flexión simple, una curvatura media, $1/r_m$,

de acuerdo con la siguiente expresión:

$$\frac{1}{r_m} = (1 - \xi) \frac{1}{r_1} + \xi \frac{1}{r_2} \quad (2)$$

siendo $1/r_1$ y $1/r_2$ las curvaturas correspondientes a sección no fisurada y completamente fisurada, respectivamente, y ξ un factor de interpolación que viene dado por:

$$\xi = 1 - \beta \left(\frac{M_r}{M} \right)^2$$

donde β es un coeficiente que depende de las propiedades de adherencia de las armaduras y de la duración o repetición de las cargas.

El EC-2 hace extensible este método también al caso de piezas sometidas a flexión compuesta, pero específica que "sólo válido para axiles de poca importancia".

El Código Modelo 90 presenta un planteamiento más general que los establecidos en EH-91 y EC-2. Al igual que estos últimos, adopta, como método general, la integración de curvaturas, pero establece un valor de curvatura media, $1/r_m$, válido para el caso general de piezas sometidas a flexión compuesta (con esfuerzo axial actuando en el centro de gravedad de la sección total) definido por:

$$\frac{1}{r_m} = \frac{1}{r_{2N}} - \left(\frac{1}{r_{2r}} - \frac{1}{r_{1r}} \right) \beta \left(\frac{M_r}{M} \right) \quad (3)$$

siendo $1/r_{2N}$ la curvatura correspondiente a sección completamente fisurada y solicitada por los esfuerzos M y N , debidos al caso de carga estudiado; $1/r_{1r}$ y $1/r_{2r}$, las curvaturas correspondientes a sección sin fisurar y completamente fisurada, respectivamente, y solicitadas por el esfuerzo axial N y el momento de fisuración M_r , y β el mismo coeficiente definido por EC-2.

En el caso particular de flexión simple, resulta:

$$\frac{1}{r_{1r}} = \frac{M_r}{M} \frac{1}{r_1} \quad \text{y} \quad \frac{1}{r_{2r}} = \frac{M_r}{M} \frac{1}{r_2}$$

y, consecuentemente, de la expresión (3) se obtiene:

$$\frac{1}{r_m} = \frac{1}{r_2} - \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) \beta \left(\frac{M_r}{M} \right)^2 =$$

$$= (1 - \xi) \frac{1}{r_1} + \xi \frac{1}{r_2}$$

que evidentemente coincide con la expresión (2) del EC-2.

Tanto el Eurocódigo EC-2 como el Código Modelo 90, recogen los trabajos de R. Favre [ref. 5, 6 y 7] sobre cálculo de flechas.

El cálculo de curvaturas en secciones fisuradas sometidas a flexión compuesta, representa un problema complejo puesto que la relación momento-curvatura ya no es lineal, al depender la posición de la fibra neutra, y, consecuentemente, la inercia de la sección, de los esfuerzos M y N aplicados a la sección. Ello hace que los métodos generales de cálculo de flechas en elementos de hormigón sometidos a solicitaciones de flexión compuesta no sean de aplicación sencilla y operativa para la comprobación del estado límite de deformación en los casos más usuales. Por ello, el Código Modelo 90 remite, para las aplicaciones prácticas, al método bilineal simplificado que se expone en el Boletín nº 158 del C.E.B. "Manual de Fisuración y Deformaciones" [ref. 8] que comentaremos brevemente en el siguiente apartado de este artículo.

En este artículo se presenta un método simplificado de cálculo de flechas instantáneas en piezas de hormigón sometidas a flexión compuesta, mediante la utilización de una inercia equivalente I_e , semejante a la propuesta por Branson para el caso de flexión simple, y que no requiere, para su aplicación práctica, cálculos adicionales a los necesarios para flexión simple.

Dado que el método que se presenta es aplicable también al caso de piezas pretensadas, y en virtud de la concordancia de la formulación presentada con la recogida por la Instrucción EH-91 para el caso de flexión simple, los autores han propuesto que este método simplificado sea recogido en la nueva redacción del artículo **55.1. Cálculo de las flechas instantáneas** de la Instrucción de Hormigón Pretensado, actualmente en revisión.

2. METODO SIMPLIFICADO DEL MANUAL DE FISURACION Y DEFORMACIONES DEL C.E.B.

2.1. Diagrama simplificado Momento-Curvatura

En secciones sometidas a flexión compuesta, con un esfuerzo normal N de compresión actuando en el centro de gravedad de la sección total, puede adoptarse, de forma simplificada, una relación bilineal momento-curvatura, de acuerdo con las siguientes consideraciones:

1) En estado no fisurado (estado 1) el esfuerzo normal N no produce efecto adicional alguno sobre las curvaturas debidas a la actuación del momento flector y , en consecuencia, se adopta la misma curvatura que en flexión simple:

$$\frac{1}{r_1} = \frac{M}{E_c I_1}$$

2) En estado de completa fisuración (estado 2) el esfuerzo normal N origina una variación de la zona de compresiones en el hormigón y , consecuentemente, la relación momento-curvatura ya no es lineal. Sin embargo, para valores altos del momento flector, dicha relación tiende a seguir una línea paralela a la correspondiente a este mismo estado en flexión simple, de manera que la curvatura, simplificada, puede expresarse en la forma:

$$\frac{1}{r_{2N}} = \frac{1}{r_2} - \Delta \frac{1}{r_2}$$

siendo $1/r_{2N}$ la curvatura correspondiente a flexión compuesta en estado 2, $1/r_2$ la curvatura correspondiente a flexión simple en estado 2 y $\Delta 1/r_2$ el incremento de curvatura debido al esfuerzo normal N , al cambiar el centro de gravedad de la sección por efecto de la fisuración, desde sección no fisurada a sección fisurada. Este incremento de curvatura viene dado por:

$$\Delta \frac{1}{r_2} = \frac{N(x_1 - x_2)}{E_c I_f} = \frac{N x_{12}}{E_c I_f} = \frac{M_0}{E_c I_f}$$

donde:

x_1 = Profundidad de la fibra neutra, para estado 1, en flexión simple.

x_2 = Profundidad de la fibra neutra, para estado 2, en flexión simple.

$$x_{12} = x_1 - x_2$$

$M_0 = N x_{12}$, valor del momento flector producido por el esfuerzo axial aplicado en el c.d.g. de la sección no fisurada, G_1 , respecto al c.d.g. de la sección fisurada, G_2 (figura 1). Este momento es de signo contrario al momento actuante M .

I_f = Momento de inercia de la sección, para estado 2, en flexión simple.

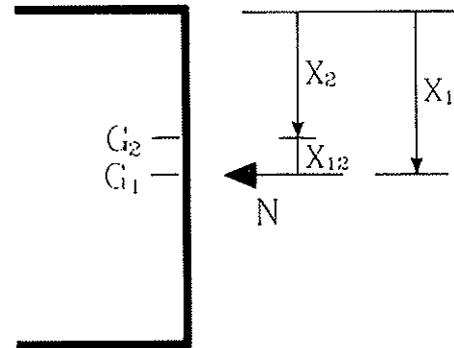


Fig. 1.

De acuerdo con estas consideraciones, la curvatura en flexión compuesta puede aproximarse, con suficiente precisión, mediante dos rectas (figura 2) correspondientes, respectivamente, a:

-La curvatura $1/r_1$, para estado 1, igual a flexión simple.

-La curvatura $1/r_2 - \Delta 1/r_2$ para estado 2, paralela a la curvatura $1/r_2$ en flexión simple.

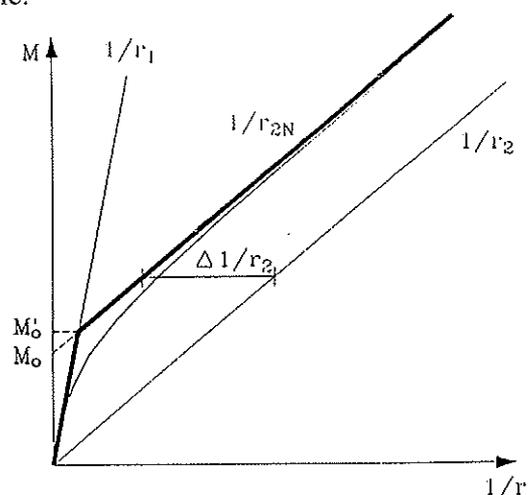


Fig. 2. Diagrama $M-1/r$ de la sección fisurada, en flexión compuesta. Aproximación bilineal.

La intersección de estas dos rectas viene definida por el momento M'_0 de valor:

$$M'_0 = \frac{N \cdot x_{12}}{1 - \frac{I_r}{I_1}} = \frac{M_0}{1 - \frac{I_r}{I_1}}$$

2.2. Cálculo de flechas. Método bilineal

Como método simplificado de cálculo de flechas en piezas sometidas a flexión compuesta, el "Manual de Fisuración y Deformaciones" del C.E.B. propone el método bilineal, basado en que, para el cálculo en servicio, la relación momento-flecha puede aproximarse mediante una relación bilineal que representa, en cierto modo, el efecto completo de la relación momento-curvatura descrita en el apartado anterior.

La aproximación adoptada consiste en calcular las flechas extremas, y_1 e y_2 , correspondientes a los estados 1 y 2, respectivamente, en flexión simple, y obtener la flecha probable "y", que estará comprendida entre dichos extremos, mediante una interpolación lineal definida por la siguiente expresión.

$$y = (1 - \xi_b) y_1 + \xi_b y_2 \quad (4)$$

En esta ecuación, el factor de interpolación ξ_b se calcula con las características de la sección crítica o determinante (sección central para vanos simples o continuos y sección de arranque para voladizos) de acuerdo con el siguiente esquema:

$$\text{Si } \beta M_{rd} \geq M'_{0D} \quad \begin{cases} \xi_b = 1 - \beta \frac{M_{rd}}{M_D} \\ \xi_b = 0 \text{ para } M_D < M_{rd} \end{cases}$$

$$\text{Si } \beta M_{rd} < M'_{0D} \quad \begin{cases} \xi_b = 1 - \frac{M'_{0D}}{M_D} \\ \xi_b = 0 \text{ para } M_D < M'_{0D} \end{cases}$$

donde:

β es el mismo coeficiente referido anteriormente.

M_D es el momento flector en la sección determinante.

M'_{0D} es el valor del momento M'_0 para la sección determinante.

M_{rd} es el momento de fisuración para la sección determinante, cuyo valor viene dado por:

$$M_{rd} = \left(f_{ct} + \frac{N}{A_1} \right) W_1$$

siendo f_{ct} la resistencia a flexotracción del hormigón, A_1 el área de la sección no fisurada, que puede tomarse, de manera simplificada, igual al área de la sección bruta de hormigón, y W_1 el módulo resistente de la sección no fisurada con respecto a la fibra extrema en tracción, que puede igualmente calcularse, de forma simplificada, considerando exclusivamente las características de la sección bruta de hormigón.

El cálculo de las flechas y_1 e y_2 puede también realizarse a partir de las características de la sección determinante, despreciando de esta forma los efectos de la variación de armaduras a lo largo de la pieza.

3. METODO PROPUESTO

La fórmula de ponderación de inercias (1) propuesta por Branson para el cálculo de flechas en piezas sometidas a flexión simple, permite obtener una inercia equivalente secante I_e , o, dicho de otra forma, permite conocer la pendiente de la recta correspondiente a la rigidez secante del diagrama momento-curvatura, para cualquier nivel de momento flector aplicado (figura 3). Esta pendiente queda comprendida entre el valor de la rigidez de la sección no fisurada

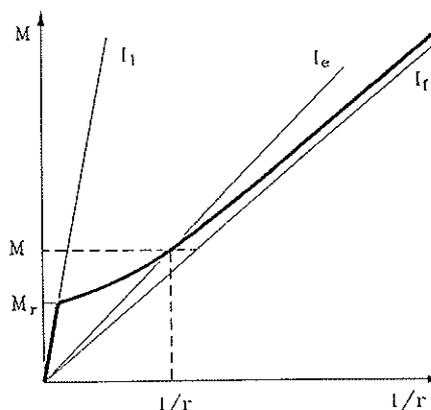


Fig. 3. Interpolación de inercias para flexión simple, según Branson.

($E_c I_f$), cuando el nivel de momento aplicado es inferior al momento de fisuración M_r , y el valor de la rigidez de la sección completamente fisurada ($E_c I_r$), cuando el nivel de momento aplicado es muy superior al de fisuración.

Cuando actúa un esfuerzo axial, la rigidez fisurada de la sección ya no es constante, como ha quedado expuesto en el apartado anterior, sino que varía con el nivel de momento flector aplicado a la sección. No obstante, adoptando el diagrama bilineal simplificado momento-curvatura para la sección fisurada propuesto por el "Manual de Fisuración y Deformaciones" del C.E.B., ya presentado en el apartado anterior, es posible utilizar, en flexión compuesta, la misma idea de interpolación de inercias que Branson establece en flexión simple. Para ello, se deben escoger como rigideces límites para la interpolación, la rigidez de la sección no fisurada ($E_c I_1$) y la rigidez secante de la sección fisurada, en flexión compuesta, ($E_c I_{FN}$).

El valor de la inercia fisurada secante, en flexión compuesta, I_{FN} , que resulta penoso de obtener de forma rigurosa, puede ser deducido directamente, de forma aproximada, mediante una sencilla relación geométrica, a partir del diagrama bilineal simplificado momento-curvatura de la sección fisurada, en flexión compuesta (figura 4):

$$E_c \frac{1}{r} = \frac{M - M_0}{I_r} = \frac{M}{I_{FN}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_{FN} = \frac{M}{M - M_0} I_r \neq I_1 \quad (5)$$

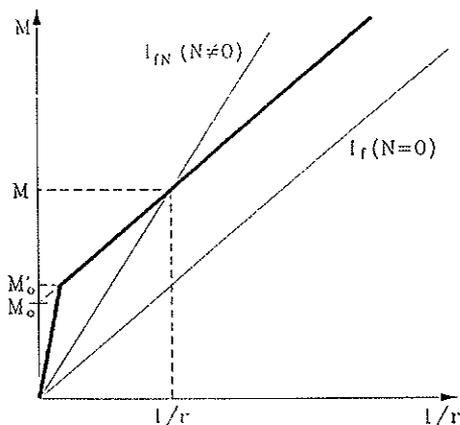


Fig. 4. Inercia fisurada secante en flexión compuesta.

La expresión (5) obtenida es aplicable, exclusivamente, para niveles de momento flector aplicado a las secciones superiores a M_0 , ya que para momentos inferiores se obtendrían valores mayores que I_1 o incluso negativos; de ahí la limitación impuesta al resultado obtenido.

Para aplicar la ponderación de inercias, se refieren los momentos actuante, M , y de fisuración, M_r , que intervienen en el coeficiente de interpolación, al valor del momento M_0 (figura 5):

$$I_c = \left(\frac{M_r - M_0}{M - M_0} \right)^3 I_1 +$$

$$+ \left[1 - \left(\frac{M_r - M_0}{M - M_0} \right)^3 \right] I_{FN} \neq I_{FN} \quad (6)$$

En esta expresión, el momento de fisuración M_r de la sección debe considerarse con el esfuerzo axial aplicado a la sección.

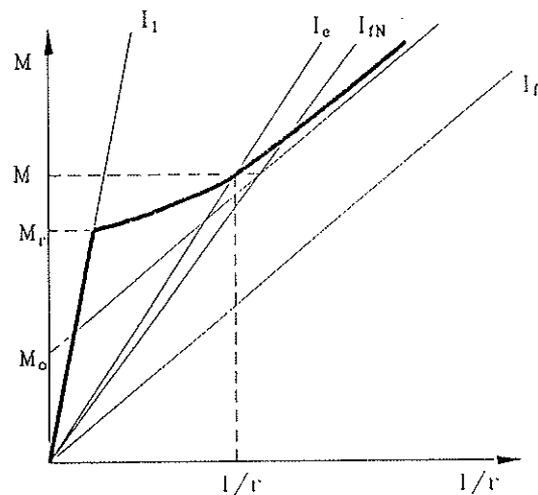


Fig. 5. Interpolación propuesta para flexión compuesta.

Se ha comprobado que, referir los momentos que intervienen en el coeficiente de interpolación al momento M_0 , constituye un buen ajuste del mismo, por comparación con los resultados obtenidos con el método general propuesto por el Código Modelo 90.

Si el momento flector aplicado a la sección es menor que el de fisuración, $M \leq M_r$, la inercia equivalente debe ser la correspondiente a sección no fisurada, $I_c = I_1$. En caso contrario, es decir, si $M > M_r$, debe

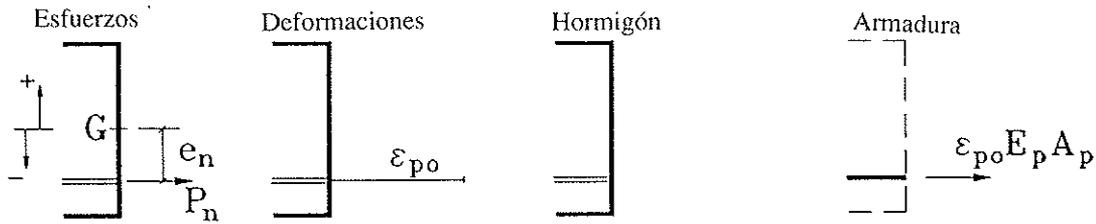


Fig. 6. Estado de neutralización.

aplicarse la interpolación de inercias definida por la expresión (6).

Resulta evidente que la inercia equivalente nunca puede ser inferior a la inercia de la sección fisurada, I_{FN} , por lo que si en algún caso resulta $M_t < M_o$ debe tomarse $I_e = I_{FN}$.

4. CASO DE ELEMENTOS PRETENSADOS

A nivel sección, el pretensado supone una predeformación de la armadura activa, respecto al hormigón y a las armaduras pasivas. Esto significa que cuando la deformación del hormigón y de las armaduras pasivas es nula (curvatura de la sección nula), la armadura activa está traccionada. A este estado de deformaciones en la sección, se le denomina "estado de neutralización" y no corresponde al estado de reposo de la sección (solicitud nula), sino a la aplicación sobre ella de una fuerza P_n , llamada "fuerza de neutralización", y aplicada con una excentricidad e_n (figura 6).

Esta fuerza de neutralización es igual a la fuerza de la armadura activa en la bancada, en el caso de pretensado con armaduras pretesas; mientras que en el caso de pretensado con armaduras postesas, la fuerza de neutralización debe deducirse de la fuerza de pretensado instantánea, P_{ki} , y de los esfuerzos actuantes (N_o , M_o) en el momento de la inyección adherente (figura 7):

$$P_n = (\epsilon_{cp} + \epsilon_p) E_p A_p$$

$$\epsilon_{cp} = \frac{P_{ki} + N_o}{E_c A} + \frac{P_{ki} e_p + M_o}{E_c I} e_p$$

$$\epsilon_p = \frac{P_{ki}}{E_p A_p}$$

donde A e I son las características mecánicas de la sección neta, y A_p es el área de las armaduras activas.

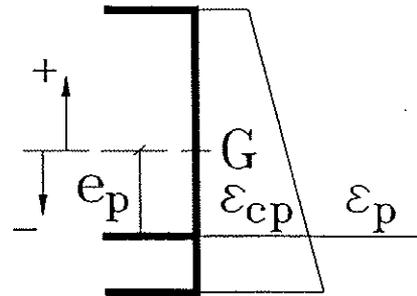


Fig. 7. Deformación de una sección pretensada con armaduras postesas, en el momento de la inyección.

Traducido el efecto del pretensado al diagrama momento-curvatura de la sección pretensada, se comprende que éste no pasará por el origen, sino por el punto de curvatura nula para un esfuerzo aplicado igual al de neutralización (figura 8).

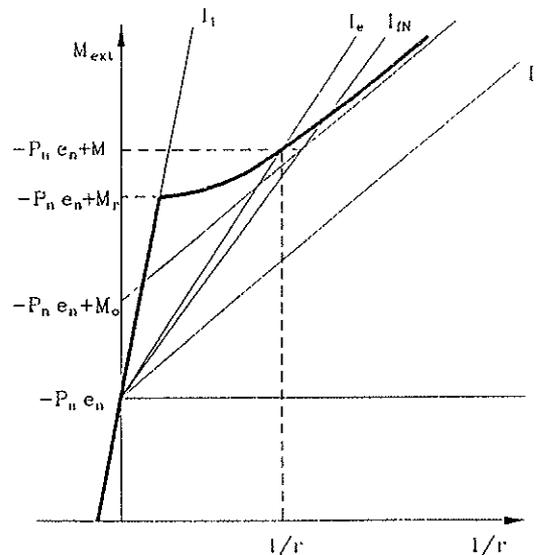


Fig. 8. Diagrama $M-1/r$ de una sección pretensada.

Este diagrama es idéntico al de una sección armada donde la armadura activa no estuviera predeformada, pero considerando, como esfuerzos exteriores, el axil opuesto a

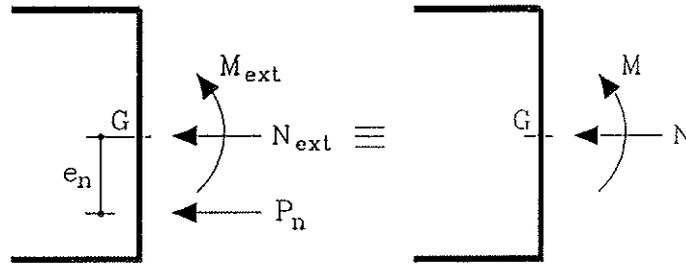


Fig. 9. Esfuerzos aplicados a la sección para el cálculo de flechas.

la fuerza de neutralización, es decir, el axil de compresión P_n , y el momento flector $P_n \cdot e_n$, añadidos a los esfuerzos exteriores (figura 9).

$$M = M_{ext} + P_n \cdot e_n$$

$$N = N_{ext} + P_n$$

En estructuras hiperestáticas, el pretensado puede producir reacciones no nulas en los apoyos, que introducen esfuerzos sobre cada sección, denominados esfuerzos hiperestáticos de pretensado. Estos esfuerzos deben incluirse, a todos los efectos, como esfuerzos exteriores.

La obtención de la fuerza de neutralización es inmediata en el caso de armaduras pretesas; sin embargo, en el caso de armaduras postesas requiere un cálculo seccional previo, como ya hemos indicado. Como aproximación, en este último caso, puede tomarse el valor de la fuerza de pretensado de la sección, en lugar de la fuerza de neutralización, ya que:

$$P_n = P_{ki} + \epsilon_{cp} E_p A_p = P_{ki} + \Delta P$$

y el término ΔP es pequeño comparado con P_{ki} (del orden del 10% de P_{ki}); en consecuencia, puede despreciarse sin excesivo error a efecto del cálculo simplificado de flechas instantáneas.

5. CONTRASTE DE RESULTADOS: METODO GENERAL Y METODO PROPUESTO

Al objeto de determinar la aproximación del método propuesto en este artículo, se ha procedido a un contraste sistemático de resultados, con los proporcionados por el

método general de integración de curvaturas establecido en el Código Modelo 90. Para facilitar el estudio de gran número de casos, se ha desarrollado un programa de cálculo por ordenador, que permite determinar la flecha instantánea en el centro de la luz por ambos métodos.

Para la aplicación del método general de integración de curvaturas, se ha partido de la expresión (3) que define, según el CM-90, la curvatura media en aquellas zonas de la viga en las que se supere la resistencia a tracción del hormigón. Evidentemente, en las zonas no fisuradas la curvatura que hay que considerar es la correspondiente a sección no fisurada. El cálculo de la flecha en la sección media del vano se realiza por el método de la carga unitaria (principio de los trabajos virtuales):

$$y = \int_0^l \frac{1}{r_m} M^1 dx$$

donde M^1 es la ley de momentos flectores producida, en la viga biapoyada, por una carga puntual unidad aplicada en el punto medio de la luz.

La integración numérica se efectúa por el método de Simpson, debiendo definirse, como dato del programa, el número de secciones en que se desea discretizar la viga.

El programa admite la definición de secciones transversales de forma cualquiera, con armaduras activas, que pueden ser pretesas o postesas, y pasivas. En el caso de armaduras postesas es posible definir el trazado del pretensado hasta con cuatro parábolas tangentes entre sí, que el programa ajusta, automáticamente, tomando como datos las excentricidades del trazado en las secciones extremas y en una sección inter-

media definida previamente.

Es posible, igualmente, definir diferentes fases de hormigonado, especificando la fase en que tiene lugar el pretensado.

En el caso de armaduras postesas, se evalúan las pérdidas instantáneas de pretensado por rozamiento del cable con la vaina.

Las cargas admitidas por el programa son uniformemente distribuidas a lo largo de toda la luz (de larga y corta duración), debiendo especificarse, igualmente, las sollicitaciones en las secciones extremas de la viga (esfuerzo axial de compresión y momento flector).

El cálculo seccional se realiza en estado fisurado o no fisurado, según corresponda, y teniendo en cuenta las deformaciones previas del pretensado.

El tratamiento sistemático de un amplio número de casos correspondientes tanto a vigas armadas como pretensadas, con diferentes tipos de secciones y condiciones de apoyo, ha permitido contrastar los resultados proporcionados por el método simplificado propuesto, con los obtenidos por el método general del Código Modelo 90. El análisis de estos resultados ha evidenciado que las diferencias entre ambos procedimientos son reducidas y poco significativas, lo cual justifica, plenamente, la validez del método simplificado propuesto en este artículo.

Para mostrar el nivel de aproximación del método propuesto se ofrecen, a continuación, los resultados obtenidos en un caso genérico. Se trata de una viga biapoyada, de hormigón armado, de 6,00 m de

luz, con sección rectangular constante, de 25 cm de ancho y 50 cm de canto total, armada con 2 Φ 20 en la cara superior y 5 Φ 20 en la cara inferior, que se mantienen constantes a lo largo de toda la luz (figura 10).

La viga está sometida, simultáneamente, a una carga uniformemente distribuida, de 3,00 t/m, y a un esfuerzo normal de compresión, N, actuando en el centro de gravedad de la sección no fisurada. A efectos del método general de integración de curvaturas, la carga se ha tratado como instantánea o de corta duración.

Haciendo variar el valor del esfuerzo de compresión N, se han obtenido los correspondientes valores de las flechas instantáneas, tanto por el método general como por el método propuesto, quedando así determinada la relación flecha-esfuerzo axial que viene representada en la figura 11. Como puede observarse en esta figura, el ajuste de los resultados por el método simplificado propuesto es significativamente alto. La mayor diferencia de resultados observada (error absoluto), en este caso, es de 0,63 mm, correspondiente a un valor del esfuerzo axial de 27 t, para el cual el método general da un valor de flecha instantánea de 9,50 mm y el método propuesto de 10,13 mm. El error relativo correspondiente es del +6,7%.

En el caso que se presenta, el mayor error relativo es del -9% y se produce para un valor del esfuerzo axial de 73 t. Las flechas obtenidas para este axial son de 6,35 mm, por el método general, y de 5,78 mm, por el método propuesto.

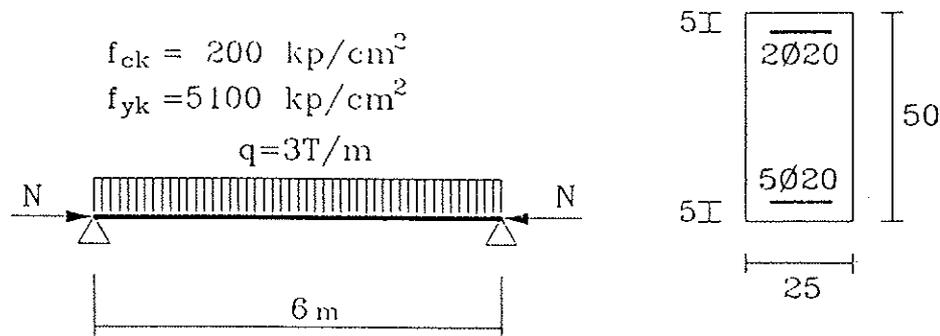


Fig. 10. Viga sometida a flexión compuesta.

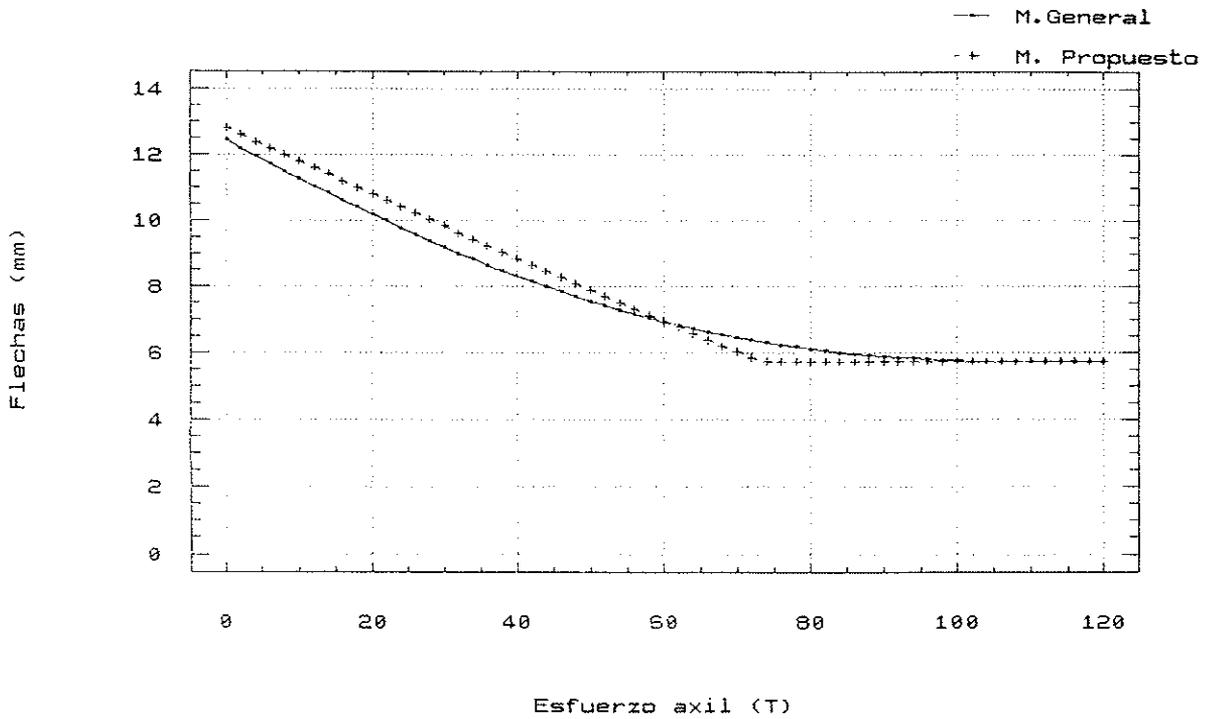


Fig. 11. Variación de la flecha con el esfuerzo axial.

6. APLICACION PRACTICA DEL METODO

A continuación, y para ilustrar la aplicación práctica del método propuesto, se van a calcular las flechas instantáneas en dos casos: 1) viga de hormigón armado sometida a flexión compuesta; y 2) viga de hormigón pretensado, comparando, además, los resultados con los obtenidos por el método general de integración de curvaturas propuesto por el Código Modelo 90.

6.1. Viga de hormigón armado sometida a flexión compuesta

Consideremos una viga biapoyada, de 6,00 m de luz (figura 12), sometida, simultáneamente, a una carga uniformemente distribuida, de 3,50 t/m, de las que 2,50 t/m

corresponden a cargas permanentes y 1,00 t/m a sobrecargas, y a un esfuerzo exterior axial de compresión, de 50 t, actuando en el centro de gravedad de la sección no fisurada.

La sección de hormigón es rectangular, de 30 cm de ancho y 50 cm de canto total, y está armada con $3\Phi 20$ superiormente y $5\Phi 20$ inferiormente, que se mantienen constantes a lo largo de la viga (figura 13). Las características de los materiales son: hormigón tipo H-200 y acero tipo AEH-500N.

Los módulos de deformación del hormigón y del acero son: $E_c = 19.000 \cdot (200)^{1/2} = 268.700 \text{ Kp/cm}^2$, y $E_s = 2,1 \cdot 10^6 \text{ Kp/cm}^2$, siendo, por tanto, el coeficiente de equivalencia, $m = E_s/E_c = 7,815$.

Las características de la sección no fisu-

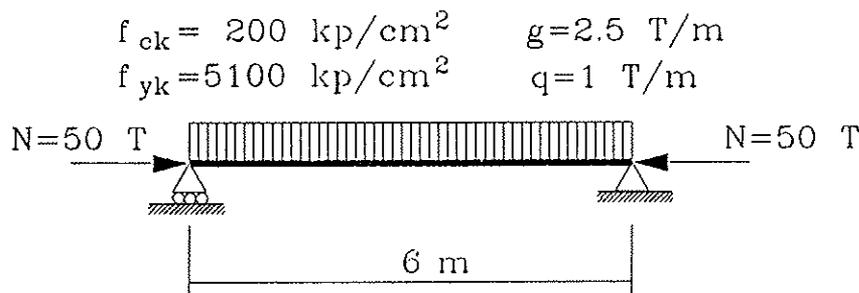


Fig. 12. Viga de hormigón armado.

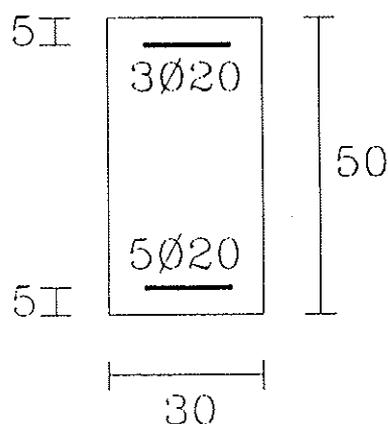


Fig. 13. Sección transversal.

rada son: profundidad del c.,d.g. (igual a profundidad de la fibra neutra en flexión simple, $x_1 = 25,58$ cm; área, $A_1 = 1696$ cm², e inercia, $I_1 = 390.461$ cm⁴. La resistencia a flexotracción del hormigón resulta: $f_{cr} = 0,8 \cdot (200)^{2/3} = 27,36$ Kp/cm², por lo que el momento de fisuración de la sección es:

$$M_f = \left(f_{cr} + \frac{N}{A_1} \right) \frac{I_1}{y_1} = \left(27,36 + \frac{50 \cdot 10^3}{1.696} \right) \cdot \frac{390.461}{24,42} \cdot 10^{-5} = 9,09 \text{ m} \cdot \text{t}$$

El momento actuante en la sección central de la viga es:

$$M = \frac{(g+q) L^2}{8} = \frac{3,50 \cdot 6^2}{8} = 15,75 \text{ m} \cdot \text{t}$$

Dado que $M > M_f$, se produce la fisuración de la viga y las características de la sección fisurada son: profundidad del c.d.g. en flexión nsimple (igual a profundidad de la fibra neutra en flexión simple), $x_2 = 14,32$ cm, e inercia fisurada en flexión simple, $I_f = 151.254$ cm⁴.

El valor del momento M_0 que define el diagrama momento-curvatura simplificado, en flexión compuesta, para la sección fisurada es:

$$M_0 = N \cdot (x_1 - x_2) = 50 \cdot (0,2558 - 0,1432) = 5,63 \text{ m} \cdot \text{t}$$

En consecuencia, la inercia fisurada secante de la sección en flexión compuesta es:

$$I_{IN} = \frac{M}{M - M_0} I_f = 235.400 \text{ cm}^4$$

Dado que $M > M_0$ y $M_f > M_0$, la inercia equivalente de la sección central se obtiene mediante la expresión propuesta (6) de interpolación de inercias:

$$\frac{M_f - M_0}{M - M_0} = 0,342 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_c = 0,04 I_f + 0,96 I_{IN} = 241.602 \text{ cm}^4$$

La inercia equivalente de la viga, para el cálculo de la flecha instantánea, se toma igual a la inercia equivalente calculada de la sección central, por tratarse de viga simplemente apoyada. En consecuencia, el valor estimado de la flecha instantánea es:

$$y = \frac{5 (g+q) L^4}{384 E_c I_c} = 0,91 \text{ cm}$$

Este mismo ejemplo se ha resuelto por el método general de integración de curvaturas, mediante el programa descrito anteriormente, con un intervalo de discretización de 3 cm (201 secciones calculadas) y tomando, para el factor β , un valor interpolado entre 0,50 (cargas permanentes) y 0,80 (cargas instantáneas), en función de las cargas consideradas:

$$\beta = \frac{0,50 \cdot 2,50 + 0,80 \cdot 1,00}{3,50} = 0,586$$

y se ha obtenido, para la flecha instantánea, el valor: $y = 0,86$ cm. En consecuencia, el error cometido por el método propuesto en este artículo es inferior al 6%.

6.2. Viga de hormigón pretensado

Como ejemplo ilustrativo, se ha considerado una viga pretensada, con armadura postesa, biapoyada, con 25,00 m de luz (figura 14) y sometida a su propio peso, de 1,44 t/m, y a una sobrecarga de 2,00 t/m.

La sección de la viga es la representada en la figura 15. Las armaduras pasivas están constituidas por 8Ø12 superiores y 7Ø20 inferiores, de acero AEH-500N, que se mantienen constantes a lo largo de la viga. La armadura activa está compuesta

$$g = 1.44 \text{ T/m}$$

$$q = 2 \text{ T/m}$$

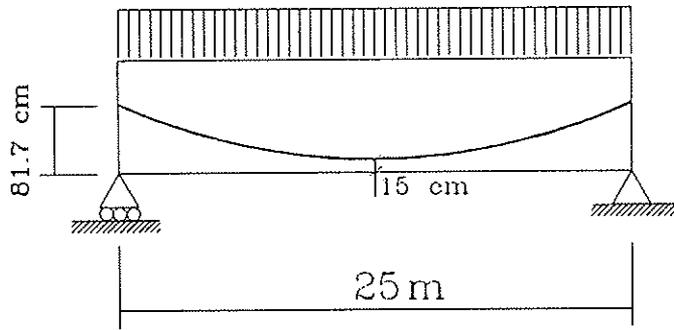


Fig. 14. Viga de hormigón pretensado.

por un solo tendón, de 12 cm^2 de sección, enfilado en una vaina de 6 cm de diámetro y tesado a 14.000 Kp/cm^2 (límite elástico $f_{py} = 17.000 \text{ Kp/cm}^2$).

El trazado del pretensado es una parábola (figura 14) con excentricidades, respecto a la fibra inferior de la sección, de 81,70 cm (c.d.g. de la sección bruta de hormigón) en las secciones de apoyo y de 15 cm en la sección central. La ecuación de esta parábola, con respecto a la tangente por su punto más bajo (eje x) y a la sección central de la viga (eje y) es:

$$y = a \cdot x^2$$

con

$$a = \frac{(0,817 - 0,15)}{12,50^2} = 4,2688 \cdot 10^{-3} \text{ m}^{-1}$$

El hormigón es H-350, con un módulo de deformación: $E_c = 19.000 \cdot (350)^{1/2} = 355.457 \text{ Kp/cm}^2$. Los módulos de elasticidad de los aceros son: para las armaduras pasivas, $E_s = 2,1 \cdot 10^6 \text{ Kp/cm}^2$, y para las armaduras activas, $E_p = 2 \cdot 10^6 \text{ Kp/cm}^2$. Siendo, por tanto, los coeficientes de equivalencia: $m_s = E_s/E_c = 5,90$ para las armaduras pasivas, y $m_p = E_p/E_c = 5,60$ para las armaduras activas.

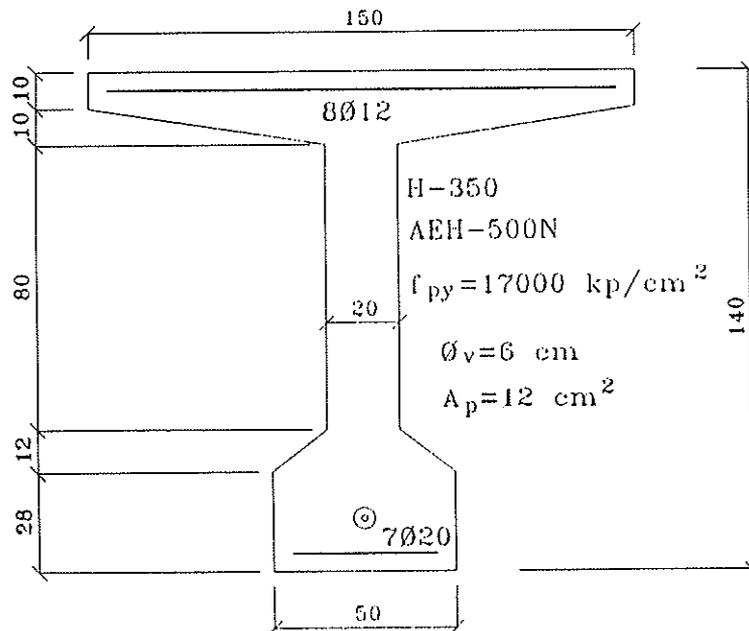


Fig. 15. Sección transversal.

Las características de la sección homogeneizada no fisurada (sección central de la viga) son: profundidad de la fibra neutra en flexión simple (c.d.g. de la sección) $x_1 = 60$ cm, área $A_1 = 5992$ cm² e inercia $I_1 = 15.357.860$ cm⁴.

La fuerza de tesado es $P_0 = 12$ cm² · 14.000 Kp/cm² · 10⁻³ = 168 t. Las pérdidas por rozamiento entre la sección extrema de anclaje y la sección central son del 3,80% de la fuerza de tesado. Por lo que, no considerando otras pérdidas instantáneas de pretensado, el pretensado característico inicial en la sección central es $P_{ki} = 0,962 \cdot P_0 = 161,6$ t.

La resistencia a flexotracción del hormigón es: $f_{ct} = 0,8 \cdot (350)^{2/3} = 39,70$ Kp/cm² y, en consecuencia, el momento de fisuración de la sección es:

$$M_f = \left(f_{ct} + \frac{P_{ki}}{A_1} \right) \frac{I_1}{y_1} =$$

$$= \left(39,70 + \frac{161,6 \cdot 10^3}{5.992} \right) \cdot \frac{15.357.860}{80} \cdot 10^{-5} = 128 \text{ m} \cdot \text{t}$$

El momento actuante en la sección central de la viga es:

$$M = \frac{(g+q)L^2}{8} - P_{ki} e_n = \frac{3,44 \cdot 25^2}{8} - 161,6 \cdot 0,65 =$$

$$= 163,7 \text{ m} \cdot \text{t}$$

Puesto que el momento actuante es superior al momento de fisuración, la viga fisura. Las características de la sección central fisurada son: profundidad de la fibra neutra en flexión simple (c.d.g. de la sección fisurada en flexión simple), $x_2 = 17,41$ cm, e inercia fisurada en flexión simple, $I_f = 2.841.446$ cm⁴.

El momento M_0 que define el diagrama momento-curvatura simplificado, en flexión compuesta, para la sección fisurada es:

$$M_0 = P_{ki} \cdot (x_1 - x_2) = 161,6 \cdot$$

$$\cdot (0,60 - 0,1741) = 68,8 \text{ m} \cdot \text{t}$$

Dado que el momento actuante M es superior a M_0 , la inercia fisurada secante de la sección en flexión compuesta es:

$$I_{IN} = \frac{M}{M - M_0} I_f = 4.901.420 \text{ cm}^4$$

Puesto que $M > M_0$ y también $M_f > M_0$, la inercia equivalente de la sección central se calcula por medio de la expresión propuesta (6) de interpolación de inercias:

$$\frac{M_f - M_0}{M - M_0} = 0,624 \Rightarrow I_c = 0,243 I_1 +$$

$$+ 0,757 I_{IN} = 7.442.335 \text{ cm}^4$$

Por tratarse de un caso de viga simplemente apoyada, la inercia equivalente de la viga, para el cálculo de la flecha instantánea, se toma igual a la inercia equivalente calculada para la sección central de la viga. El valor corregido de la carga actuante por efecto del pretensado es:

$$q^1 = (g + q) - \frac{d^2 y}{dx^2} P_{ki} = (g + q) - 2 a P_{ki} =$$

$$= 3,44 - 2 \cdot 4,2688 \cdot 10^{-3} \cdot 161,6 = 2,06 \text{ t/m}$$

Por tanto, el valor estimado de la flecha instantánea es:

$$y = \frac{5 q^1 L^4}{384 E_c I_c} = 3,96 \text{ cm}$$

Este mismo caso se ha resuelto por el método general de integración de curvaturas, propuesto por el Código Modelo 90, mediante el programa de ordenador ya descrito con anterioridad, tomando un intervalo de discretización entre secciones de 10 cm (251 secciones calculadas) y un factor β , en función de las cargas consideradas, igual a:

$$\beta = \frac{0,50 \cdot 1,44 + 0,80 \cdot 2,00}{3,44} = 0,674$$

obteniéndose, para la flecha instantánea, el valor: $y = 3,87$ cm. Tomando este resultado como exacto, el error cometido con la aplicación del método propuesto es, en este caso, inferior al 3%.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

1. COMISION PERMANENTE DEL HORMIGON: "EH-91. Instrucción para el proyecto y la ejecución de obras de hormi-

gón en masa o armado". Ministerio de Obras Públicas y Transportes, 1991.

2. EUROCODE nº 2: "Design of Concrete Structures. Part. 1. General Rules for Buildings". Commission of the European Communities, 1989.

3. COMITE EURO-INTERNATIONAL DU BETON: "C.E.B.-F.I.P. Model Code 1990". C.E.B. Bulletin nº 203, 204 y 205, 1991.

4. BRANSON D.E.: "Deformation of Concrete Structures". Ed. Mc Graw-Hill, 1977.

5. FAVRE R., KOPRINA M., RADOJICIC A.: "Effets differés, fissuration et deformations des structures en béton". Ed. Georgi. Saint Saphorin, 1980.

6. FAVRE R., JACCOUD J.P., KOPRINA M., RADOJICIC A.: Dimensionnement des structures en béton. Dalles, murs, colonnes et fondations". *Traité de Génie Civil de l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne*. Ed. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 1990.

7. FAVRE R., CHARIF H.: "Basic model and simplified calculations of deformations according to the C.E.B.-F.I.P. Model Code 1990". Publication IBAP nº 137. Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, 1992.

8. COMITE EURO-INTERNATIONAL DU BETON: "C.E.B. Manual on Cracking and Deformations". C.E.B. Bulletin nº 158-E, 1985.

RESUMEN

La normativa española y los códigos europeos de hormigón establecen métodos simplificados de cálculo de flechas instantáneas en piezas de hormigón sometidas a flexión simple. Sin embargo, dichas normas, no recogen métodos igualmente simplificados para el caso de elementos sometidos a flexión compuesta.

El Código Modelo 90 presenta un método general de integración de curvaturas, válido para cualquier tipo de solicitación (flexión simple o compuesta). La aplicación de este método al caso de piezas sometidas a fle-

xión compuesta resulta compleja y poco operativa, dado que la relación momento-curvatura, en secciones fisuradas, no es lineal, al depender la posición de la fibra neutra, y, consecuentemente, la inercia de la sección fisurada, de los esfuerzos aplicados.

Para las aplicaciones prácticas, el Código Modelo 90 remite al boletín nº 158 del C.E.B. "Manual de Fisuración y Deformaciones", en el que se establece un diagrama simplificado, bilineal, para la relación momento-curvatura en secciones sometidas a flexión compuesta, considerando que, para secciones fisuradas, la curvatura en flexión compuesta es paralela a la curvatura en flexión simple.

En este artículo se presenta un método simplificado de cálculo de flechas instantáneas, en piezas sometidas a flexión compuesta, incluido el caso de piezas pretensadas, que, adoptando el diagrama bilineal simplificado del "Manual de Fisuración y Deformaciones" del C.E.B., calcula la rigidez secante de la sección fisurada y extiende la interpolación de inercias, que D.E. Branson establece en flexión simple, al caso de flexión compuesta. El cálculo de la flecha se realiza, en consecuencia, a partir de una inercia equivalente, interpolada entre la inercia correspondiente a sección sin fisurar y la correspondiente a sección completamente fisurada. Los momentos que intervienen en el coeficiente de interpolación, momento de fisuración y momento actuante, se referencian al momento correspondiente a curvatura nula, en sección fisurada, de acuerdo con el diagrama bilineal, simplificado, momento-curvatura.

El contraste sistemático de los resultados obtenidos con este método simplificado y los proporcionados por el método general de integración de curvaturas establecido en el Código Modelo 90, en un amplio tratamiento de casos, ha evidenciado la validez del método propuesto.

Dado que el planteamiento del método simplificado desarrollado en este artículo es similar al recogido por la instrucción EH-91 para el cálculo de flechas instantáneas en flexión simple, los autores han propuesto que este método sea recogido por el artículo 55.1 "Cálculo de las flechas instantáneas" de la Instrucción de Hormigón Pretensado, que actualmente está siendo revisada.

SUMMARY

The Spanish and European Concrete Codes propose simplified methods for the calculation of instantaneous deflections in concrete members under simple bending. However, these Codes, don't have simplified methods for elements under compound bending.

A general method by means of integration of curvatures for any solicitation (simple or compound bending) is presented in the Model Code 90. For practical applications,

MC-90 refers to C.E.B. Bulletin 158 (Manual on Cracking and Deformations). In this Bulletin a bilinear simplified moment-curvature relationship for any section under compound bending is given.

In this paper it is presented a simplified method for the calculation of instantaneous deflections in concrete members under compound bending, including prestress.

A systematic contrast is made against the general method of integration of curvatures given in the Model Code 90, for several cases, where it can be proved the validity of the proposed method.

* * *

SEMINARIOS TORROJA Tecnología de la Construcción y de sus Materiales Ciclo nº 15: Otoño de 1993

El Instituto de Ciencias de la Construcción Eduardo Torroja, del CSIC, viene organizando seminarios monográficos sobre temas de actualidad en el ámbito de la Tecnología de la Construcción y de sus Materiales, a cargo de destacados investigadores nacionales y extranjeros del Sector.

Estos Seminarios se celebran en el Aula Eduardo Torroja del Instituto, situado en la C/Serrano Galvache, s/n (acceso por Arturo Soria, frene al núm. 278), y tienen lugar los jueves alternos a las 12:00 horas. Su duración aproximada es de dos horas, incluyendo la ponencia y el coloquio que se realiza a continuación. La asistencia a los mismos tiene carácter libre y gratuito.

Los seminarios programados para el décimo quinto ciclo, correspondiente al otoño de 1993, son los siguientes:

21 Octubre:
Enrique **González Valle**
Dr. Ingeniero de Caminos, INTEMAC
Germán **González-Isabel**
Ingeniero Técnico de O.P., INTEMAC

“Hormigones de Alta Resistencia: Aspectos diferenciales de su reología y de su comportamiento estructural”.

4 Noviembre:
Juan Carlos **López Agüi**
Ingeniero de Caminos, IECA

“Investigación y solución práctica de casos de durabilidad de hormigones”.

18 Noviembre:
Marcos **Bollati Pato**
Ingeniero de Caminos, Instituto Eduardo Torroja

“Nuevas metodologías para determinar el comportamiento de conglomerantes y aditivos en hormigones”

2 Diciembre:
Luis **Paradinas Riestra**
Ingeniero Industrial, IBERDROLA
“Investigación y Desarrollo en IBERDROLA”.

16 Diciembre:
Angel **Palomo Sánchez**
Dr. en Ciencias Químicas, Instituto Eduardo Torroja
“Sistemas comentantes avanzados: cementos alcalinos”

Aplicación del principio de los trabajos virtuales al cálculo de las deformaciones de las estructuras

Alfonso del Río Bueno
Departamento de Estructuras de Edificación
E.T.S. de Arquitectura de Madrid

1. INTRODUCCION

La aplicación de métodos energéticos, teoremas de energía mínima o de trabajo virtual en el estudio de las condiciones de equilibrio o del movimiento es una idea antigua, que ha influido notablemente en el desarrollo de la *Mecánica* y, consecuentemente, del *Análisis de Estructuras* (Ref. 1).

Los antecedentes del principio del trabajo virtual pueden remontarse a algunos trabajos de *Arquímedes*, relativos al equilibrio de palancas y máquinas simples. En fecha más reciente, en su tratado de 1594 *Della Scienza Meccanica*, *Galileo* aborda la solución de diversos problemas de estática utilizando la idea de trabajo virtual. En 1717, *Johann Bernoulli*, en una carta a *Varignon*, menciona el principio, aunque sin demostración, señalando su generalidad para resolver problemas de Estática, y estableciendo la idea de desplazamiento virtual, entendido como cinemáticamente posible, "pequeño" y "compatible".

Años más tarde, *Euler* intenta elevar los principios de mínimo a la categoría de ley natural universal que explique, no sólo las causas, sino también el fin de los fenómenos de la naturaleza. Así, en su obra de 1744 *Methodus inveniendi lineas curvas...*, escribe "puesto que la construcción del mundo es la más perfecta, y es la obra del más sabio Creador, nada tiene lugar en el universo sin que esté presente alguna relación de máximo o mínimo.

Por tanto, no hay duda alguna de que todos los efectos del universo pueden ser explicados satisfactoriamente con la ayuda del método de los máximos y los mínimos, partiendo tanto de sus fines como de sus causas efectivas".

Finalmente, es *Lagrange*, en su *Mécanique analytique* de 1788, quien enuncia y demuestra el Principio de los Trabajos Virtuales en los términos actuales:

La condición necesaria y suficiente para el equilibrio de un sistema es que para cualquier desplazamiento virtual del mismo, compatible con los vínculos, la suma de los trabajos virtuales de las fuerzas aplicadas sea nula (1).

Utilizando los conceptos de fuerzas y coordenadas generalizadas, *Lagrange* aplica el principio del trabajo virtual para formular, de modo sistemático, las ecuaciones del equilibrio estático y, haciendo uso del principio de *D'Alembert* formular,

(1) La demostración del teorema es inmediata a partir de las condiciones de equilibrio y compatibilidad que se expresan en su enunciado:

—La condición de equilibrio extendida a todos los puntos del sistema equivale a que la suma de los trabajos de todas las fuerzas (activas y de reacción) sea nula para todo desplazamiento virtual del sistema.

—La condición de que el desplazamiento virtual sea compatible con los vínculos del sistema anula el trabajo de las fuerzas de reacción, por lo que la condición de equilibrio se transforma en la de que la suma de las fuerzas aplicadas o activas sea nula.

en términos de equilibrio dinámico, las ecuaciones del movimiento. De este modo, el principio del trabajo virtual se convierte en la base de la *Mecánica Analítica*.

La aplicación en el *Análisis de Estructuras* de los conceptos de trabajo y energía, incluyendo teoremas de energía mínima y de trabajo virtual, constituye una clave en el desarrollo teórico de esta ciencia en la segunda mitad del siglo XIX. En su libro de 1852 *Leçons sur la Théorie Mathématique de l'Elasticité des Corps Solides*, Lamé publica el teorema, debido años antes a Clapeyron, en el que se establece que la suma de los productos de las fuerzas exteriores aplicadas sobre un cuerpo, multiplicadas por la componente del desplazamiento de los puntos de aplicación en la dirección de tales fuerzas es igual al doble de la energía elástica del cuerpo. El teorema que, en definitiva, permite expresar de modo general la energía de deformación de sistemas elásticos, se enuncia considerando exclusivamente los desplazamientos reales del cuerpo bajo las fuerzas actuantes y su validez se limita a sistemas constituidos con materiales elásticos lineales.

En un artículo publicado en 1864 en la *Philosophical Magazine* bajo el título *On the calculation of equilibrium and stiffness of frames*, Maxwell aplica, conjuntamente, los teoremas de la conservación de la energía y de Clapeyron para calcular los movimientos de los nudos de estructuras articuladas isostáticas, introduciendo el método de la carga unidad. A partir de él, Maxwell aborda la solución por el método de compatibilidad de estructuras articuladas hiperestáticas. Siempre en el mismo trabajo, Maxwell propone el teorema de los desplazamientos recíprocos que, en 1872, generalizaría Betti dentro de su *Teoría della Elasticità* como teorema de los trabajos recíprocos.

El método de Maxwell para calcular desplazamientos sería redescubierto diez años más tarde, por un camino diferente, por Otto Mohr, si bien igualmente restringido a material elástico lineal. El procedimiento tuvo aplicación práctica a partir de este último trabajo, por lo que comúnmente se conoce como método de

Maxwell-Mohr.

El principio de trabajo mínimo es introducido por Ménabréa para el cálculo de las fuerzas redundantes en estructuras articuladas, estáticamente indeterminadas, constituidas por material elástico lineal. Sin embargo, el cuerpo teórico y lógico de este principio es desarrollado por Alberto Castigliano, en su trabajo de 1875 *Nuova teoria intorno all'equilibrio dei sistemi elastici*, precedido por una disertación universitaria en 1873. En los mismos trabajos, así como en un libro posterior, de 1879, se enuncian y justifican lo que su autor designó como Partes 1 y 2 de un único *Teorema de los coeficientes diferenciales del trabajo interno* (2) que, respectivamente, permiten calcular reacciones hiperestáticas y movimientos en sistemas elásticos lineales. Con el tiempo, estas proposiciones se conocerían comúnmente como *Primer y Segundo Teorema de Castigliano*.

Los teoremas de Castigliano fundamentaron numerosos trabajos, generalmente restringidos a sistemas elásticos lineales, entre los que merecen especial mención los de Müller-Breslau, en Alemania, y Guidi, en Italia. La introducción del concepto de energía complementaria, primero por Crotti y más tarde por Engesser, permitió la generalización del teorema de Castigliano a sistemas no lineales, abriendo el camino para progresos significativos en la mecánica de las estructuras. Sin embargo, la aplicación y generalización de los teoremas de la energía a sistemas no lineales, se enfrentó con la dificultad de expresar los términos de trabajo real y de energía de deformación en tales sistemas.

El objetivo de fundamentar el *Análisis*

(2) Los enunciados de Castigliano para las partes 1 y 2 del teorema son las que siguen:

- Parte 1: Si el trabajo interno de una estructura articulada se expresa en función de los desplazamientos relativos de las fuerzas aplicadas en sus nudos, la expresión resultante es tal que sus coeficientes diferenciales, respecto a estos desplazamientos, dan los valores de las fuerzas correspondientes ($F_p = dW_i/dr_p$).
- Parte 2: Si, por el contrario, el trabajo interno de una estructura articulada se expresa en función de las fuerzas externas, la expresión que resulta es tal que sus coeficientes diferenciales dan los desplazamientos relativos de sus puntos de aplicación ($r_p = dW_i/dF_p$).

de Estructuras alrededor de los conceptos de trabajo y energía, encuentra, en el principio del trabajo virtual, una base idónea para su desarrollo. La aplicación del principio en los términos planteados por *Lagrange* a finales del XVIII, pero considerando el trabajo de las fuerzas interiores en el desplazamiento, proporciona un marco general al que pueden reducirse los diferentes teoremas de energía desarrollados a lo largo del siglo pasado. De este modo, el principio del trabajo virtual permite aunar, alrededor de la idea de trabajo, sistemas de fuerzas y de desplazamientos no necesariamente unidos en la realidad. Frente a la pretendida trascendencia de los principios de mínimo, el principio del trabajo virtual se constituye en una forma conveniente de expresión conjunta de las condiciones de equilibrio y compatibilidad, alrededor de la cual es posible fundamentar el *Análisis de Estructuras*, con independencia del tipo estructural o del modelo de comportamiento del material.

Si bien el trabajo que a continuación se desarrolla se centra en mostrar la eficacia de la aplicación del principio del trabajo virtual en la evaluación de los desplazamientos de las estructuras, en esta introducción es importante destacar algunas cuestiones que evidencian su capacidad para vertebrar el *Análisis de Estructuras* en su conjunto. Tal y como se justifica en apartados posteriores, el principio del trabajo virtual permite fundamentar el análisis estático y cinemático de los sistemas isostáticos. Asimismo, la formulación del trabajo virtual en términos de fuerzas virtuales o de desplazamientos virtuales, permite fundamentar las dos estrategias alternativas del análisis de estructuras hiperestáticas. Finalmente, la aplicación del principio como "formulación débil de las condiciones de equilibrio" constituye un marco idóneo al que referir los métodos de análisis aproximado mediante discretización, enlazando las técnicas más actuales de análisis de estructuras, con las ideas originales básicas de la ciencia de la Mecánica.

Todo lo antedicho justifica la importancia conceptual y docente que el principio del trabajo virtual presenta en la fundamentación y aplicación del *Análisis*

de Estructuras, situándolo en el contexto histórico del desarrollo de esta ciencia. Los apartados que siguen desarrollan, fundamentalmente, su aplicación como base general, potente y eficaz en la evaluación de las deformaciones de las estructuras.

2. EL PRINCIPIO DEL TRABAJO VIRTUAL EN LA MECANICA DE LAS ESTRUCTURAS DEFORMABLES

Como ya se ha señalado, la aplicación a estructuras deformables del principio del trabajo virtual, en los términos planteados por *Lagrange*, exige incorporar el trabajo virtual de las fuerzas interiores en la deformación.

En efecto, sea un sólido deformable (estructura) sobre el que se considera un sistema estático de fuerzas (exteriores e interiores), definido con la única condición de que el mismo verifique, en todo punto, las condiciones de equilibrio. Sea también un sistema cinemático, en principio independiente del anterior, constituido por un conjunto de desplazamientos "pequeños" y compatibles con los vínculos de la estructura. Las condiciones de equilibrio y compatibilidad impuestas obligan al cumplimiento del principio del trabajo virtual y, por tanto, exigen que el trabajo virtual desarrollado por el sistema de fuerzas bajo el sistema de desplazamientos sea nulo. Esta exigencia, separando el trabajo desarrollado en la deformación por las fuerzas exteriores e interiores, puede escribirse según:

$$\Sigma W = \Sigma W_{\text{ext}} + \Sigma W'_{\text{int}} = 0$$

donde el término ΣW_{ext} representa la suma de los trabajos desarrollados por las fuerzas exteriores y $\Sigma W'_{\text{int}}$ representa la suma de los trabajos desarrollados por las tensiones interiores que equilibran las fuerzas exteriores.

Considerando que las tensiones interiores que equilibran las fuerzas exteriores (*) son en cada punto iguales pero con signo contrario a las tensiones interiores que equivalen a tales fuerzas exteriores y a las que se denominará en adelante sim-

plemente tensiones interiores (3), la expresión anterior se transforma en:

$$\sum W_{\text{ext}} - \sum W_{\text{int}} = 0$$

o bien:

$$\sum W_{\text{ext}} = \sum W_{\text{int}}$$

La condición de compatibilidad geométrica con los vínculos de la estructura, anula el trabajo de las reacciones. Por tanto, denominando P^e a las fuerzas exteriores, u^e a los desplazamientos en sus puntos de aplicación, σ^e a las tensiones interiores, y ϵ^e a las deformaciones correspondientes, las expresiones anteriores pueden escribirse también del siguiente modo:

$$\sum (P^e \cdot u^e) - \int_V \sigma^e \cdot \epsilon^e dv = 0$$

o bien:

$$\sum (P^e \cdot u^e) = \int_V \sigma^e \cdot \epsilon^e dv$$

Lo que permite enunciar de la siguiente manera el principio del trabajo virtual en la mecánica de estructuras deformables:

Para el equilibrio de una estructura es condición necesaria y suficiente que, para todo sistema de desplazamientos compatible con los enlaces de la misma, el trabajo de las fuerzas activas exteriores sea igual al trabajo de las fuerzas interiores.

En general, σ^e representará las tensiones interiores ($\sigma_x, \sigma_y, \dots, \tau_{yz}$)^e, ϵ^e representará las deformaciones interiores ($\epsilon_x, \epsilon_y, \dots, \gamma_{yz}$)^e, calculándose el trabajo virtual interno como suma de los trabajos en los elementos dV de volumen. Sin embargo, para estructuras de barras, es posible expresar el trabajo en cada tramo, expresar el trabajo en cada tramo, ds , en función de las sollicitaciones (resultantes de tensiones interiores) N^e, V^e, M^e, T^e y de las deformaciones elementales $d\xi^e, d\lambda^e, d\Theta^e, d\phi^e$. En consecuencia, para este tipo de estructuras, la expresión del principio del trabajo virtual se particulariza según:

$$\sum (P^e \cdot u^e) - \int_s N^e \cdot d\xi^e + \int_s V^e \cdot d\lambda^e + \int_s M^e \cdot d\Theta^e + \int_s T^e \cdot d\phi^e$$

Antes de avanzar en la aplicación del principio del trabajo virtual, conviene efectuar algunas consideraciones acerca

(3) Esta reflexión es equivalente a considerar el signo negativo del trabajo de las fuerzas interiores (que se oponen a la deformación del sólido).

de su alcance, posibilidades de aplicación y limitaciones.

En primer lugar, el principio establece una relación de dependencia entre tres condiciones, de modo que cuando se verifican dos de ellas la tercera lo hace obligatoriamente. Tales condiciones son las siguientes:

1. El equilibrio del sistema de fuerzas exteriores e interiores.
2. La compatibilidad entre desplazamientos y deformaciones y con los enlaces.
3. La igualdad de los trabajos de las fuerzas exteriores e interiores.

Consecuentemente, el principio es susceptible de ser formulado tanto en términos de desplazamientos virtuales como de fuerzas virtuales, lo que potencia sus posibilidades de aplicación.

En segundo lugar, aunque ya se haya indicado, conviene resaltar la total independencia entre el sistema estático de fuerzas (sistema equilibrado^e), y el sistema cinemático de desplazamientos (sistema compatible^e). Tales sistemas no tienen otra relación que la de considerarse aplicados sobre la misma estructura. Consecuentemente, no tienen por qué estar ligados entre sí, ni por la realidad ni por ninguna otra circunstancia. Las únicas condiciones que les son exigibles para el cumplimiento del principio son, respectivamente, las de equilibrio y compatibilidad.

En tercer lugar, se debe destacar que en ningún momento de la justificación del principio interviene el carácter lineal o no, elástico o no del material constitutivo de la estructura. En consecuencia, el mismo es válido tanto para sistemas lineales o no lineales, elásticos o anelásticos. Conceptualmente, esta precisión es fundamental pues, si bien la aplicación del principio permite deducir formulaciones y métodos susceptibles también de ser obtenidos para sistemas elásticos lineales mediante la aplicación de los teoremas de energía, la validez de los desarrollos obtenidos en base al principio del trabajo virtual trasciende el campo de tales sistemas.

En cuarto y último lugar es conveniente destacar que entre las hipótesis implícitas en el concepto de desplazamiento virtual y en el desarrollo del principio, se encuentra el carácter necesariamente "pequeño" de los desplazamientos considerados, de modo que puedan admitirse, la conservación del sistema de fuerzas dentro del desplazamiento, y las condiciones de compatibilidad geométrica lineales. Ello no excluye la posibilidad de aplicar el principio del trabajo virtual en fenómenos de segundo orden, si bien, para ello, se debe proceder de manera incremental, de modo que, con suficiente aproximación, pueda admitirse la mencionada hipótesis de conservación de las fuerzas en el desplazamiento.

Las apreciaciones anteriores evidencian el alcance del principio del trabajo virtual y permiten evidenciar su potencial capacidad en la fundamentación del *Análisis de Estructuras*, eliminando la necesidad de recurrir a los múltiples teoremas de la energía formulados en la segunda mitad del pasado siglo. En este sentido, aunque la exposición detallada y rigurosa de las posibilidades de aplicación del principio en la Mecánica de las Estructuras trasciende los objetivos de este documento, resulta muy conveniente efectuar algunas consideraciones al respecto (4). Con ello se pretende situar en su contexto el problema de la utilización del principio del trabajo virtual en el cálculo de deformaciones así como resaltar las posibilidades conceptuales y docentes del principio.

—En sistemas isostáticos, estáticamente asimilables a sistemas rígidos, el principio virtual permite determinar las reacciones en los enlaces externos, así como evaluar las solicitaciones en cualquier sección.

—En sistemas deformables, tal y como se expondrá en apartados siguientes, el principio del trabajo virtual permite evaluar los movimientos en los diferentes puntos del sistema.

(4) Una exposición de diversas aplicaciones del principio del trabajo virtual en el *Análisis de Estructuras* puede seguirse en los textos clásicos de Belluzzi (Ref. 2) y Timoshenko y Gere (Ref. 3).

—En sistemas hiperestáticos, la expresión del principio en términos de fuerzas virtuales o de desplazamientos virtuales, permite fundamentar cada una de las dos estrategias alternativas de análisis de estructuras hiperestáticas, conocidas como método de compatibilidad o de las fuerzas, y método de equilibrio o de los desplazamientos.

—Finalmente, el principio del trabajo virtual presenta una considerable utilidad combinado con técnicas para la solución de problemas de mecánica de estructuras mediante aproximación, las cuales se han visto enormemente potenciadas por el desarrollo de herramientas informáticas y métodos numéricos. En este sentido, la aplicación del principio como lo que en términos matemáticos se denominaría "formulación débil de las condiciones de equilibrio", se convierte en una base ideal sobre la que fundamentar los métodos de análisis aproximado mediante discretización, permitiendo formular, con la precisión deseada, las condiciones de equilibrio y compatibilidad, dentro de cada parcela de la estructura discretizada.

3. APLICACION DEL PRINCIPIO DEL TRABAJO VIRTUAL EN LA EVALUACION DE LAS DEFORMACIONES DE LAS ESTRUCTURAS

La aplicación del principio del trabajo virtual permite desarrollar un procedimiento general, potente y eficaz, para determinar desplazamientos en estructuras. El método, comúnmente conocido como método de la carga unidad (Refs. 2 y 3), se fundamenta en considerar, sobre la estructura que se va a analizar los siguientes dos sistemas:

—Un sistema constituido por el conjunto de parámetros cinemáticos que definen los desplazamientos y deformaciones de la estructura bajo las cargas (reales) para las que se estudia la estructura. Por su propia naturaleza, este sistema cinemático es un *sistema compatible con los enlaces y congruente con la constitución de la estructura*, por lo que, en lo que sigue, se le denominará *sistema com-*

patible, y se le caracterizará por el superíndice^c. Despreciando efectos de segundo orden, el carácter “pequeño” de los desplazamientos permite asumir la hipótesis de la “conservación” de las fuerzas dentro de ellos.

—Un sistema estático, definido por una única acción, ficticia o virtual, de módulo unidad, y un conjunto de reacciones y tensiones interiores (o esfuerzos resultantes), definidos con la *única exigencia de que se verifiquen las condiciones de equilibrio*. La fuerza virtual unidad debe *corresponderse*, en naturaleza, sentido y punto de aplicación, con el desplazamiento que se desea evaluar. En lo que sigue, a este sistema estático se le denominará *sistema equilibrado*, y se le caracterizará por el superíndice^c.

La satisfacción de las condiciones de equilibrio y compatibilidad de los sistemas cinemático (real) y equilibrado (virtual), obliga al cumplimiento del principio del trabajo virtual. De este modo, siendo u el desplazamiento que desea evaluarse, puede escribirse:

$$\sum W_{\text{ext}} = 1 \cdot u = \sum W_{\text{int}}$$

En consecuencia, el desplazamiento en un punto cualquiera de la estructura puede evaluarse a partir del trabajo desarrollado por las fuerzas (resultantes de tensiones) interiores de un sistema equilibrado con una única acción virtual unidad, cuya naturaleza, sentido y punto de aplicación se corresponden con el desplazamiento a evaluar.

La estrategia de la *carga ficticia unidad*, tiene su origen en los trabajos ya citados de *Maxwell*, de 1864, relativos a sistemas articulados, elásticos, lineales, redescubiertos diez años más tarde por *Mohr* y que dieron lugar al llamado método de *Maxwell-Mohr*. Sin embargo, la aplicación de la mencionada estrategia, en combinación con el principio del trabajo virtual, permite desarrollar un método mucho más general, no sujeto a la restricción del material elástico lineal.

En todo caso, en aras de aclarar cierta confusión histórica que ha enturbiado la generalidad y las posibilidades de aplicación del principio del trabajo virtual para

el cálculo de deformaciones (método de la carga unidad), antes de profundizar el desarrollo del tema, resultan oportunas las siguientes apreciaciones:

—Tal y como se justificará a lo largo de la exposición, el método de la carga unidad es apropiado para la determinación de todo tipo de desplazamientos en sentido generalizado: flechas, movimientos, giros, movimientos relativos, giros relativos, etc.

—El método de la carga unidad es independiente del origen o causa de la deformación analizada. Consecuentemente, implementando modelos de comportamiento apropiados, es válido tanto para evaluar deformaciones debidas a acciones directas (cargas) o indirectas (temperatura, retracción, etc.).

—El método del trabajo virtual o de la carga unidad es aplicable en estructuras constituidas por todo tipo de materiales, elásticos o no, lineales o no.

—El método de la carga unidad es aplicable a todo tipo de estructuras, isostáticas e hiperestáticas, si bien exige expresar las deformaciones elementales en cada punto de la estructura que, lógicamente, implica la “resolución” previa de la misma.

—La única restricción de mención en la aplicación del método del trabajo virtual, viene dada por la condición de que los desplazamientos sean suficientemente “pequeños” como para poder admitir la conservación de las fuerzas dentro de los mismos. Por ello, su aplicación en problemas de segundo orden exige el tratamiento incremental de los mismos.

Centrando el problema en las estructuras de barras, la expresión general del método del trabajo virtual o de la carga unidad puede concretarse según:

$$u = \int_L N^c \cdot d\xi^c + \int_L V^c \cdot d\lambda^c + \\ + \int_L M^c \cdot d\theta^c + \int_L T^c \cdot d\phi^c +$$

donde cada una de las integrales representa, respectivamente, la contribución a la deformación de los esfuerzos axiales, los esfuerzos cortantes, los momentos flectores y los momentos torsores (**figura 1**).

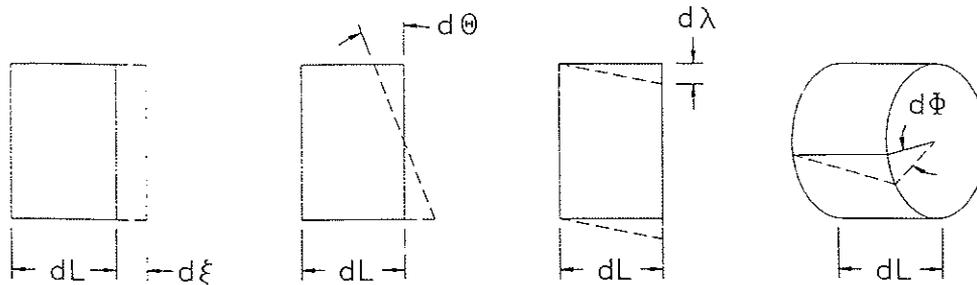


Fig. 1. Deformaciones en un elemento de barra

Pese a la generalidad del método y su validez con independencia del origen de la deformación y del modelo de comportamiento del material, merece especial comentario su aplicación cuando la deformación tiene su origen en acciones estáticas, el material sigue la ley de *Hooke* y la estructura se comporta linealmente. En tales condiciones, de acuerdo con las formulaciones usuales de la *Resistencia de Materiales*, las deformaciones en el elemento de barra se expresan fácilmente según:

$$d\xi^c = \frac{N^c}{EA} dL \quad d\lambda^c = \frac{\chi V^c}{GA} dL$$

$$d\theta^c = \frac{M^c}{EI} dL \quad d\phi^c = \frac{T^c}{GJ} dL$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación general del método de la carga unidad, en las condiciones antedichas, se tiene:

$$u = \int_L \frac{N^c N^c}{EA} dL + \int_L \frac{\chi V^c V^c}{GA} dL + \\ + \int_L \frac{M^c M^c}{EI} dL + \int_L \frac{T^c T^c}{GI} dL$$

La naturaleza de cada problema, exigirá considerar unos u otros términos, o permitirá prescindir de algunos de ellos en función de la precisión deseada. Así, en estructuras de nudos articulados, con cargas aplicadas en los mismos (más propiamente con deformación longitudinal constante en cada barra), la expresión general del método de la carga unidad se reduce a:

$$u = \sum (N^c \cdot \Delta L^c)$$

De donde se deduce el siguiente proce-

dimiento general para calcular los movimientos en los nudos de tales estructuras, independientemente del origen de las deformaciones o del modelo de comportamiento del material.

1. Considérese una fuerza virtual, de módulo unidad, aplicada en el nudo correspondiente con la dirección y sentido del desplazamiento que se desea evaluar.

2. Determínese un sistema de reacciones y esfuerzos en las barras, con la *única condición* de que se encuentren en equilibrio con la acción virtual considerada.

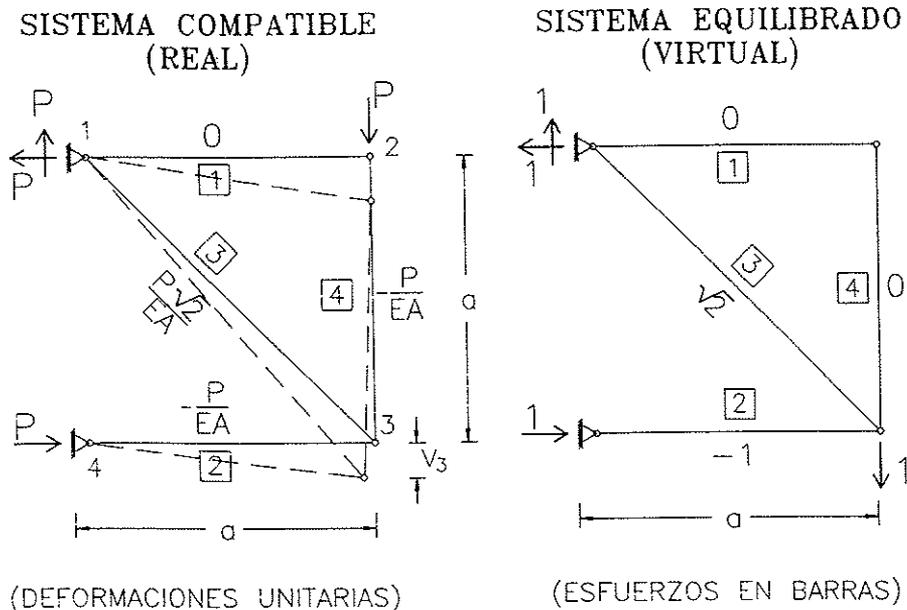
3. Exprésense los alargamientos o acortamientos reales, de acuerdo con la naturaleza de su origen y las características de la estructura y el material.

4. Calcúlese el trabajo virtual de las fuerzas interiores, como suma, extendida a todas las barras, de los productos de los esfuerzos virtuales por los alargamientos correspondientes. Dicha suma coincide con el desplazamiento buscado.

Para sistemas articulados, elásticos, lineales, con deformaciones debidas a acciones directas aplicadas en sus nudos (**figura 2**), el procedimiento anterior se simplifica, al poder expresar el trabajo interior a partir de los esfuerzos en las barras correspondientes a los sistemas equilibrado (virtual) y compatible (real).

$$u = \sum \frac{N^c N^c L}{EA}$$

Como se ha subrayado, el método de la carga unidad permite evaluar deformaciones independientemente de su origen. Así, considerando una estructura de nudos articulados afectada por una



$$1 \cdot V_3^c = \sum (N^e \Delta L^c) = 3Pa/EA$$

Fig. 2. Estructura articulada cargada en nudos

variación de temperatura, el movimiento de cualquiera de sus nudos podrá obtenerse combinando el procedimiento general descrito, con una expresión apropiada del alargamiento o acortamiento de las barras en función de la correspondiente variación de temperatura ΔT . Admitiendo un comportamiento lineal del material en este sentido (5), se tiene:

$$\Delta L = \alpha L \Delta T$$

y convenientemente elegido el sistema virtual equilibrado, el movimiento de cada nudo podrá evaluarse de acuerdo con el siguiente sumatorio, extendido a todas las barras de la estructura:

$$u = \sum (N^e \Delta L) = \sum (N^e \alpha L \Delta T)$$

que, cuando todas las barras son del mismo material y se ven sometidas a la misma variación térmica (figura 3), se simplifica según:

$$u = \alpha \Delta T \sum (N^e L)$$

siendo α el coeficiente de dilatación térmica del material.

(5) Se subraya nuevamente la validez del procedimiento para relaciones cualesquiera entre deformaciones y variación de temperatura.

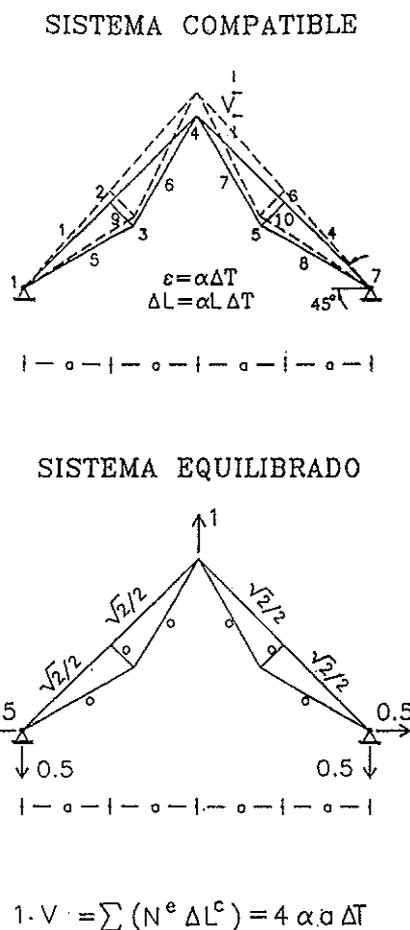
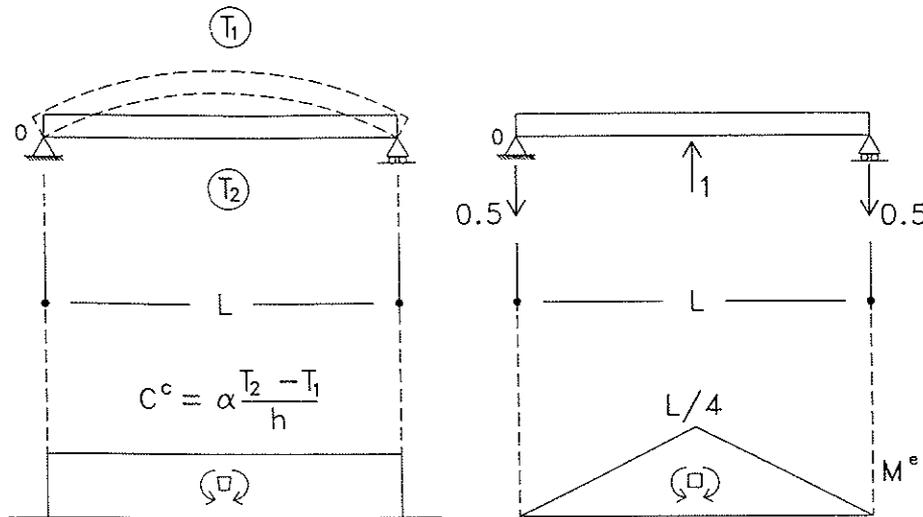


Fig. 3. Estructura articulada bajo incremento uniforme de temperatura

SISTEMA COMPATIBLE

SISTEMA EQUILIBRADO



$$1^e v^c = \int_0^L M^e C^c dL = \int_0^{L/2} M^e C^c dL + \int_{L/2}^L M^e C^c dL = \alpha \frac{T_2 - T_1}{h} \frac{L^2}{8}$$

Fig. 4. Gradiente de temperatura en viga

Las posibilidades de aplicación teórica y práctica del principio del trabajo virtual en el cálculo de deformaciones, no se circunscriben al ámbito de las estructuras de nudos articulados. Así, dentro del ámbito de las deformaciones debidas a efectos térmicos, el método de la carga unidad permite determinar los movimientos de una estructura, por ejemplo, como consecuencia de la existencia de un gradiente de temperatura entre las fibras extremas de todas o parte de sus barras (6). Para ello, considerando una variación lineal de la temperatura en el canto h de la sección, comprendida entre los valores T_1 (fibra superior) y T_2 (fibra inferior), y un material con proporcionalidad entre alargamientos unitarios y variaciones de temperatura, la rotación en cada sección vendrá dada según:

$$d\theta = \frac{\alpha (T_2 - T_1)}{h} dL$$

(6) Este gradiente térmico puede ser adicional a un incremento de temperatura en toda la sección (medido en su baricentro), cuyo efecto podría igualmente evaluarse de acuerdo con los criterios generales expuestos.

Con lo que (figura 4), eligiendo apropiadamente el sistema virtual equilibrado (e), los movimientos de la estructura de este origen se podrán expresar a partir de:

$$u = \int_L \frac{M^e \alpha (T_2 - T_1)}{h} dL$$

En determinadas estructuras y bajo ciertas condiciones de carga, las deformaciones por flexión resultan claramente predominantes. Tal es el caso, por ejemplo, de la mayor parte de las vigas y pórticos de edificación. En estas circunstancias, la expresión general para estructuras de barras del método de la carga unidad, puede simplificarse, sin grave error, según:

$$u = \int_L M^e d\theta$$

Que, para material elástico lineal se transforma en:

$$u = \int_L \frac{M^e M^c}{EI} dL$$

En determinados casos, dividiendo convenientemente, a efectos de integración, cada elemento, es posible la

integración exacta de las expresiones resultantes. De este modo, es posible deducir las expresiones más usuales de flechas y giros en vigas "tipo", que figuran en la mayor parte de los textos de Resistencia de Materiales.

El método de la carga unidad permite, utilizando la misma fundamentación, evaluar la deformación por cortante. Para ello, basta aplicar la expresión:

$$u = \int_L V d\lambda$$

incorporando una formulación adecuada de la deformación elemental por cortante, coherente con las características del material y la sección. Para material

elástico lineal, de acuerdo con la teoría de Resistencia de Materiales, ello equivale a transformar la anterior expresión, hasta llegar a:

$$u = \int_L \frac{\chi V^c V^e}{GA} dL$$

El ejemplo de la **figura 5**, permite apreciar cómo, en base al mismo método de la carga unidad, se puede calcular, mediante integración exacta, la componente de flecha debida al cortante en una ménsula de sección constante y material elástico lineal. Un procedimiento análogo puede seguirse para evaluar deformaciones por torsión.

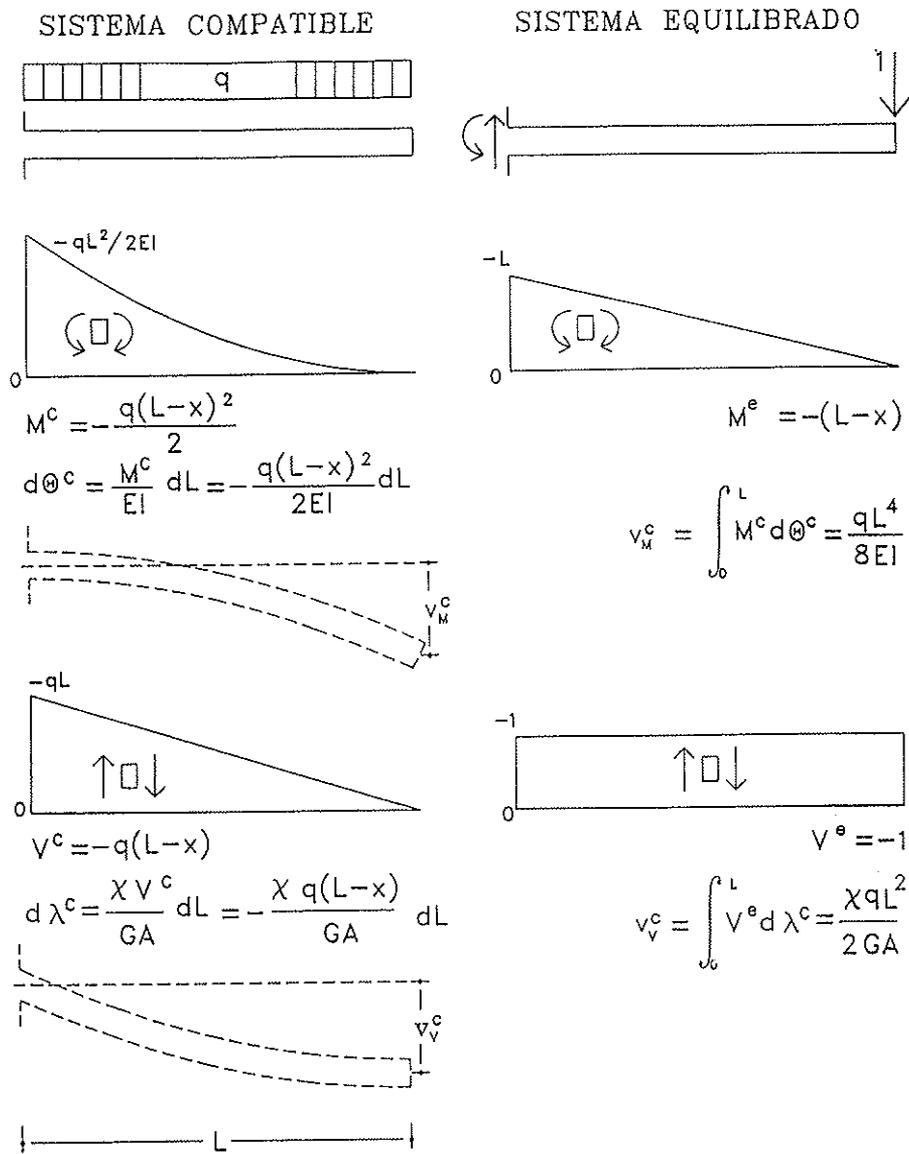


Fig. 5. Ménsula de sección constante

4. CALCULO DE DEFORMACIONES MEDIANTE INTEGRACION NUMERICA APROXIMADA

En el apartado anterior se ha puesto de manifiesto cómo la aplicación del método de la carga unidad permite evaluar deformaciones mediante integración exacta. En términos docentes es de destacar cómo con un solo fundamento, el principio del trabajo virtual, y con una única sistemática, el método de la carga unidad, es posible deducir las expresiones fundamentales de la deformación de estructuras y piezas simples, debidas a esfuerzos axiales, momentos flectores, esfuerzos cortantes, momentos torsores o acciones indirectas.

Sin embargo, bajo ciertas condiciones de sollicitación, variación de sección, o comportamiento del material, la integración exacta de las expresiones resultantes de aplicar el método de la carga unidad no resulta operativa en la práctica. En tales circunstancias, resulta particularmente eficaz la implementación de técnicas de integración numérica apropiadas (7), suficientemente establecidas, documentadas y experimentadas (Refs. 4 y 5). La práctica totalidad de estas técnicas se fundamentan en la aproximación polinómica del integrando a partir de su evaluación en un determinado número de puntos:

$$\int_{x_0}^{x_n} y dx \approx \sum_{i=0}^n c_i y(x_i)$$

La precisión, en cada caso, depende tanto del número de puntos de integración como del criterio de selección de los mismos. Así, las técnicas basadas en el *método de Newton-Cotes* permiten integrar exactamente polinomios de grado igual o inferior a n , empleando $n + 1$ puntos de integración cuyas abscisas (x_i) pueden ser elegidas libremente (por ejemplo adoptando puntos equidistantes). Por su

(7) La eficacia de la combinación del principio del trabajo virtual con técnicas de integración numéricas, trasciende su aplicación en el cálculo de deformaciones y permite fundamentar los modernos métodos de análisis de estructuras, alrededor de ideas clásicas en el desarrollo histórico de la Mecánica.

parte, las técnicas basadas en la *cuadratura de Gauss*, utilizando los mismos $n + 1$ puntos de integración pero con abscisas pre-establecidas (a separaciones no iguales), permite la integración exacta de polinomios de grado igual o inferior a $(2n + 1)$.

Dadas las características del problema, unas u otras técnicas resultan muy eficaces, incluso con aproximaciones basadas en polinomios de grado reducido. Así, con una mínima estrategia de discretización, una técnica elemental y de fácil aplicación como es la *Regla de Simpson*, que particulariza el *método de Newton-Cotes* utilizando 3 puntos de integración equidistantes en cada intervalo, proporciona resultados extremadamente precisos en la práctica totalidad de los problemas analizados (8). Frente a las técnicas basadas en la *cuadratura de Gauss* (que proporcionarían igual precisión con sólo dos puntos de integración por intervalo), la *Regla de Simpson* permite utilizar puntos de integración en los que el integrando es fácilmente evaluable, lo que facilita notablemente su aplicación mediante procedimientos "manuales".

Aplicando la *Regla de Simpson*, la integral definida de una función, $y = f(x)$, en el intervalo (x_0, x_n) , dividido a su vez en un número par, n , de subintervalos iguales, de amplitud h , $(x_0, x_1), (x_1, x_2), (x_2, x_3) \dots (x_{n-1}, x_n)$ puede expresarse según (figura 6):

$$\int_{x_0}^{x_n} y dx \approx \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \dots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$$

La utilización de la *Regla de Simpson* (o de otras técnicas apropiadas), permite evaluar, aproximadamente, los movimientos de una estructura computando los esfuerzos del sistema equilibrado (virtual) y las deformaciones correspondientes del sistema compatible (real), en un número suficiente de puntos. La estrategia de discretización depende, en cada

(8) En consecuencia con lo dicho anteriormente, la Regla de Simpson resulta exacta para la integración de polinomios de grado igual o inferior a tres, lo que presenta especial incidencia, dadas las características de las aplicaciones consideradas en este trabajo.

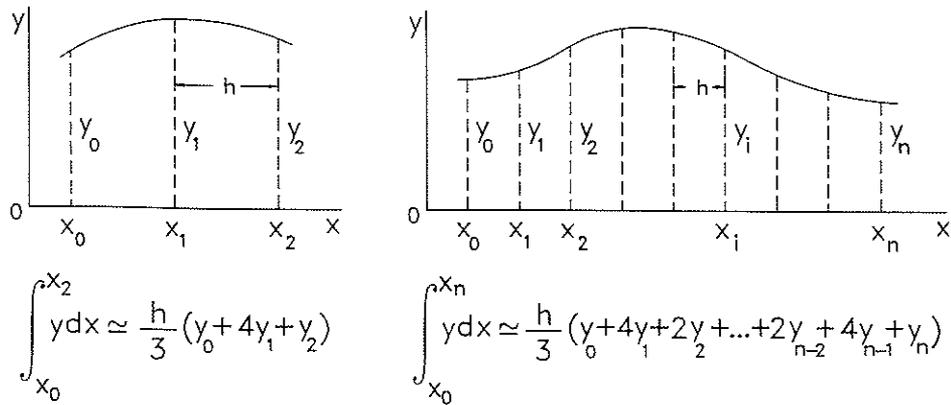


Fig. 6. Fórmula de Simpson

caso, de las características de la estructura, del origen de la deformación (condiciones de carga), y del movimiento buscado. En todo caso, utilizando la Regla de Simpson, debe tenerse en cuenta que la misma es exacta con sólo dos subintervalos, si el integrando es un polinomio de hasta tercer grado (9).

La aplicación del método de la carga unidad, combinado con integración aproximada en cuatro subintervalos mediante la fórmula de Simpson, permite deducir las siguientes expresiones de la flecha en el centro del vano y los giros en los extremos, correspondientes a una viga con deformación exclusivamente por flexión:

$$v_2 \approx \frac{C_1^c + C_2^c + C_3^c}{24} L^2$$

$$\varphi_0 \approx \frac{C_0^c + 3C_1^c + C_2^c + C_3^c}{12} L$$

$$\varphi_4 \approx \frac{C_1^c + C_2^c + 3C_3^c + C_4^c}{12} L$$

donde L es la luz del vano, y cada tér-

(9) Si la ley de curvaturas en cada mitad del vano es continua y puede definirse con un polinomio de grado igual o inferior a dos (por ejemplo ley de momentos definida por sendas parábolas en cada mitad de vano, material elástico lineal, e inercia constante), el resultado calculado para la flecha en el centro es exacto. En las mismas condiciones, si la ley de curvaturas es polinómica, de grado igual o inferior a dos, y continua en el vano (por ejemplo con ley de momentos parabólica, material elástico lineal e inercia constante), la fórmula de Simpson proporcionaría un resultado exacto del giro, con sólo dos intervalos.

mino C_i^c representa la curvatura del sistema compatible (real) en el punto i . Para material elástico lineal, estas curvaturas se expresan en función de los momentos reales según $C_i^c = M_i^c/EI$, lo que, con sección constante, permite transformar las anteriores expresiones en las siguientes:

$$v_2 \approx \frac{M_1^c + M_2^c + M_3^c}{24 EI} L^2$$

$$\varphi_0 \approx \frac{M_0^c + 3M_1^c + M_2^c + M_3^c}{12 EI} L$$

$$\varphi_4 \approx \frac{M_1^c + M_2^c + 3M_3^c + M_4^c}{12 EI} L$$

Alternativamente a la fórmula de Simpson, pueden aplicarse otras técnicas de integración numérica apropiadas. Un interés particular para el cálculo de flechas, presenta la aproximación mediante interpolación hermítica de la integral correspondiente, a partir de los valores del integrando y su derivada en los extremos y en el centro del vano. Para ello, si se considera un intervalo i - j , la aproximación del integrando a un polinomio de tercer grado a partir de los valores del mismo y de su derivada en los puntos extremos (caracterizados por los subíndices i y j), conduce a la siguiente expresión:

$$\int_i^j y dx \approx \frac{y_i + y_j}{2} \Delta x + \frac{y_i - y_j}{12} \Delta x^2$$

siendo y_i, y_j, y'_i e y'_j los valores del integrando y su derivada en los extremos de

intervalo, y Δx la amplitud de éste.

Considerando ahora un intervalo 0-2, de amplitud L , subdividido en dos (sub) intervalos iguales, $a \equiv 0-1$ y $b \equiv 1-2$, de amplitud $L/2$ (figura 7), la anterior estrategia permite expresar, de modo aproximado, la integral definida de una fun-

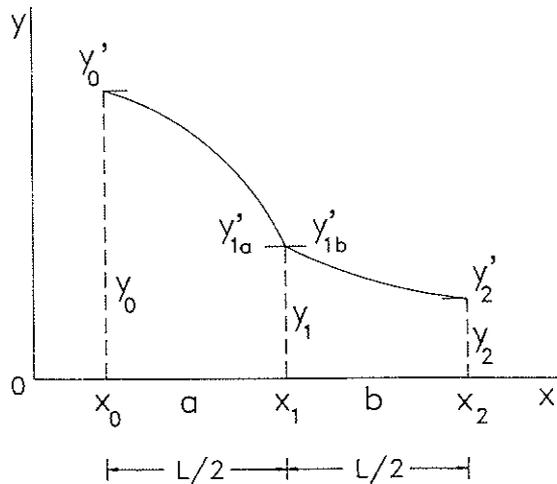


Fig. 7.

ción, $y = y(x)$, en dicho intervalo, a partir de los valores de dicha función y de su derivada en los extremos (0 y 2) y en el centro (1):

$$\int_0^2 y \, dx = \int_0^1 y \, dx + \int_1^2 y \, dx \approx \frac{y_0 + 2y_1 + y_2}{4} L + \frac{y_0' - y_1a' + y_1b' - y_2'}{48} L^2$$

aproximación que, obviamente, resulta exacta si el integrando, en cada subintervalo, viene dado por un polinomio de grado igual o inferior a 3.

En el problema correspondiente a determinar la flecha en el centro del vano, considerando la hipótesis de *material elástico-lineal*, el integrando será:

$$y = C^e M^e = \frac{M^e M^e}{EI}$$

mientras que *con sección constante, además de material elástico lineal*, su derivada viene dada según:

$$y' = \frac{-1}{EI} (V^e M^e + M^e V^e)$$

todo lo cual permite aproximar la flecha buscada, a partir de la expresión:

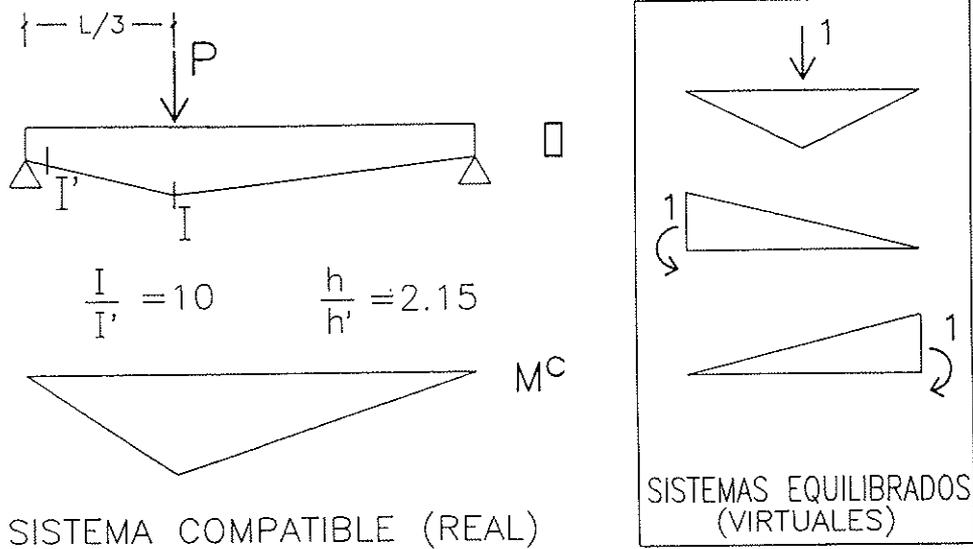
$$1 \cdot v = \int_0^L C^e M^e \, dx \approx \frac{M_0^e + 10 M_1^e + M_2^e}{96 EI} L^2 + \frac{(V_{1a}^e - V_{1b}^e)}{198 EI} L^3$$

en la que el primer sumando constituye el término principal de la expresión de la flecha en función de los momentos en los extremos y en el centro, mientras el segundo sumando corrige al anterior apreciando la posible discontinuidad de la ley de cortantes en la zona central, como consecuencia de la entrada en dicha zona de una carga concentrada P_1 . En consecuencia, sustituyendo en este último sumando la diferencia de cortantes a derecha e izquierda del punto central, por la correspondiente carga P_1 en el centro (zona central), la expresión anterior puede transformarse, hasta llegar a la que se denominará, en lo que resta de trabajo, *aproximación de los tres momentos*:

$$1 \cdot v = \int_0^L C^e M^e \, dx \approx \frac{M_0^e + 10 M_1^e + M_2^e}{96 EI} L^2 - \frac{P_1}{198 EI} L^3$$

La utilización conjunta del método de la carga unidad y técnicas simples de integración numérica aproximada (regla de Simpson, etc.) proporciona resultados muy satisfactorios en el cálculo de flechas y giros en vigas. Para material elástico lineal, la precisión es considerable adoptando discretizaciones en cuatro o, a lo sumo, ocho subintervalos, tanto para inercia constante como variable, e incluso en casos particularmente mal condicionados, con cargas concentradas o cambios de sección en puntos distintos de los de discretización. Tal es el caso del ejemplo que se expone en la figura 8, y que permite destacar la eficacia del procedimiento en la evaluación de movimientos en vigas de inercia variable.

La aplicación del principio del trabajo virtual, combinado con técnicas de integración numérica aproximada en los términos anteriores, permite indirectamente determinar, con facilidad y suficiente precisión, reacciones redundantes en



RESULTADOS FLECHA EN EL CENTRO			($\times P L^3 / E I$)
P.T.V.	800 intervalos	-3.2112E-02	(solucion 'exacta')
P.T.V.	4 intervalos	-3.3184E-02	(Error = 3.34 %)
P.T.V.	8 intervalos	-3.2247E-02	(Error = 0.42 %)
P.T.V.	16 intervalos	-3.2132E-02	(Error = 0.06 %)

RESULTADOS GIRO EXTREMO IZQUIERDO			($\times P L^2 / E I$)
P.T.V.	800 intervalos	-1.2222E-01	(solucion 'exacta')
P.T.V.	4 intervalos	-1.0913E-01	(Error = -10.71 %)
P.T.V.	8 intervalos	-1.2021E-01	(Error = -1.65 %)
P.T.V.	16 intervalos	-1.2200E-01	(Error = -1.18 %)

RESULTADOS GIRO EXTREMO DERECHO			($\times P L^2 / E I$)
P.T.V.	800 intervalos	1.1716E-01	(solucion 'exacta')
P.T.V.	4 intervalos	1.1358E-01	(Error = -3.06 %)
P.T.V.	8 intervalos	1.1684E-01	(Error = -0.27 %)
P.T.V.	16 intervalos	1.1716E-01	(Error = -0.00 %)

Fig. 8.

vigas hiperestáticas de sección constante o variable. En este sentido, el tratamiento de casos efectuado ha permitido comprobar la eficacia y capacidad del método, incluso para discretizaciones en cuatro subintervalos iguales, no coincidentes con los cambios de geometría. Se debe, no obstante, observar que, en el caso de vigas acarteladas en sus extremos, la aplicación de técnicas de integración numéricas exige adoptar discretizaciones más afinadas, de modo que existan puntos

significativos en las zonas acarteladas, siendo también posible adoptar discretizaciones más finas (subintervalos menores) en las zonas acarteladas (10).

(10) La consideración de intervalos de diferente amplitud a lo largo de la barra exige, obviamente, aplicar por tramos la fórmula de Simpson antes expuesta. Sin embargo, se debe destacar que la utilización de subintervalos de diferente amplitud, implica la apreciación con diferente precisión de la contribución de cada parte de la viga, lo que no siempre mejora la precisión en la solución global del problema.

En definitiva, el estudio efectuado confirma la generalidad, potencia, eficacia y facilidad de aplicación, proporcionada por la combinación del principio del trabajo virtual (método de la carga unidad) con técnicas de integración numérica aproximada, en el análisis de sistemas lineales. En base a ello, es posible afrontar una enorme variedad de problemas, tanto "manualmente" como con ayuda de herramientas informáticas de diferente capacidad, desde pequeñas calculadoras programables hasta ordenadores potentes. En los apartados que siguen se estudia la capacidad de esta misma sistemática para determinar los movimientos en estructuras de hormigón armado, en las cuales el propio comportamiento mecánico del material, y especialmente los fenómenos de fisuración, fluencia y retracción, determinan un comportamiento fuertemente no lineal en las mismas, incluso bajo cargas de servicio.

5. CRITERIOS BASICOS PARA EL CALCULO DE DEFORMACIONES EN PIEZAS FLECTADAS DE HORMIGON ARMADO

El comportamiento mecánico de piezas flectadas de hormigón armado, presenta aspectos diferenciales cuya consideración resulta esencial para el cálculo de deformaciones en las mismas. Tal comportamiento aparece descrito en numerosas publicaciones, siendo posible adoptar, como marco de referencia general, el *Boletín del C.E.B.* relativo a *Fisuración y Deformaciones* (Ref. 6), la obra de Favre y otros (Ref. 7) o, entre las publicaciones españolas, la monografía del Instituto Eduardo Torroja de *Baleriola y otros* (Ref. 8). Con un tratamiento y alcance diferentes, el problema de la deformación en elementos de hormigón armado ha sido, asimismo, analizado por el autor, en dos artículos desarrollados en colaboración (Refs. 9, 10).

La exposición que sigue se centra en el estudio de la deformación en condiciones de servicio, y se limita al caso usual de que las deformaciones de flexión predominen sobre las de cortante, adoptándose, en consecuencia, la curvatura C

como parámetro deformativo característico a nivel sección:

$$C = \frac{1}{R} \approx \frac{d\theta}{dx} \approx \frac{d^2v}{dx^2}$$

siendo r el radio de curvatura, θ la función de giros, y la función de flechas, y asumiéndose $|\theta| \ll 1$.

No obstante, en condiciones especiales que requieran la consideración de la deformación de cortante, ésta puede ser introducida, sin gran dificultad, en el modelo de análisis, tal y como se ha justificado anteriormente.

De acuerdo con la naturaleza del trabajo que se presenta, se supone conocido el diagrama de flectores de la pieza cuya deformación quiere evaluarse. No se entra así en la determinación de redistribuciones de momentos hiperestáticos, aspecto que trasciende del nivel de análisis de sección y pieza aquí considerado.

En cualquier caso, el cálculo de deformaciones en piezas de hormigón debe representar, con precisión adecuada, una serie de fenómenos y aspectos. En particular, siempre que se prevea alcanzar la fisuración en el elemento analizado, el considerable efecto de este fenómeno sobre la deformabilidad de la pieza debe ser evaluado de modo riguroso, incluyendo la colaboración del hormigón entre fisuras, así como los niveles de fisuración como consecuencia de cargas previas. Otra consideración importante debe efectuarse en relación al carácter de piezas de sección variable que, como consecuencia del despiece de armadura y del efecto de la fisuración, presentan la mayor parte de los elementos flectados de hormigón armado. Adicionalmente, existen otros aspectos esenciales que se deben considerar, entre los que, de acuerdo con el *Eurocódigo EC-2* (Ref. 11), cabe destacar los siguientes:

—Evaluación rigurosa de las relaciones tenso-deformacionales del hormigón, en función de sus características, edad e historia previa.

—Fluencia y retracción.

—Tipo de carga, y velocidad y tiempo de aplicación de la misma.

—Influencia de las acciones indirectas (temperatura).

El fenómeno de fisuración presenta una considerable incidencia sobre la deformabilidad de piezas flectadas de hormigón armado. En la situación previa a la fisuración (Estado I), antes de alcanzarse la resistencia a tracción del hormigón en algún punto de la estructura, hormigón y acero trabajan elástica y conjuntamente en compresión y tracción. En esta situación, para las cuantías usuales de armado en vigas de edificación, el efecto del armado es poco relevante, pudiéndose calcular la respuesta deformativa, a partir de las constantes correspondientes a la sección "bruta" de hormigón. Evidentemente, en aquellos casos en los que la cuantía de armado sea considerable, la precisión de cálculo puede mejorarse incorporando su contribución mediante el empleo de las constantes correspondientes a la sección homogeneizada.

En consecuencia, admitiendo la hipótesis de deformación plana, la curvatura en el estado I (no fisurado) para cargas instantáneas, C_1 , puede determinarse a partir de la expresión:

$$C_1 = \frac{1}{r_1} = \frac{M}{E_c \cdot I_1} \approx \frac{M}{E_c \cdot I_b}$$

siendo:

● M el momento flector que solicita la sección.

● $E_c \cdot I_1$ la rigidez a flexión de la sección de hormigón, considerada sin fisurar y homogeneizando a hormigón las áreas de armadura, con el coeficiente de equivalencia n .

● $n = E_s/E_c$ donde E_s es el módulo de elasticidad del acero y E_c el módulo de deformación (tangente) del hormigón, para cargas instantáneas, que corresponde a su edad.

Una vez alcanzada en algún punto la resistencia a tracción del hormigón, se inicia el proceso de fisuración (Estado II), formándose fisuras discretamente repartidas, entre las cuales el hormigón toma tensiones de tracción, rigidizando la res-

puesta global de la pieza. La separación disminuye conforme se incrementa el nivel de sollicitación, estabilizándose el proceso cuando la separación impide que, por adherencia, se transfieran al hormigón tracciones que superen la resistencia a tracción de este material. Incluso en esta situación límite, existe cierta colaboración del hormigón entre fisuras, que contribuye a la rigidez global de la pieza.

Así pues, en el Estado II de *fisuración discretamente repartida*, coexisten secciones en las que el hormigón desarrolla tensiones de tracción, siempre inferiores a su resistencia de este signo, con secciones completamente fisuradas, sin contribución alguna a tracción del hormigón. En condiciones de servicio, para las cuales es posible admitir sin error considerable la proporcionalidad entre tensiones y deformaciones en las fibras de hormigón, la curvatura de una sección completamente fisurada bajo flexión instantánea (Estado II_o), puede evaluarse mediante la expresión:

$$C_{IIo} = \frac{M}{E_c \cdot I_{IIo}}$$

siendo $E_c \cdot I_{IIo}$ la rigidez a flexión de la sección completamente fisurada (despreciando la zona de hormigón traccionado) y homogeneizando el área de armadura a hormigón, de acuerdo con el módulo de deformación E_c que corresponda.

El cálculo del momento de inercia I_{IIo} (método "clásico") puede seguirse en el artículo de *Leonhardt* (Ref. 12) o en la obra de *Jiménez Montoya, García Mesequer y Morán Cabré* (Ref. 13) entre muchas otras. Por otra parte, aunque dicho cálculo no implica ninguna dificultad especial, ya que tal magnitud se determina mediante fórmulas explícitas susceptibles de ser programadas en calculadoras convencionales de bolsillo, se han desarrollado diversos métodos tendentes a facilitar el cálculo de las curvaturas en estado fisurado, mediante el uso de tablas y ábacos, eludiendo así el cálculo de I_{IIo} .

La coexistencia, dentro del Estado II, de secciones plenamente fisuradas con secciones intermedias en las que el hormigón desarrolla tensiones de tracción

(siempre inferiores a su resistencia de este signo), determina un régimen de comportamiento macroscópico no lineal, intermedio entre los estados I y II_o. En términos de curvaturas, el comportamiento zonal de la pieza puede describirse, apropiadamente, mediante una curvatura Media, $C_{II} \approx 1/r_{II}$, que se determina a partir de C_I y C_{IIo} de la forma:

$$C_{II} = (1 - \zeta) \cdot C_I + \zeta \cdot C_{IIo}$$

donde el "coeficiente de interpolación", ζ , para una sección dada, varía en el intervalo $0 \leq \zeta \leq 1$ en función de la sollicitación actuante (evidentemente, $\zeta = 0$ para estados no fisurados).

La fórmula de interpolación antedicha procede, originalmente, de una propuesta de *Branson* (Ref. 14) que ha ido experimentando sucesivos refinamientos. Actualmente, se adoptan coeficientes de interpolación del tipo:

$$\zeta = 1 - f(\beta_1 \cdot \beta_2, \frac{\sigma_{sr}}{\sigma_s})$$

donde:

- β_1 y β_2 son coeficientes función, respectivamente, del tipo de armadura (lisa o corrugada) y del tipo de sollicitación actuante (instantánea, repetitiva o permanente).

- σ_s es la tensión máxima alcanzada en la armadura a lo largo del proceso de carga que, obviamente, para carga monótona creciente coincide con la existente para la sollicitación de servicio considerada.

- σ_{sr} es un valor teórico de referencia, correspondiente a la tensión en la armadura para el instante de iniciarse la fisuración de la sección.

Para estados de flexión pura, el cociente σ_s/σ_{sr} de la expresión precedente, puede sustituirse por M/M_r , siendo M el momento máximo actuante en la sección a lo largo del proceso de carga, que para carga monótona creciente coincide con el momento que solicita la sección, y M_r el momento de fisuración de la misma.

Los criterios anteriormente señalados en relación con la evaluación del fenómeno de fisuración sobre el comportamiento deformativo de piezas flectadas de hormigón son enteramente asumidos en el *Eurocódigo EC-2* (Ref. 11), que establece la siguiente expresión para el coeficiente de interpolación ζ

$$\zeta = 1 - \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \left(\frac{M_r}{M}\right)^2$$

donde β_1 considera la adherencia de la armadura, tomando un valor de 0,5 para barras lisas y de 1,0 para barras corrugadas; y β_2 depende de la naturaleza de la carga, tomando un valor de 0,5 para cargas enteramente repetitivas o de larga duración, de 1,0 para carga monótona, y admitiéndose valores intermedios cuando coexisten cargas de diferente duración.

La formulación propuesta en la vigente *Instrucción EH-91* (Ref. 15) en relación con el efecto de la fisuración sobre la deformación de vigas de hormigón, tomada del *Código ACI 318-83* (Ref. 16), concuerda sustancialmente con los criterios hasta ahora señalados. Sin embargo, existen ciertas diferencias formales y conceptuales que merecen destacarse. En primer lugar, las formulaciones más recientes, incluyendo el Eurocódigo, plantean la interpolación sobre parámetros cinemáticos (curvaturas, giros, flechas), al contrario que la Instrucción, que lo hace sobre valores estáticos de sección (inercia). Además, el Eurocódigo y otras formulaciones consideran, a través de los coeficientes β_1 y β_2 , la interrelación entre la fisuración y la duración y/o repetitividad de las sollicitaciones, y la adherencia hormigón-acero. Estos aspectos son ignorados en la fórmula original de *Branson*, incorporada en *EH-88* y *EH-91*, que proporciona un momento de inercia equivalente, en base a la interpolación siguiente, cuya nomenclatura coincide con la hasta ahora indicada:

$$I_{II} = (1 - \zeta) \cdot I_I + \zeta \cdot I_{IIo} \neq I_I$$

siendo:

$$\zeta = 1 - \left(\frac{M_r}{M}\right)^3 \neq 0$$

A pesar de las diferencias comentadas, de acuerdo con los estudios desarrollados al respecto por el autor (Refs. 9, 10), la aplicación práctica de uno u otro coeficiente en vigas convencionales de edificación, proporciona resultados sensiblemente concordantes.

La evaluación de deformaciones correspondientes a cargas sostenidas, incorporando el efecto de los fenómenos de fluencia y retracción, es considerada de modo bien diferente en diversas normas y referencias. Algunas de ellas, como la publicación de Yu y Winter (Ref. 17), la norma americana ACI 318-83 (Ref. 16) o la Instrucción EH-91 (Ref. 15), optan por modelizaciones excesivamente simplificadas, basadas en calcular la componente diferida de flecha debida a fluencia y retracción, en base a multiplicar la flecha instantánea por un factor empírico λ , sobre el que hacen recaer toda la enorme variedad de fuentes de dispersión del problema.

Un procedimiento más riguroso y más generalmente admitido para evaluar el efecto de la fluencia en la deformación frente a solicitaciones sostenidas, consiste en la simplificación de operar con un módulo de deformación efectivo del hormigón, de valor:

$$E_{ct} = \frac{E_{c0}}{1 + \varphi_t}$$

donde φ_t es el coeficiente de fluencia correspondiente al instante t , para el que existen en la literatura y la normativa diversas formulaciones, algunas de ellas considerablemente refinadas.

Aplicando este módulo de deformación efectivo del hormigón, el coeficiente de equivalencia, n , se modifica, resultando $n_t = n \cdot (1 + \varphi_t)$.

Evidentemente, para la situación previa a la fisuración (Estado I), esta simplificación resulta suficientemente precisa ya que, salvo consideración del efecto generalmente limitado de la armadura, la tensión en cada fibra de hormigón se mantiene constante en el tiempo.

En fase fisurada (Estado II), el procedimiento señalado es tan sólo aproxima-

mado, por lo que para un tratamiento más perfeccionado de la fluencia del hormigón se recurre, en ocasiones, a factores correctores del coeficiente φ_t . Con ellos, se introducen efectos tales como la variación del módulo de deformación E_c con la edad y/o el carácter, variable en el tiempo, del estado tensional de cada fibra de hormigón. En este sentido, puede citarse el método A.A.A.E.M. (*Algebraic Age Adjusted Effective Modulus*) de Bazant (Ref. 18) y Chiorino (Ref. 19) que introduce los efectos mencionados, a partir de la corrección del coeficiente de fluencia φ , mediante un factor χ (*aging coefficient*) que varía típicamente entre 0,6 y 0,9. Salvo estudio especial, 0,8 suele considerarse un valor apropiado para dicho coeficiente. Con mayor rigor, ambos efectos pueden introducirse mediante una ecuación constitutiva apropiada del material y el recurso a técnicas bien establecidas para la integración en el tiempo de la respuesta estructural. Pero este tipo de modelización es obviamente prohibitiva para cálculos repetitivos y sistemáticos, y la mejora de precisión que proporciona no justifica su alto coste para este tipo de cálculos.

En relación con el efecto de la retracción sobre la deformación de piezas flectadas, es preciso observar que, en el estado fisurado, incluso para vigas de sección doblemente simétrica, desaparece toda simetría de comportamiento en el plano de la sección, ya que este fenómeno produce, no sólo acortamientos axiales sino también curvaturas adicionales, C_{cs} . Estas curvaturas generan términos adicionales de flecha, v_{cs} , que en la mayor parte de modelos son totalmente independientes del nivel de sollicitación exterior, excepto en lo que respecta a la extensión de las zonas fisuradas.

Según Leonhardt (Ref. 12) y Johnson (Ref. 20), la curvatura debida a retracción en el Estado II₀ de completa fisuración, puede determinarse según:

$$C_s = \pm \frac{|\epsilon_{cs}|}{d}$$

La misma expresión aparece también recogida por el C.E.B. (Ref. 6), aunque

afectada por un coeficiente corrector K_{cs} . Una formulación algo más ajustada se propone en el *Eurocódigo EC-2 (Ref. 11)*, en el cual se considera ϵ_{cs} como un valor medio en la zona de hormigón no fisurado, que supone se produce en el baricentro del bloque de compresiones. De acuerdo con ello, la curvatura por retracción en las zonas fisuradas se obtiene, en cada sección, dividiendo la deformación unitaria por retracción, ϵ_{cs} , por el brazo mecánico correspondiente, de acuerdo con la estimación:

$$C_{cs} = \pm \epsilon_{cs} \frac{S_{II}}{I_{II}}$$

en la que, a través de los términos I_{II} y S_{II} , la curvatura por retracción varía en función de las cuantías de armado y del nivel de sollicitación.

En las modelizaciones anteriormente descritas para evaluar el efecto de los fenómenos de fisuración, fluencia y retracción sobre la deformación de piezas flectadas de hormigón, intervienen algunas características mecánicas de este material, particularmente su resistencia a (flexotracción), f_{ct} , y su módulo de deformación longitudinal, E_c . Ambos parámetros se encuentran formulados en la literatura y las normativas. Para cargas instantáneas, tanto el *Eurocódigo EC-2* como la *Instrucción EH-91*, o el *Código ACI 318-83*, determinan tales parámetros a partir de la resistencia característica a compresión. Las formulaciones propuestas son formalmente diferentes, si bien la aplicación de unas u otras conduce a resultados razonablemente concordantes para los hormigones usuales en edificación.

6. APLICACION DEL PRINCIPIO DEL TRABAJO VIRTUAL AL CALCULO DE DEFORMACIONES EN ESTRUCTURAS DE HORMIGON

A raíz de la controversia suscitada por el artículo 45 de la *Instrucción EH-88*, modificado en la edición de 1991, el cálculo de deformaciones en estructuras flectadas de hormigón armado se ha convertido en nuestro país, en un tema de gran actualidad, objeto de frecuente dis-

cusión. En el apartado precedente, se han establecido sumariamente las bases fundamentales de la deformación de piezas flectadas de hormigón. En base a ellas, es posible definir relaciones momento-curvatura en secciones de hormigón armado (o pretensado), tanto para cargas instantáneas como sostenidas, con consideración (cuando proceda) de los efectos derivados de los fenómenos de fisuración, fluencia y retracción.

A partir de tales relaciones, un método riguroso para evaluar flechas en vigas, es el llamado *método de integración de curvaturas*, preconizado por el *Eurocódigo EC-2 (Ref. 11)*, y consistente en computar curvaturas en secciones suficientemente próximas, para proceder después a su (doble) integración. Este método reviste cierta dificultad para ser aplicado mediante procedimientos "manuales" o con la ayuda de herramientas informáticas de pequeña capacidad (calculadoras programables); por lo que tanto en la literatura como en diferentes normativas aparecen descritos procedimientos alternativos de carácter simplificado. Una parte considerable de los mismos, entre los que se encuentran los propuestos para flechas instantáneas en los códigos *ACI 318-83 (Ref. 16)* y *EH-91 (Ref. 15)*, se basan en estimar, a partir de las inercias efectivas de las secciones determinantes de la pieza, una inercia efectiva media en la misma, con la que aplicar las fórmulas tradicionales de la resistencia de materiales para sección constante y material elástico-lineal.

Frente a estos procedimientos, la aplicación del principio del trabajo virtual (método de la carga unidad), combinado con técnicas de integración numérica aproximada apropiadas, permite desarrollar un método general, potente y eficaz, para evaluar de modo realista y riguroso las deformaciones en estructuras de hormigón, con un coste de cálculo muy proporcionado.

Como se viene señalando desde el inicio del trabajo, el principio del trabajo virtual, y por tanto el método de la carga unidad, son válidos con independencia del modelo de comportamiento del material. En consecuencia, los fundamentos

para la aplicación del método de la carga unidad con integración numérica aproximada en vigas de hormigón son sustancialmente los mismos que se han expuesto para vigas de material elástico lineal, si bien utilizando relaciones momento-curvatura apropiadas.

Resumiendo los contenidos del apartado anterior, y admitiendo una relación cuasi-lineal entre tensiones y deformaciones en el hormigón, como corresponde a condiciones de servicio, la curvatura de cada sección puede expresarse, explícitamente, en función del momento actuante, de la geometría de la sección y de las características de los materiales.

Para ello, debe distinguirse entre las zonas en las que no se ha producido la fisuración (Estado I) y aquéllas en las que el hormigón ha alcanzado en algún punto su resistencia a tracción y, consecuentemente, se ha fisurado (Estado II). En las primeras (*Estado I: $M^c < M_r$*), para cargas de servicio, la curvatura de cada sección puede determinarse, con suficiente precisión, admitiendo comportamiento elástico lineal en el hormigón. La curvatura se determina entonces según la expresión general:

$$C_I = \frac{M^c}{EI_1} \quad \text{siendo } M^c < M_r$$

Por su parte, en condiciones de fisuración (*Estado II: $M^c \geq M_r$*), la curvatura de la sección puede estimarse según:

$$C_{II} = \frac{M^c}{E_{ct} [(1-\zeta) I_1 + \zeta I_{II0}]} \pm \frac{\epsilon_{cs}}{z}$$

siendo el significado de los diferentes términos utilizados en las expresiones anteriores el siguiente:

— M^c es el momento flector actuante en el corte considerado en el sistema compatible (real).

— M_r es el momento de fisuración de la sección.

— $E_{ct,ef}$ es el módulo de deformación efectivo del hormigón que corresponda, el cual, siendo E_o el módulo de deformación instantánea del hormigón, χ el coeficiente de envejecimiento (*aging coefficient*) que, salvo estimación más precisa, puede

adoptarse $\chi = 0,8$, y ϕ el coeficiente de fluencia correspondiente al instante de aplicación y duración de la carga, podrá determinarse como $E_{ct,ef} = E_c / (1 + \chi \cdot \psi)$.

— $I_1 = I_h$ es la inercia de la sección para el *Estado I* (no fisurado), evaluada para el coeficiente de equivalencia correspondiente al módulo de deformación efectivo calculado, $n = E_s / E_{ct,ef}$ (11).

— I_{II0} es la inercia fisurada equivalente correspondiente al *Estado II* (completamente fisurado), igualmente evaluada para el coeficiente de equivalencia correspondiente al módulo de deformación efectivo del hormigón antes calculado, $n = E_s / E_{ct,ef}$.

— ζ es el parámetro de interpolación entre los estados no fisurado y completamente fisurado, para el cual ya se han expuesto en el apartado anterior las formulaciones más usuales en la literatura.

— ϵ_{cs} es la deformación unitaria por retracción.

— z es el brazo mecánico de la sección considerada, con signo igual al del momento actuante, que simplificada puede suponerse $z \approx 0,9 \cdot d$, y que con mayor exactitud puede obtenerse a partir de la expresión que sigue, en la que S_I y S_{II0} son los momentos estáticos de las secciones no fisurada y completamente fisurada:

$$z = \frac{(1 - \zeta) I_1 + \zeta I_{II0}}{(1 - \zeta) S_I + \zeta S_{II0}}$$

Así, una vez discretizada convenientemente la viga o la estructura, el método de la carga unidad, mediante integración numérica aproximada, se aplica en vigas de hormigón análogamente a en vigas de material elástico lineal, con la salvedad de que las curvaturas en los puntos de integración se evalúan según el procedimiento anteriormente descrito. En términos docentes, esto presenta una extraordinaria importancia, ya que permite unificar los conceptos y los métodos que

(11) En vigas de edificación, con cuantías medias de armado, la inercia correspondiente al estado no fisurado puede aproximarse a la inercia bruta de la sección de hormigón, I_h , lo que evita el cálculo de la sección homogeneizada, I_h .

se aplican para el cálculo de deformaciones en estructuras, con independencia del material, origen de la deformación, o geometría.

Pese al carácter de inercia variable que generalmente presentan las vigas de hormigón y a la no linealidad de las relaciones momento-curvatura, la aplicación de la fórmula de Simpson, con discretización en un número reducido de intervalos, proporciona resultados considerablemente precisos. Ello permite obtener expresiones aproximadas muy simplificadas y por tanto susceptibles de ser aplicadas por procedimientos "manuales". En concreto, la utilización de la fórmula de Simpson, con cuatro intervalos iguales, para el cálculo de la flecha en el centro del vano, viene dada por la siguiente expresión, ya propuesta anteriormente:

$$v_2 \approx \frac{C_1^c + C_2^c + C_3^c}{24} L^2$$

donde C_1^c y C_3^c son las curvaturas en los cuartos de la luz, y C_2^c es la curvatura en el centro del vano, todas ellas calculadas con los criterios antes resumidos.

La aplicación del procedimiento propuesto, con discretización en ocho intervalos, proporciona resultados que pueden calificarse de exactos, máxime si se considera la indeterminación existente en los datos del problema. Tal discretización resulta probablemente idónea para su aplicación con calculadoras programables e incluso para su implementación en programas generales de cálculo y dimensionamiento de estructuras de hormigón armado.

El ejemplo de la figura 9, presenta el cálculo de la flecha en el centro de una viga isostática, de hormigón, con armado constante, mediante la aplicación del método de la carga unidad, con integración numérica aproximada por Simpson en cuatro intervalos. En él puede apreciarse la eficacia y facilidad de aplicación del método y compararse los resultados para diferentes discretizaciones.

Bajo ciertas condiciones, la *aproximación de los tres momentos*, anteriormente justificada para material elástico lineal y sección constante, es susceptible de ser transformada y aplicada en el cálculo aproximado de flechas en vigas de hor-

migón armado. Ello permite evitar la evaluación de las curvaturas C_1^c y C_3^c en los cuartos de la luz, aproximándose la flecha en el centro, a partir del módulo de deformación efectivo del hormigón $E_{ct, ef}$, los valores estáticos de la sección central del vano, I_1 , I_{110} , y los momentos en los extremos izquierdo M_i y derecho M_d y el vano M_v . En concreto, si, como generalmente sucede en las vigas de edificación, se verifican las siguientes condiciones:

—la sección "bruta" o envolvente es constante a lo largo del vano,

—no hay *errores muy graves* en el armado longitudinal de la pieza (12),

resulta suficientemente preciso adoptar, como inercia efectiva de la pieza, la de la sección central del vano, con lo que la flecha en el centro del vano v_v , excluida la deformación por retracción, puede expresarse según:

$$v_v \approx \frac{M_i + 10 M_v + M_d}{96 E_{ct, ef} [(1 - \zeta) I_1 + \zeta I_{110}]} L^2$$

donde el término $[(1 - \zeta) \cdot I_1 + \zeta \cdot I_{110}]$ representa, precisamente, la inercia efectiva en el centro del vano, que se generaliza a toda la pieza, y donde los momentos M_i , M_v y M_d son, respectivamente, los momentos flectores en el extremo izquierdo, centro de vano y extremo derecho (con su signo correspondiente).

Cuando se considere relevante, el término adicional de flecha por retracción puede evaluarse de acuerdo con la siguiente expresión:

$$v_{cs} = \frac{\epsilon_{cs}}{0,9 d} \frac{(1 - 2\alpha^2)}{8} L^2$$

siendo α un coeficiente adimensional que, si la ley de momentos es predominantemente parabólica y tiene su máximo en el centro, puede determinarse en función de los momentos flectores en los extremos M_i , M_d y en el centro del vano M_v (cada uno con su signo correspondiente) según:

(12) La fórmula que se propone se ha ensayado, satisfactoriamente, disponiendo sobre los apoyos en continuidad áreas de armadura del orden del 50% de las necesarias por cálculo. Con errores superiores, incluso bajo condiciones de servicio, sería cuestionable la propia ley de momentos "dato".

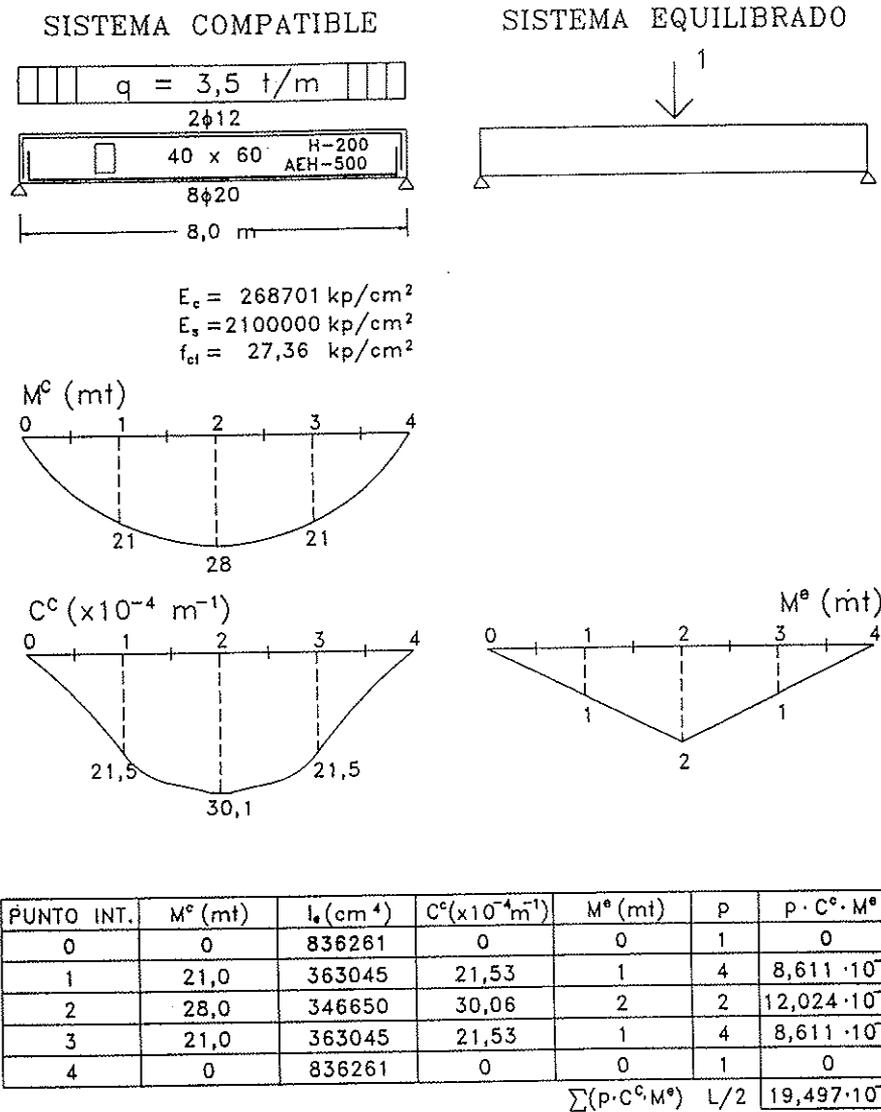


Fig. 9. Cálculo flecha instantánea en viga de hormigón

$$\alpha = 1 - \sqrt{\frac{M_v}{M_v - \frac{M_1 + M_d}{2}}}$$

El ejemplo de la **figura 10** está tomado de la citada Monografía de *Alvarez Bale-riola* y otros (Ref. 8), en la que se utiliza para comparar resultados correspondientes a diversos métodos de la literatura. Como puede apreciarse en el cuadro que más adelante se incluye, los resultados obtenidos por aplicación del método de la carga unidad, con integración numérica aproximada, son muy satisfactorios. Destaca, igualmente, la precisión que proporciona la *aproximación de los tres*

momentos propuesta, con un coste de cálculo mínimo.

La metodología propuesta ha sido aplicada al conjunto de las seis vigas que se exponen en la **figura 11**. Se trata de vigas que podrían calificarse como usuales en edificación, con diferentes condiciones de extremo, y dimensionadas de acuerdo con diferentes criterios. Como puede apreciarse, son vigas de luz media (5,5 m), sometidas a la acción de una carga uniformemente repartida, de 3,5 t/m, que corresponde a la acción de una banda de 5 m de forjado tipo de vivienda, de 700 kp/m² de carga total, de los cuales 500 kp/m² se consideran actuando permanentemente y 200 kp/m² se suponen

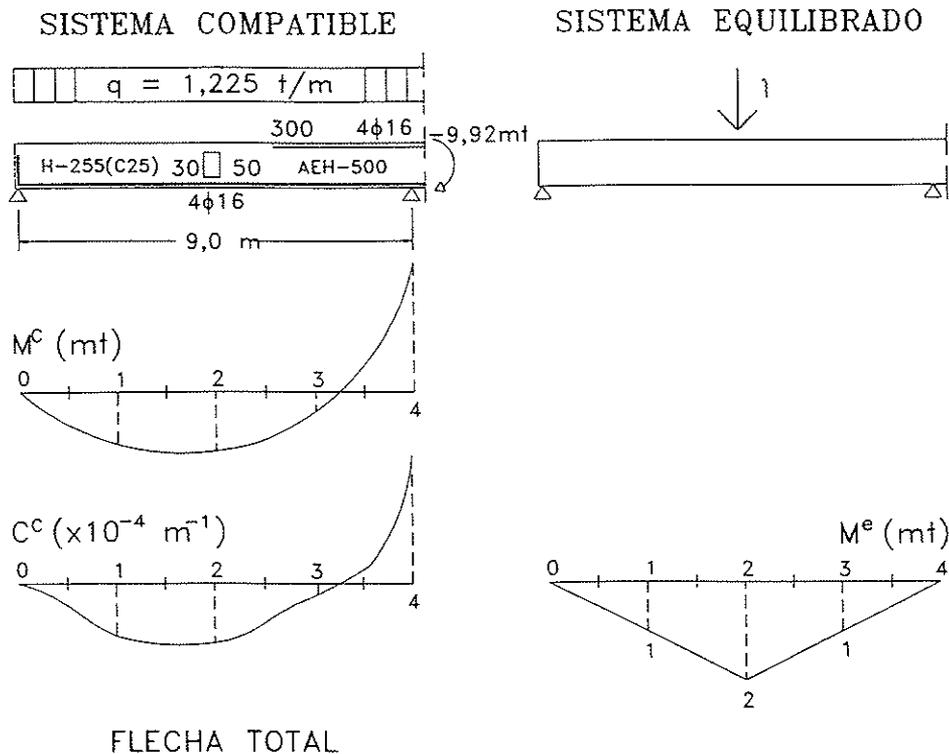


Fig. 10. Comparación de resultados

sobrecarga de actuación instantánea. A efectos de evaluar la flecha activa en tales vigas, se supone que se tabica a los 3 meses del hormigonado, cuando sólo actúa sobre la viga la fracción de carga correspondiente al peso propio del forjado (300 kp/m^2). Los materiales estructurales considerados son usuales en edificación (hormigón H-200 y acero AEH-500). La sección envolvente es rectangular y constante en su longitud, determinándose de modo que, para el máximo momento de diseño, la viga se encuentre en situación límite en cuanto a necesidad de armadura de compresión. El despique de armaduras se realiza con criterios relativamente usuales en edificación y aplicando, en todo caso, la vigente EH-91, con coeficientes medios de seguridad.

Como se observa, tres de los ejemplos corresponden a soluciones de vigas "de canto", para las siguientes condiciones de extremo: viga biapoyada, con continuidad en un extremo, y con continuidad en ambos extremos. Los otros tres ejemplos, por su parte, corresponden a soluciones de vigas "planas", de canto igual al de un forjado medio de edificación (26 cm), para las mismas condiciones de extremo.

Para cada uno de los ejemplos tratados, se ha evaluado la flecha en el centro del vano aplicando el método de la carga unidad, con integración numérica aproximada (regla de Simpson) considerando cuatro posibles discretizaciones, en 4, 8 ó 16 intervalos. También para cada ejemplo, se ha evaluado la flecha en el centro del vano utilizando la fórmula aproximada de los tres momentos propuesta. Asimismo, para cada ejemplo se ha evaluado, igualmente, la flecha mediante doble integración de curvaturas, de acuerdo con el método preconizado por el Eurocódigo EC-2. Este resultado se ha adoptado como patrón o solución exacta del problema, a la hora de establecer el error de las diferentes aproximaciones consideradas. Con independencia de que para cada caso analizado se ha evaluado de modo independiente la deformación debida a acciones instantáneas, permanentes y de retracción, el siguiente cuadro recoge, a modo de resumen, los errores absolutos medios y máximos, en la flecha instantánea, flecha total (instantánea y diferida, incluso retracción) y flecha activa, correspondientes al tratamiento de casos efectuado. Los errores corres-

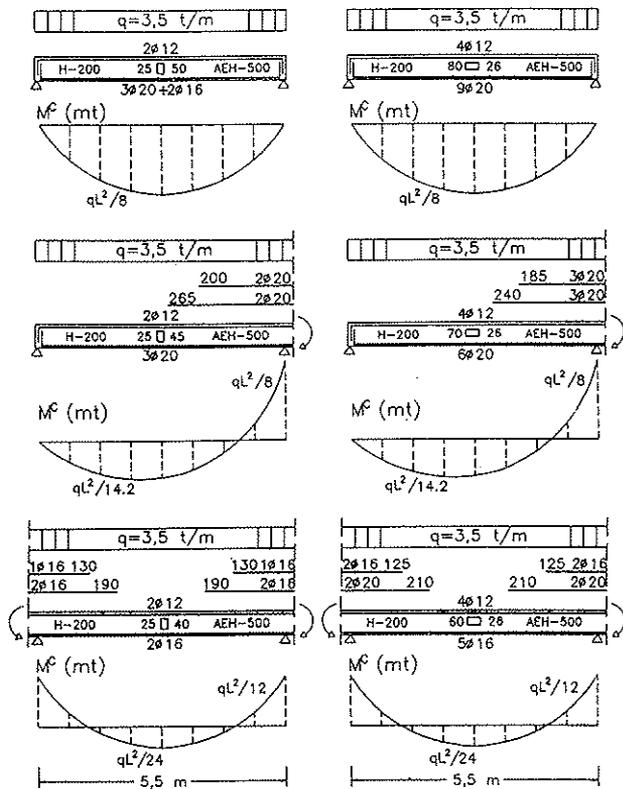


Fig. 11. Aplicaciones a vigas de edificación.

pendientes a las componentes de flecha debidas a cargas instantáneas, permanentes o de retracción, coinciden cualitativamente con los resultados adjuntos.

afinadas. Esta conclusión resulta aún más evidente si se considera la indeterminación inherente a la hora de fijar datos fundamentales del problema (características mecánicas y reológicas del hormigón, edades de carga, etc.). Destaca, igualmente, la precisión que, con un coste de cálculo mínimo y posibilidad de aplicación "manual" inmediata, proporciona la *aproximación de los tres momentos*, propuesta.

7. RESUMEN DE CONCLUSIONES

1.—El Principio de los Trabajos Virtuales, incorporando en la formulación de *Lagrange* el trabajo de las fuerzas interiores en la deformación, proporciona una expresión conjunta, enormemente conveniente, de las condiciones de equilibrio y compatibilidad en que se basa el *Análisis de Estructuras*.

2.—El Principio de los Trabajos Virtuales permite fundamentar, con carácter general, los aspectos esenciales del análisis estático y cinemático de estructuras isostáticas e hiperestáticas, con independencia de las características del material, la naturaleza de las acciones o el tipo

Método de cálculo y discretización	Flecha instantánea		Flecha total		Flecha activa	
	Error máximo %	Error medio %	Error máximo %	Error medio %	Error máximo %	Error medio %
Fórmula 3 Momentos	13,9	6,1	6,0	2,0	12,7	8,2
P.T.V. 4 intervalos	8,0	3,6	15,6	6,8	18,4	9,4
P.T.V. 8 intervalos	7,3	4,3	2,6	1,4	3,0	1,9
P.T.V. 16 intervalos	4,0	2,3	4,3	2,0	3,0	1,3

Este cuadro resumen, así como la observación de resultados obtenidos para los casos analizados, permiten concluir que la aplicación del método de la carga unidad, con integración numérica aproximada, mediante la regla de Simpson, proporciona resultados muy satisfactorios, incluso con discretizaciones poco

estructural. Asimismo, la aplicación del principio como formulación débil de las condiciones de equilibrio, constituye un marco idóneo al que referir los modernos métodos de análisis aproximado de estructuras mediante discretización, conciliando ideas clásicas en el desarrollo de la Mecánica, con las más actuales técni-

cas. Todo lo antedicho confiere al Principio del Trabajo Virtual un extraordinario interés conceptual, susceptible de ser aplicado en la docencia de las materias de *Cálculo de Estructuras*.

3.—La aplicación del Principio del Trabajo Virtual mediante el llamado *Método de la Carga Unidad*, permite definir un procedimiento único, pero extremadamente general, para el cálculo de deformaciones en estructuras. De acuerdo con las bases del Principio, tal procedimiento es válido independientemente de las características de los materiales constitutivos, de la naturaleza de las acciones que originan la deformación o del tipo estructural considerado.

4.—La aplicación conjunta del Principio del Trabajo Virtual (método de la carga unidad) con técnicas apropiadas de integración numérica aproximada, permite desarrollar métodos de cálculo de deformaciones que aúnan la generalidad del principio con una extraordinaria potencia y eficacia. Con una mínima estrategia de discretización, una técnica elemental, como es la llamada *Regla de Simpson*, resulta especialmente adecuada tanto en términos docentes como de precisión, permitiendo abordar y resolver, satisfactoriamente, infinidad de problemas de alcance práctico.

5.—La combinación del Principio del Trabajo Virtual, con la regla de integración numérica aproximada de Simpson, se muestra extraordinariamente eficaz para el cálculo de deformaciones en estructuras de hormigón, permitiendo considerar, apropiadamente, el efecto de los fenómenos de fisuración, fluencia, retracción y armado variable, que le son característicos. De este modo, es posible definir procedimientos y expresiones notablemente precisos, para la evaluación de flechas en vigas de hormigón, aplicando fundamentos y técnicas de carácter general.

8. REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

1. TIMOSHENKO S.P., History of the strength of materials, McGraw-Hill, New York, 1953.

2. BELLUZZI O., Ciencia de la construcción, Editorial Aguilar, Madrid, 1967.

3. TIMOSHENKO S.P., GERE J.M., Mecánica de materiales, U.T.E.H.A., México, 1974.

4. PUIG ADAM P., Cálculo integral, Biblioteca Matemática Rey Pastor y Puig Adam, Madrid, 1959.

5. BATHE K.J., WILSON E.L., "Numerical Methods in Finite Element Analysis". Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1976.

6. COMITE EURO-INTERNACIONAL DU BETON, "Fissuration et déformations", C.E.B. Bull, nº 143, Lausanne, Dec. 1981.

7. FAVRE R., KOPRNA M., RADOJICIC A., "Effets différés, fissuration et déformations des structures en béton". Ed. Georgi Saint Saphorin. Lausanne, 1980.

8. ALVAREZ BALERIOLA J.I., BAQUEDANO F., GUTIERREZ J.P., RECUERO A., "Fisuración y cálculo de flechas en estructuras de hormigón armado".

9. ORTIZ HERRERA J., DEL RIO BUENO, A., "Estudio crítico del cálculo de flechas en vigas de hormigón armado según la instrucción EH-88", Hormigón y Acero, nº 173, Madrid, 1989.

10. DEL RIO BUENO A., ORTIZ HERRERA J., "Método simplificado para el cálculo de flechas en vigas de hormigón armado adaptado al Eurocódigo EC-2".

11. EUROCODIGO EC-2, PART 1, "Design of Concrete Structures. Part 1, General Rules for Buildings".

12. LEONHARDT, F. "Anfangliche und nachtragliche Durchbiegungen von Stahlbetonbalken im Zustand II, Vorschläge für Brengrenzungen und vereinfachte Nachweise", Beton und Stahlbeton, Vol. 54, 1959.

13. JIMENEZ MONTOYA, P., GARCIA MESEGUER A., MORAN CABRE F., "Hormigón armado", Ed. Gustavo Gili, Barcelona, 1974.

14. BRANSON D.E., "Design procedures for Computing Deflections", A.C.I. Journal, Vol. 65, 1968.

15. COMISION PERMANENTE DEL HORMIGON, "Instrucción para el proyecto y la ejecución de obras de hormigón en masa o armado EH-91", Ministerio de Obras Públicas y Transportes, 1991.

16. AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. A.C.I. 318-83, "Building Code Requirements for Reinforced Concrete", A.C.I. Manual of Concrete Practice, Part 3, 1989.

17. YU W.W., WINTER G., "Instantaneous and Long-Time Deflections of Reinforced Concrete Beams under Working Loads", A.C.I. Journal, Vol. 57, nº 1, 1960.

18. BAZANT Z.P. "Prediction of Concrete Creep Effects using Age-Adjusted Effective Modulus Method", A.C.I. Journal, Vol. 69, 1972.

19. CHIORINO M.A. ed., "Structural Effects of Time Dependent Behavior of Concrete", C.E.B. Manual nº 142/142 bis, Georgi Pub. Co. Switzerland, 1984.

20. JOHNSON A.I. "Deformations of Reinforced Concrete", I.A.B.S.E. Public., Vol. 11, Zurich, Switzerland, 1951.

RESUMEN

La aplicación de los conceptos de trabajo y energía en la formulación de las condiciones de equilibrio o del movimiento es una idea antigua, que ha influido considerablemente en el desarrollo de la Mecánica y, consecuentemente, del Cálculo de Estructuras. Dentro de esta idea, el Principio del Trabajo Virtual, formulado en términos de fuerzas o desplazamientos virtuales, constituye una forma enormemente apropiada de expresar, conjuntamente, las condiciones de equilibrio y compatibilidad que fundamentan el análisis de estructuras.

En este trabajo, previa revisión del desarrollo histórico del principio y de su capacidad conceptual en la fundamentación de los principales aspectos del análisis de estructuras, se desarrolla especifi-

camente su aplicación al estudio de la deformación de las estructuras. La combinación del principio del trabajo virtual (método de la carga unidad) con técnicas de integración numérica apropiadas, permite definir un método de cálculo de deformaciones extremadamente general, potente y eficaz. De acuerdo con este carácter general, inherente a las hipótesis del principio del trabajo virtual, este método puede ser eficazmente aplicado para el cálculo de flechas en vigas de hormigón, pudiendo contemplar los efectos derivados de la no linealidad del material, armado variable, fisuración, colaboración del hormigón entre fisuras, fluencia y retracción.

SUMMARY

Application of work and energy concepts and theorems in the study of equilibrium or movement conditions is an old idea, with considerable influence on the development of Mechanics and Structural Analysis. Principle of virtual work, formulated in terms of virtual forces or virtual displacements, represents an appropriate expression of equilibrium and compatibility requirements, foundation of Structural Analysis.

This work, after reviewing the historic development of the principle of virtual work and its capability to base main topics of Structural Analysis, deepen into its application to the evaluation of the deformation of structures. The combination of the principle of virtual work (unit load method) with appropriate numerical integration techniques, provides an extremely general, efficient and powerful method to evaluate structures deformations. According to the generality of the assumptions of principle, this method allows to estimate accurately deflections of reinforced concrete beams, including the effects of non linear behavior of concrete, variable reinforcement, cracking, tension stiffening, creep and shrinkage.

Análisis de placas sometidas a deformaciones impuestas, empleando una formulación de elementos finitos mixtos

Luis M. Bozzo

Ph. D., Ingeniero Civil. Investigador del CSIC (ICMAB)

Juan Murcia

Dr. Ingeniero de Caminos. Profesor de Investigación del CISC (ICMAB)

Ambos actualmente en el Dpto. de Ingeniería de la Construcción (ETSICCP Barcelona), UPC

INTRODUCCION

Entre las estructuras que trabajan básicamente a flexión, las losas poseen una muy amplia utilización y, sin embargo, son en general bastante menos conocidas que las estructuras lineales formadas, entre otros, por elementos tipo viga. Sus leyes fundamentales se basan, como siempre, en el equilibrio, la compatibilidad geométrica y las características tenso-deformacionales del material. Las condiciones de equilibrio, al integrar tensiones a lo largo de la dimensión menor (canto o espesor) de la losa, pueden ponerse en función de esfuerzos, como en las vigas, en cada una de las dos dimensiones restantes (por unidad de longitud de la otra). Asimismo, al suponer deformación plana a lo largo de la dimensión menor, las de compatibilidad pueden establecerse en función de deformaciones de sección (curvaturas, etc.) relativas a las otras dimensiones. Las del material, que ligan en principio tensiones y deformaciones, al integrar variables en la dimensión del canto, pasan a relacionar los esfuerzos y las deformaciones de sección, por lo cual constituyen el nexo de unión entre los otros dos tipos de condiciones.

Es interesante observar que, si bien las condiciones de equilibrio se establecen en términos puramente mecánicos y las de compatibilidad en geométricos, en ambas

las variables de las dos dimensiones del plano (X, Y) no son independientes sino que están ligadas (acopladas), salvo casos singulares en que la placa trabaja en una sola dirección. Este acoplamiento, como se verá, tiene importantes implicaciones respecto a la extrapolación de determinadas propiedades del análisis de las estructuras lineales o de barras.

Dentro del tradicional sesgo mecánico del análisis estructural [6], las placas no han constituido una excepción: se han estudiado mucho en los casos de acciones mecánicas (cargas), pero muy poco bajo acciones geométricas (deformaciones seccionales y movimientos de apoyos).

En este trabajo se pretende establecer una síntesis de las bases conceptuales sobre el análisis de estas estructuras para acciones geométricas, incidiendo en sus particularidades con relación al mismo en estructuras lineales, y al mismo tiempo se presenta un procedimiento para abordar tal análisis, basado en el método de los elementos finitos mediante el uso del funcional de Reissner (que se muestra muy potente y adecuado para placas). Este procedimiento se aprovecha a su vez, en el propio trabajo, como herramienta de cálculo para poder ilustrar ciertos aspectos conceptuales con resultados obtenidos en casos concretos, mostrando asimismo su validez para este tipo de análisis.

INCIDENCIA DE LAS ACCIONES GEOMETRICAS

El análisis directo de estructuras sometidas a estas acciones, esto es, introduciendo éstas sin necesidad de intermediarios mecánicos (como es frecuente hacer, en la línea "mecanicista" citada) tiene ventajas conceptuales y prácticas [6]. En efecto, no sólo ayuda a comprender mejor los fundamentos del análisis de estructuras, revelando el papel que juegan en el mismo las distintas variables y condiciones, tanto mecánicas como geométricas, y sus relaciones, sino que evidencia el paralelismo entre el ámbito mecánico y el geométrico (paralelismo no total: el geométrico es bastante más complejo, siendo por ello, normalmente, objeto de las hipótesis simplificadoras que se introducen en el análisis). Además, tal tipo de análisis se ha venido empleando con ventaja, en estructuras de barras, en los campos del análisis diferido, para introducir la retracción y la fluencia [7], y del análisis no lineal [6], imponiendo deformaciones virtuales para respetar el comportamiento del material.

Se plantea ahora la cuestión de abordarlo en el caso de las placas y lo primero que cabe preguntarse es si es posible, sin más, la extrapolación. Aquí aparece el problema de la bidimensionalidad, esto es, del acoplamiento de las dos dimensiones en todas las variables: en las mecánicas, por las condiciones de equilibrio; en las geométricas, por las de compatibilidad. De cara a los efectos de las acciones geométricas, objeto que centra el interés del trabajo, interesa especialmente el acoplamiento que se deriva de las condiciones de compatibilidad. Pero antes, es interesante recordar qué ocurre en el caso de las estructuras lineales.

En una estructura de barras es posible introducir como acción, por ejemplo, cualquier ley de curvaturas $\chi(x)$, función de la coordenada longitudinal X. Si es isostática, la estructura responde tomando una deformada cuya ley de curvaturas es precisamente la impuesta y que cumple las restricciones de movimientos en los apoyos. Si es hiperestática, responde con unos esfuerzos (momentos flectores) cuyas respectivas curvaturas, al sumarse a las impuestas, dan lugar a una deformada compatible con las

citadas restricciones (véase, por ejemplo, el caso incluido en el apéndice 1).

En las placas, en principio, parece que debería ocurrir lo mismo al introducir cualquier sistema o ley de curvaturas, en todos los puntos de su plano (definidos por dos coordenadas, X e Y, normalmente ortogonales), pero en una sola dirección; por ejemplo, la X: $\chi_{xx}(x,y)$. Si se introducen ya dos sistemas cualesquiera en las dos direcciones, $\chi_{xx}(x,y)$ y $\chi_{yy}(x,y)$, las cosas ya no parecen tan claras; y, menos aún, si se incluye también la curvatura de torsión $\chi_{xy}(x,y)$. Y, sin embargo, ni lo uno ni lo demás es posible tal como se ha enunciado.

Antes de comprobarlo se ha de decir que, en cuanto a las coacciones que imponen los apoyos, sólo existe un tipo de placa isostática: las sustentadas (teóricamente) en uno o varios puntos de su contorno, de modo que en conjunto quedan restringidos estrictamente los posibles movimientos o grados de libertad correspondientes a un punto, que son seis (pudiendo, por tanto, transmitir entre todos como reacciones dos fuerzas ortogonales en su plano, una fuerza normal al mismo y tres momentos), y no más. Entre ellas, por supuesto, la que se muestra como más sencilla e intuitiva visualmente es la que posee un total empotramiento en un solo punto, que es la que se tomará aquí como referencia.

Pues bien, incluso en esta placa isostática, la menos coaccionada a la deformación que es posible concebir, no cabe imponer cualquier ley $\chi_{xx}(x,y)$, $\chi_{yy}(x,y)$, o bien $\chi_{xy}(x,y)$, ni tampoco una combinación de ellas. Téngase en cuenta que, entonces, esas funciones deben ser las curvaturas, en una o en dos direcciones (ortogonales), de una superficie en el espacio: la deformada del plano medio de la placa. Y esa superficie ha de ser, al menos, continua y con primeras derivadas continuas (esto es, de tipo u orden C1), salvo que se admitan roturas o quiebras, lo que evidentemente no será el caso. Por tanto, existen unas condiciones geométricas que relacionan $\chi_{xx}(x,y)$, $\chi_{yy}(x,y)$ y $\chi_{xy}(x,y)$: las que ligan las curvaturas de cualquier superficie C1. Introducir sólo $\chi_{xx}(x,y)$ significa que se está también introduciendo $\chi_{yy}(x,y) = 0$ y $\chi_{xy}(x,y) = 0$, y así en otros casos similares; por lo cual la primera tampoco puede ser cualquiera. La

condición para esa compatibilidad será que tales funciones de curvatura correspondan como derivadas segundas a una misma función $C1$, que es la que define la superficie (por supuesto, es fácil demostrar que en cualquier superficie de las citadas $\chi_{xy}(x,y) = \chi_{yx}(x,y)$, con lo que efectivamente son tres las curvaturas que entran en juego).

Esta condición necesaria de compatibilidad, matemáticamente se resume en las siguientes:

$$\frac{\partial \chi_{xx}(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial \chi_{xy}(x,y)}{\partial x} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \chi_{yy}(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial \chi_{xy}(x,y)}{\partial y}$$

que, en general, también son condiciones suficientes. Por ejemplo, si las curvaturas en X y en Y son constantes (iguales o distintas) lo anterior lleva a concluir que la curvatura cruzada habrá de ser otra constante. Si no se cumplen tales condiciones y, por tanto, las curvaturas impuestas no son compatibles en una misma superficie, aparecerán momentos cuyas curvaturas, al sumarse a las impuestas, lleven a unas curvaturas totales que verifiquen ya esos requisitos.

Por supuesto, existen otras deformaciones seccionales, las que se producen en el plano de la placa, que pueden ser acciones sobre la misma. Estas deformaciones, que no se van a tratar aquí, están sujetas como las curvaturas, a sus propias condiciones de compatibilidad.

Aparece así claramente un problema general de todas estas acciones de tipo deformación seccional, el de su propia continuidad. Pero las restricciones en relación con ello se manifiestan ya a través de las condiciones expuestas: por ejemplo, en general no puede haber un salto brusco en la dirección Y de la curvatura impuesta en la dirección X, sin que se dé la situación inversa.

Por tanto, dado que se ha tomado como referencia la placa exteriormente menos coaccionada que existe, se puede concluir lo siguiente: debido a la bidimensionalidad,

en las placas existe un hiperestatismo interno, con independencia de las restricciones o coacciones al movimiento en los bordes (hiperestatismo externo), que lleva a que no sea posible introducir cualquier ley de deformaciones sin que aparezcan esfuerzos (compatibilizadores o hiperestáticos: con resultante nula), al contrario de lo que ocurre en las estructuras lineales o de barras.

Por otra parte, otras acciones geométricas, como son los movimientos impuestos en las zonas de apoyo (que entran en el análisis como condiciones de borde), no presentan especiales problemas, siempre que respeten las condiciones de continuidad a lo largo del borde necesarias para no romper la continuidad de la placa.

ANÁLISIS DE PLACAS USANDO ELEMENTOS FINITOS MIXTOS

El método de los elementos finitos puede considerarse como un caso particular del método de Rayleigh-Ritz en el que las funciones de aproximación que entran en el funcional se plantean para "elementos finitos" y no para la posiblemente complicada región en su conjunto. El proceso de discretizar la región en elementos finitos convergerá a la solución correcta si se cumplen requisitos de consistencia y de continuidad. La consistencia indica que la derivada de mayor orden que aparece en el funcional debe por lo menos ser representada por las funciones de interpolación; además, las funciones de interpolación deben permitir representar aquellos casos en los que las funciones incógnitas o sus derivadas son constantes en los elementos. Las condiciones de continuidad indican que las funciones de interpolación deben ser continuas hasta, por lo menos, un orden menos que la derivada de mayor orden en el funcional.

El método de los elementos finitos se formula, normalmente, mediante el funcional de energía potencial, el cual se expresa en deformaciones empleando funciones de aproximación en desplazamientos. Al minimizarlo, este funcional se encarga de cumplir, únicamente y de manera aproximada, las leyes del equilibrio, por lo que las leyes de compatibilidad y las constitutivas del material deben

imponerse de manera externa al funcional. Por ejemplo, las leyes de compatibilidad se cumplen imponiendo campos de desplazamientos compatibles, tanto en el elemento como entre elementos y con respecto a las condiciones de apoyo. Esta formulación genera elementos llamados conformes o no conformes, según cumplan exactamente o no las condiciones de continuidad entre elementos [11]. Los elementos no-conformes suponen una aparente inconsistencia, al no cumplir exactamente las condiciones de continuidad y dar buenos resultados. Sin embargo, se demostró posteriormente que dichas condiciones pueden relajarse.

Al emplear esta formulación en el análisis de placas, aparecen en el funcional derivadas de segundo orden en desplazamientos (curvaturas). Por ello, para elementos conformes se requiere que las funciones de interpolación sean de orden $C1$, lo cual no es fácil de obtener: éste es el primer inconveniente de su empleo en el análisis de placas. Sin embargo, los elementos no conformes, como por ejemplo el de Melosh, se han empleado con éxito desde hace ya muchos años, aunque al realizar transformaciones isoparamétricas suelen requerir técnicas especiales como la integración reducida [3].

Una limitación del funcional de energía potencial, quizá más seria desde el punto de vista de la aplicación práctica del método de los elementos finitos al análisis de placas, es que cumple el equilibrio de manera global (en promedio) y es posible minimizar su error medio pero al mismo tiempo obtener errores locales significativos en el mismo. Es bien conocido por los proyectistas de estructuras que las leyes del equilibrio son independientes de las propiedades del material y que si bien se pueden permitir errores en la compatibilidad producto de no caracterizar de manera precisa diversos factores (por ejemplo, la redistribución de esfuerzos al alcanzarse el límite ideal del material, aparición de grietas, etc.), los errores en el equilibrio son sumamente peligrosos. De hecho, durante muchos años el análisis de láminas se ha basado en el "control estático" [8], el cual busca siempre soluciones equilibradas, tomándose algunas libertades en cuanto a

la compatibilidad de las mismas (por citar un ejemplo, el método de la membrana).

Finalmente, otra limitación de las formulaciones en energía potencial es que las variables primarias del modelo son desplazamientos y giros. Los momentos flectores, que son los parámetros de mayor interés práctico, se obtienen derivando los giros, lo cual causa la pérdida de un orden en las funciones de interpolación. Por ejemplo, si los giros se aproximan con funciones cuadráticas, los momentos flectores lo hacen con funciones lineales.

El funcional de Reissner es un funcional mixto pues, cuando se emplea en problemas de Elasticidad, los esfuerzos y desplazamientos son variables primarias e independientes. Este funcional puede obtenerse basándose en el de energía potencial y forzando las condiciones de compatibilidad mediante multiplicadores de Lagrange [1]. Al aplicar las expresiones de Euler-Lagrange, para hacer estacionario este nuevo funcional, se obtiene el valor de dichos multiplicadores. Para problemas de Elasticidad, el significado físico de estos multiplicadores corresponde a esfuerzos y desplazamientos. Haciendo este funcional estacionario se cumplen globalmente no sólo las leyes del equilibrio sino también las de la compatibilidad. Este funcional permite emplear funciones de interpolación del mismo orden para esfuerzos y desplazamientos, aumentando la precisión en esfuerzos y, por ello, disminuyendo errores en el equilibrio [1, 2].

En el análisis de placas es común el expresar los desplazamientos paralelos al plano de la placa en función de los giros de la superficie neutra (hipótesis de las secciones planas). Así, al formular elementos finitos basados en energía potencial aparecen términos en curvaturas, los cuales, como se vio anteriormente, para elementos conformes requieren continuidad $C1$. En el funcional de Reissner, sin embargo, se pueden realizar ciertas integrales por partes, que reducen el orden de las derivadas en desplazamientos, aumentando el orden de las derivadas en esfuerzos, lo cual fue inicialmente propuesto por Hermann [4, 5]. Connor presenta nuevamente esta idea, junto con otras, para la formulación de elementos mixtos en el análisis de placas, en

la referencia 10; entre ellas, cita la de Pian y Tong, quienes proponen ciertas integraciones de funciones discontinuas en los bordes entre elementos. Esta última alternativa, sin embargo, no tiene en cuenta una de las características más interesantes de la aplicación del funcional de Reissner al análisis de placas, que es que los campos de desplazamientos y de esfuerzos son independientes pues ambos son variables primarias.

El funcional de Reissner particularizado para el análisis de placas, incluyendo deformación por cortante, se puede expresar en notación indicial como [1, 2].

$$\begin{aligned} \pi_r(w, M_{ij}) = & -U + \int_A (Q_i w_i - qw) dA + \\ & + \int_{S_\sigma} [(M_{mn} - \bar{M}_{mn}) \theta_n + \\ & + (M_{ns} - \bar{M}_{ns}) \cdot \theta_s - \bar{Q}_n w] dS + \\ & + \int_{S_\mu} [M_{mn} \bar{\theta}_n + M_{ns} \bar{\theta}_s + Q_n (w - \bar{w})] dS \end{aligned} \quad (2)$$

donde U es la energía elástica del sistema; Q_i es el cortante en la dirección i ; w es el desplazamiento vertical; q es la carga por unidad de área; M_{mn} y M_{ns} son, respectivamente, los momentos normales y tangenciales en el borde; θ_n y θ_s son, respectivamente, los giros normal y tangencial; Q_n es el cortante normal en el borde; S_σ y S_μ son los bordes donde, respectivamente, los esfuerzos o los desplazamientos están prescritos; y, finalmente, los parámetros con una barra superior indican valores conocidos.

La disminución en el orden de las derivadas en desplazamientos reduce los requisitos de continuidad en las funciones de interpolación para los mencionados desplazamientos, permitiendo una formulación teóricamente exacta que cumple estrictamente los requisitos de consistencia y continuidad, evitándose así inconvenientes como la integración reducida [3].

La expresión (2) puede simplificarse si las condiciones:

$$M_{mn} = \bar{M}_{mn}; \quad M_{ns} = \bar{M}_{ns}; \quad w = \bar{w} \quad (3)$$

se cumplen externamente en S_σ y S_μ , respectivamente. Así, el funcional de Reissner puede simplificarse como:

$$\begin{aligned} \pi_r(w, M_{ij}) = & -U + \int_A (Q_i w_i - qw) dA + \\ & + \int_{S_\sigma} \bar{Q}_n w dS + \int_{S_\mu} (M_{mn} \bar{\theta}_n + M_{ns} \bar{\theta}_s) dS \end{aligned} \quad (4)$$

El término que representa la energía elástica del sistema (U) puede incluir deformaciones impuestas, en este caso curvaturas. Así, la energía elástica se representa como:

$$\begin{aligned} U = & \frac{1}{2} \int_A M_{ij} M_{kl} S_{ijkl}^f dA + \\ & + \frac{1}{2} \int_A Q_i Q_k S_{ikk}^c dA + \int_A M_{ij} \bar{\chi}_{ij} dA \end{aligned} \quad (5)$$

donde $\bar{\chi}_{ij}$ son las curvaturas impuestas o acciones geométricas; M_{ij} son los momentos flectores; S_{ijkl}^f es la matriz de flexibilidad que relaciona momentos y curvaturas y S_{ikk}^c es la matriz de flexibilidad entre cortantes y sus deformaciones. Debe indicarse que la expresión completa para la energía elástica incluye un término adicional constante, función cuadrática de las curvaturas impuestas, el cual al derivarse es nulo y por ello no se incluye en (5).

Las expresiones (4, 5) indican que las curvaturas impuestas introducen un trabajo, similar al de las cargas externas, pero en función de los esfuerzos internos desarrollados precisamente para compatibilizar las deformaciones impuestas.

Debe observarse que esta expresión es similar a la utilizada para procedimientos de análisis que asimilen las deformaciones impuestas como cargas equivalentes. De hecho, al formular los elementos finitos, el término que incluye las deformaciones impuestas aparecerá en el "vector de acciones". Para elementos finitos basados en energía potencial este vector corresponde a las cargas externas (sean estas directamente acciones externas o equivalentes mecánicas de deformaciones impuestas o movimientos de apoyos). Sin embargo, para formulaciones mixtas no existe tal vector único, sino un vector de acciones formado por dos subvectores: uno que incluye los movimientos de apoyos y deformaciones impuestas, y el segundo de cargas externas. El ejemplo en el apéndice 1 ilustra este vector de acciones.

La alternativa de análisis propuesta no considera las deformaciones impuestas o

los movimientos de apoyo como cargas equivalentes sino directamente como lo que son, es decir acciones geométricas. Esto tiene la ventaja, no sólo desde el punto de vista conceptual, de mejorar la comprensión del fenómeno físico, sino que, por ejemplo, permite concluir que la respuesta ha de ser un sistema autoequilibrado.

El elemento finito empleado durante el análisis es un cuadrilátero isoparamétrico de tres a ocho nudos: tres (las funciones de interpolación para un triángulo y para un cuadrilátero con un nudo repetido son las mismas) o cuatro nudos en las esquinas y los restantes cuatro nudos intermedios. Las funciones de interpolación corresponden a las de "serendipity" (parece ser que este término inglés será admitido, como "serendipidad", en castellano), llamadas así por su fortuita aplicación en diversos problemas [11]. El elemento es isoparamétrico, por lo que las mismas funciones de interpolación cuadráticas, usadas para aproximar los momentos y el desplazamiento vertical, se emplean para transformar la geometría del elemento y simplificar las integraciones sobre el mismo [9].

Una ventaja adicional de esta formulación consiste en que es sumamente sencillo proponer funciones de interpolación de orden elevado, como por ejemplo cúbicas o de cuarto orden, pues únicamente deben cumplir requisitos de continuidad C0.

DEFORMACIONES IMPUESTAS EN PLACAS

Existen diversos fenómenos o procesos que involucran acciones geométricas de tipo deformación (deformaciones impuestas) sobre la estructura, tales como los cambios de temperatura, la retracción y la fluencia del hormigón e incluso el pretensado. Una de las ventajas importantes al considerarlos como causantes de deformaciones impuestas es permitir la formulación de todos ellos bajo una misma metodología.

Los cambios de temperatura ocasionan deformaciones impuestas directamente proporcionales a los mismos a través del coeficiente térmico del material. Como se explicó anteriormente, si dichas deforma-

ciones no son compatibles, externa o internamente, se originan esfuerzos. El apéndice 1 presenta un ejemplo sencillo de análisis de estructuras lineales sometidas a deformaciones impuestas (producto de un gradiente de temperatura), usando el funcional de Reissner. Debido al hiperestatismo externo existente por las coacciones en los apoyos, las citadas deformaciones no son compatibles y por ello aparecen momentos (si la pieza fuera isostática, cualquier ley de curvaturas, incluso no continua, sería compatible, no existiendo el hiperestatismo interno como ocurre en las placas).

Las placas sometidas a deformaciones impuestas desarrollarán esfuerzos si, como se vió anteriormente, las deformaciones no cumplen las ecuaciones (1), correspondientes al hiperestatismo interno. Sea la losa, totalmente empotrada en un solo punto, que se muestra en la figura 1 (a) (como se sabe, la más libre a deformarse que existe); y supóngase que las curvaturas impuestas en X e Y son constantes, con los siguientes valores:

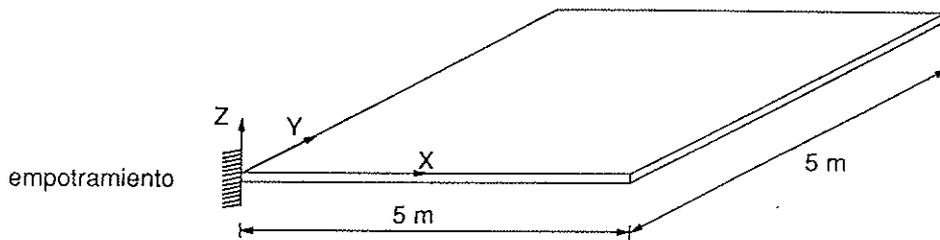
$$\chi_{xx} = 0,1 ; \quad \chi_{yy} = 0,2$$

Estas deformaciones cumplen las ecuaciones (1), y por ello no originan momentos ni cortantes internos. La solución, usando el programa de elementos finitos mixtos Andrea, confirma esta predicción y proporciona la deformada del plano medio de la placa que aparece en la figura 1 (b). La solución analítica para esta placa, sin incluir deformación por cortante, es fácil de obtener pues el desplazamiento vertical:

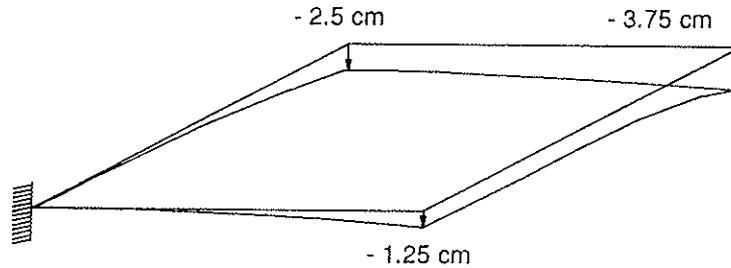
$$w = -\chi_{xx} \frac{x^2}{2} - \chi_{yy} \frac{y^2}{2}$$

cumple las condiciones de vinculación externa (giros y desplazamientos nulos en el apoyo) además de cumplir las ecuaciones de equilibrio (idénticamente nulas) y compatibilidad y las leyes tensión-deformación (que en realidad no entran en juego aquí). El signo menos se origina por la convención de signos adoptada.

Un segundo ejemplo, mostrado en la figura 2 (a), corresponde a la misma placa con curvaturas impuestas constantes y positivas aplicadas únicamente en una



a) Placa cuadrada empotrada de espesor constante.



b) Posición deformada del plano neutro de la placa.

Fig. 1 Placa cuadrada empotrada en un punto y sometida a curvaturas impuestas constantes, pero diferentes, en X, Y.

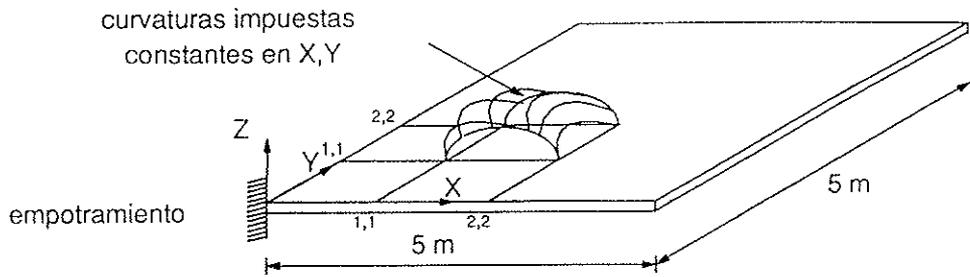
región finita de la placa. Como las curvaturas impuestas son constantes e iguales en X e Y, cumplen las ecuaciones (1) dentro de la región donde se aplican; y, obviamente, en la región donde no se aplican deformaciones impuestas también se cumplen las ecuaciones (1). Sin embargo, en el borde de dichas regiones no se cumplen las condiciones de compatibilidad y por ello se desarrollan momentos y cortantes internos.

Esta placa se modeló empleando veinticinco elementos finitos obtenidos por un generador de malla automático con una mayor concentración de elementos cerca del apoyo. Las figuras 2 (b) y (c) muestran la variación del momento flector M_{xx} obtenida con el programa de elementos finitos mixtos. Por simetría, la variación del momento flector M_{yy} es idéntica a la del momento M_{xx} . Se observa que el efecto de las curvaturas impuestas corresponde a una sollicitación de momentos distribuidos a lo largo del borde donde existe la incompatibilidad en deformaciones impuestas. El momento flector M_{xx} es importante dentro de la región donde se aplican las curvaturas y más allá decrece rápidamente.

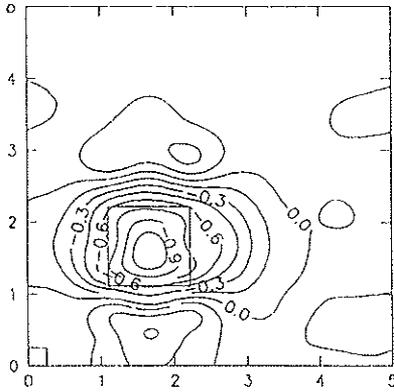
Siendo la acción de tipo geométrico y no habiendo acciones mecánicas, la solución es autoequilibrada. Por ello, las reacciones verticales y los momentos en el apoyo han de ser nulos.

Por supuesto, las restantes acciones geométricas de tipo deformación pueden incluirse exactamente empleando el mismo procedimiento. Por ejemplo, la retracción del hormigón (que es una propiedad reológica atensional que produce deformaciones a lo largo del tiempo) o las deformaciones que genera el pretensado. De hecho, las observaciones antes mencionadas para los ejemplos son válidas tanto para deformaciones térmicas como de otro origen (siempre que se generen curvaturas).

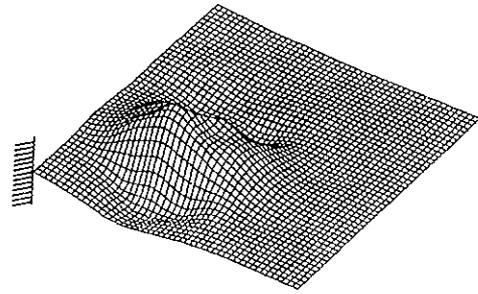
La fluencia del hormigón, aún siendo una propiedad que da lugar a deformaciones diferidas dependientes de la historia tensional, puede incluirse asimismo, sin mayores dificultades, como deformación impuesta usando la formulación mixta de elementos finitos presentada. Ello permite abordar de manera precisa el análisis diferido de losas de hormigón armado y pre-



a) Placa sometida a curvaturas impuestas X,Y iguales y constantes.



b) Curvas de nivel para el momento M_{xx} .



c) Perspectiva del momento flector M_{xx} .

Fig. 2. Placa cuadrada sometida a curvaturas constantes impuestas concentradas en su interior.

tensado, estudiando los efectos de la retracción y la fluencia, lo cual será objeto de futuros trabajos.

CONCLUSIONES

Las acciones geométricas, y en particular las de tipo deformación o deformaciones impuestas, se introducen, generalmente, en el análisis a través de acciones mecánicas equivalentes. Sin embargo, pueden ser tratadas directamente como tales acciones geométricas. Así, acciones tan diversas desde un punto de vista físico como son las de origen térmico, la retracción, la fluencia e incluso las ligadas al pretensado, pueden ser incorporadas de manera muy similar.

A causa de la bidimensionalidad de las placas, se produce en ellas un hiperestatismo interno, que no existe en las estructuras lineales o de barras. Para que un sistema de curvaturas sea compatible en una placa, y no aparezcan por tanto esfuerzos, debe cumplir unas determinadas condiciones de continuidad.

Por otra parte, en el análisis de placas, el método de los elementos finitos basado en el funcional de Reissner proporciona una opción sumamente interesante, pues se trata de una formulación exacta que evita inconvenientes tales como la integración reducida y permite el empleo de polinomios de interpolación de orden elevado. Los momentos flectores, variables de mayor interés práctico que los desplazamientos o giros, son variables primarias del sistema y se interpolan con funciones del mismo orden que el desplazamiento vertical. Esta mayor aproximación en esfuerzos permite reducir errores globales en el equilibrio, lo cual es muy importante desde un punto de vista práctico.

La citada formulación de elementos finitos mixtos y el programa desarrollado a partir de la misma, pueden incorporar todas estas deformaciones, lo cual permite un análisis preciso de placas bajo diversas acciones. En futuros trabajos se profundizará en las aplicaciones prácticas de este novedoso procedimiento en el análisis y

diseño de placas de hormigón armado y pretensado.

REFERENCIAS

1. Bozzo, Luis, **Análisis de losas empleando un elemento finito isoparamétrico mixto de tres a ocho nudos**. Universidad Nacional de Ingeniería. Lima, Perú, 1986.
2. Bozzo, Luis, "Flat Plate Analysis using a Mixed Formulation", **Fourth International Conference in Computing in Civil and Building Engineering, IV-ICCCBE**. Tokyo, 1991.
3. Chang-Koon Choi, "Reduced Integrated Nonconforming Plate Element", **Journal of Engineering Mechanics**, ASCE, Vol. 112, April 1986.
4. Hermann L.R., "A bending analysis for plates", **Proceedings Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics**, AFFDL-TR-66 80, 577 604, 1965.
5. Hermann L.R., "Finite element bending analysis for plates", **Journal of Engineering Mechanics**, ASCE, Vol. 93, 1967.
6. Murcia, Juan, **Fundamentos para el análisis de estructuras de hormigón armado y pretensado**. Consejo Superior de Investigaciones Científicas. Madrid, 1987.
7. Murcia, Juan, "Analysis of Creep and Shrinkage as Geometrical Actions in Evolving and Non-Evolving Structures", **Proceedings RILEM International Symposium on Creep and Shrinkage of Concrete "Concreep 5"**. Barcelona, 1993.
8. Scordelis, Alex, Notas de clase del curso **Design of Concrete Shells**, U.C. Berkeley, 1990.
9. Strang, Gilbert and Fix, George, **An Analysis of the Finite Element Method**. Prentice-Hall, 1973.
10. Tottenham H. y C. Brebbia (eds.), **Finite Element Techniques in Structural Mechanics**. Stress Analysis Publishers. Southampton, 1971.
11. Zienkiewicz, O.C. and Taylor R.L., **The Finite Element Method**, Vol. 1. Mc Graw Hill. London, 1988.

APENDICE 1

Este apéndice muestra el empleo del funcional de Reissner en un ejemplo sencillo desarrollado paso a paso para el análisis de la viga biempotrada ilustrada en la figura 3 y sometida a una deformación (curvatura) constante originada por soleamiento (que induce un gradiente térmico en la sección). La sección transversal y las características mecánicas del material son constantes a lo largo de la pieza.

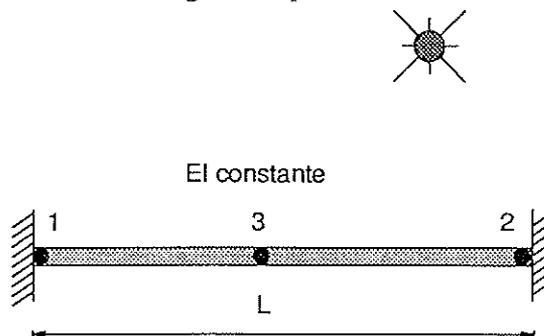


Fig. 3. Viga biempotrada sometida a curvatura constante.

El funcional de Reissner para el análisis de estructuras de barras sometidas únicamente a acciones geométricas y sin considerar deformación por cortante se reescribe según:

$$\pi_R = - \int_0^L \frac{M_{nn}^2}{2EI} dx - \int_0^L \frac{M_{ns}^2}{2GA} dx - \int_0^L M_{nn} \bar{\chi}_{nn} dx + \int_0^L Q_n w_n dx \quad (6)$$

donde $\bar{\chi}_{nn}$ son las curvaturas impuestas debidas al soleamiento; EI y GA son, respectivamente, las rigideces a flexión y torsión (para el ejemplo mostrado, claramente el momento torsor es nulo).

Las funciones de interpolación (llamadas de "serendipity") para un elemento finito tipo barra de tres nudos —dos extremos (nudos 1 y 2 en la figura 3) y uno interior (nudo 3 en la figura 3)— son:

$$\begin{aligned} N_1 &= 1 - \frac{x}{L} - \frac{1}{2} N_3 = 1 - \frac{x}{L} - 2 \frac{x}{L} \left(1 - \frac{x}{L}\right) \\ N_2 &= \frac{x}{L} - 2 \frac{x}{L} \left(1 - \frac{x}{L}\right) \\ N_3 &= 4 \frac{x}{L} \left(1 - \frac{x}{L}\right) \end{aligned} \quad (7)$$

las cuales cumplen los requisitos de consistencia y continuidad indicados con anterioridad. En particular, es fácil verificar que estados de tensión o desplazamiento constante son correctamente representados, pues $N_1 + N_2 + N_3 = 1$.

El momento flector, el desplazamiento vertical y las curvaturas impuestas se interpolan según:

$$\begin{aligned} M_{nn} &= M_{nn1} N_1 + M_{nn2} N_2 + M_{nn3} N_3 \\ w &= w_1 N_1 + w_2 N_2 + w_3 N_3 = w_3 N_3 \\ \bar{\chi}_{nn} &= \bar{\chi}_{nn1} N_1 + \bar{\chi}_{nn2} N_2 + \bar{\chi}_{nn3} N_3 \end{aligned} \quad (8)$$

donde M_{nni} , w_i , $\bar{\chi}_{nni}$ son, respectivamente, el momento flector, el desplazamiento vertical y la curvatura impuesta en el nudo i .

Reemplazando estas funciones en la expresión (6) y haciendo el funcional estacionario con respecto a las variables M_{nn1} , M_{nn2} , M_{nn3} , w_3 se obtiene un sistema de ecuaciones lineales del tipo:

$$\begin{bmatrix} -H & G^T \\ G & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} L \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (9)$$

donde:

$$H = EI \begin{bmatrix} \int N_1 N_1 dx & \int N_1 N_2 dx & \int N_1 N_3 dx \\ \int N_2 N_1 dx & \int N_2 N_2 dx & \int N_2 N_3 dx \\ \int N_3 N_1 dx & \int N_3 N_2 dx & \int N_3 N_3 dx \end{bmatrix}_{3 \times 3} \quad (10)$$

$$G^T = \begin{Bmatrix} \int N_{1,i} N_{3,i} dx \\ \int N_{2,i} N_{3,i} dx \\ \int N_{3,i} N_{3,i} dx \end{Bmatrix}_{3 \times 1} \quad (11)$$

$$L = \begin{Bmatrix} \bar{\chi}_{nn1} \int N_1 N_1 dx + \bar{\chi}_{nn2} \int N_1 N_2 dx + \bar{\chi}_{nn3} \int N_1 N_3 dx \\ \bar{\chi}_{nn1} \int N_2 N_1 dx + \bar{\chi}_{nn2} \int N_2 N_2 dx + \bar{\chi}_{nn3} \int N_2 N_3 dx \\ \bar{\chi}_{nn1} \int N_3 N_1 dx + \bar{\chi}_{nn2} \int N_3 N_2 dx + \bar{\chi}_{nn3} \int N_3 N_3 dx \end{Bmatrix}_{3 \times 1} \quad (12)$$

L es el subvector de acciones geométricas y en este caso el subvector de acciones mecánicas es nulo. En el ejemplo considerado $\bar{\chi}_{nn1} = \bar{\chi}_{nn2} = \bar{\chi}_{nn3} = \bar{\chi}$. Integrando estas expresiones de manera analítica se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{15} L & \frac{1}{30} L & \frac{1}{15} L & -\frac{8}{3L} \\ -\frac{1}{30} L & \frac{2}{15} L & \frac{1}{15} L & -\frac{8}{3L} \\ \frac{1}{15} L & \frac{1}{15} L & \frac{8}{15} L & \frac{16}{3L} \\ \frac{8}{3L} & -\frac{8}{3L} & \frac{16}{3L} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} M_{nn1}/EI \\ M_{nn2}/EI \\ M_{nn3}/EI \\ w_3 \end{Bmatrix} = -\bar{\chi} \begin{Bmatrix} \frac{1}{6} L \\ \frac{1}{6} L \\ \frac{2}{3} L \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (13)$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones se obtiene la solución:

$$\begin{aligned} M_{nn1} &= M_{nn2} = M_{nn3} = \bar{\chi} EI \\ w_3 &= 0 \end{aligned}$$

la cual corresponde a la solución exacta, lo que era de esperar, pues el método de los elementos finitos particularizado a estructuras de barras conduce a soluciones exactas (si como es normal se toman las funciones de interpolación correctas). El signo menos aparece por la convención de signos implícita en el funcional. Es interesante observar, y bien conocido, que una viga biempotrada sometida a un soleamiento que introduzca curvaturas constantes no sufre deformación alguna y los momentos flectores, proporcionales a la curvatura impuesta y a su rigidez a flexión, son constantes a lo largo de la viga.

RESUMEN

Las placas son estructuras ampliamente empleadas y, sin embargo, su comportamiento, análisis y diseño preciso es bastante menos conocido, en comparación con los elementos estructurales lineales. Por otro lado, aunque los procedimientos tradicionales de análisis suelen tratar las deformaciones impuestas mediante el uso de

acciones mecánicas equivalentes, conceptualmente dichas acciones pueden introducirse directamente como acciones geométricas que son, lo que permite una mayor comprensión del comportamiento estructural y proporciona además ventajas prácticas, pues acciones tan diversas como las térmicas, la retracción y la fluencia del hormigón e incluso las ligadas al pretensado pueden tratarse de forma similar.

Debido a la dimensionalidad de las placas, existe un hiperestatismo interno que claramente no se da en las estructuras de barras. Ello implica que, incluso en la placa más libre a la deformación, no todo sistema de curvaturas impuestas es compatible sino que ha de cumplir unas determinadas condiciones, las cuales se presentan en este trabajo.

Incluso usando técnicas generales, como el método de los elementos finitos, en el análisis de placas se presentan dificultades importantes, originadas principalmente porque las formulaciones tradicionales se basan, casi de forma exclusiva, en el funcional de energía potencial. El funcional de Reissner, no obstante, proporciona una opción interesante para este análisis, pues permite una formulación teóricamente exacta que evita inconvenientes como la integración reducida. Además, las variables primarias son los momentos flectores y el desplazamiento vertical por lo que se obtienen resultados de gran precisión tanto en esfuerzos como en desplazamientos. Esta formulación (programa Andrea) es la que se emplea aquí para el análisis de placas sometidas a deformaciones impuestas.

SUMMARY

Planar plates are structural elements commonly used in engineering practice. However, their behavior, analysis and design is not as clearly understood as for linear structural elements. Traditional structural analysis procedures normally consider deformations through equivalent mechanical actions. Conceptually, however, deformations can be included directly as geometrical actions which provides a better understanding of the structural behavior as well as practical advantages. Actions, as diverse from a physical point of view as thermal, creep and shrinkage and even prestressing can be easily considered as similar geometrical actions.

Due to the bi-dimensional geometry of plates, in these structures exist an internal redundancy, which clearly is not the case for beams. Therefore, not all the systems of imposed deformations are compatible and they must satisfy some continuity conditions in order to avoid internal stresses.

Even using general structural analysis techniques, such as the finite element method, the plate analysis presents important difficulties. Here the problems arise, primarily, by the formulation of the finite elements using potential energy. The Reissner functional is an interesting alternative procedure to formulate the finite elements which allows a theoretically exact, precise and efficient analysis. Using this functional the bending moments are primary unknowns and they may be approximated by polynomials of the same order as for the vertical displacement.

ESTE SIMBOLO LE VA A AYUDAR A ENTRAR EN EUROPA

El Mercado Unico Europeo será una realidad en 1993, abriéndose a los empresarios españoles la oportunidad de un mercado de 320 millones de consumidores.

Para ayudar a los empresarios a abordar profesionalmente este mercado la C.E.E. ha desarrollado un "Programa de Acción para las Pequeñas y Medianas Empresas", una de cuyas primeras actuaciones fue la creación y puesta en marcha de las **EUROVENTANILLAS**.

Estas **EUROVENTANILLAS**, distribuidas por toda la geografía nacional, le van a ayudar desinteresadamente a:

— **CONOCER** las actividades, programas y legislación de la C.E.



- Política comercial.
 - Contratación pública.
 - Normativa y reglamentación comunitaria.
 - Programas de investigación y desarrollo.
 - Ayudas y préstamos de la C.E.
- **BENEFICIARSE** de una orientación apropiada sobre:
1. Cómo cooperar con otras empresas europeas.
 2. Cómo encontrar a un distribuidor para sus productos.
 3. Cómo presentar la candidatura de la empresa a un programa comunitario.
- **TRASLADAR** a la Comisión propuestas y sugerencias de su Empresa.

EUROVENTANILLAS EN ESPAÑA:

ANDALUCIA

CONFEDERACION EMPRESARIAL DE ANDALUCIA (CEA)
Avenida San Francisco Javier, 9.
Edificio Sevilla 2, 9ª planta. 41018 SEVILLA
Tel. (95) 465 05 55. Fax: (95) 464 12 42

PROYECTO EUROPA, S.A.
Plazo de la Constitución, 9
29008-MÁLAGA
Tel. (952) 22 09 59. Fax: (952) 22 09 36

ARAGON

CONFEDERACION REGIONAL DE EMPRESARIOS DE ARAGON (CREA)
Plaza Roma. Urbanización Parque de Roma, F-1 1ª planta.
50010 ZARAGOZA.
Tels. (976) 32 58 99/32 00 00
Fax: (976) 32 29 56

ASTURIAS

INSTITUTO DE FOMENTO REGIONAL DEL PRINCIPADO DE ASTURIAS (IFR)
Parque Tecnológico de Asturias. 33420 LLANERA (ASTURIAS)
Tel. (98) 526 00 68. Fax: (98) 526 44 55

ANTENA OVIEDO (FEDERACION ASTURIANA DE EMPRESARIOS)
Dr. Alfredo Martínez, 6. 2ª. 33005 OVIEDO
Tel. (98) 523 21 05. Fax: (98) 524 41 76

CANARIAS

CONSEJERIA DE ECONOMIA Y HACIENDA
D. G. Política Financiera y Promoción Económica
Tomás Miller, 38. 35007-LAS PALMAS DE GRAN CANARIA.
Tels. (928) 22 35 50
Fax: (928) 22 23 47

CASTILLA-LA MANCHA

CAMARA OFICIAL DE COMERCIO E INDUSTRIA DE TOLEDO
Plaza de San Vicente, 3. 45001-TOLEDO
Tels. (923) 21 44 50/21 44 54
Fax: (923) 21 47 27/21 39 60
Telex: 42844 CCOE-E

CONFEDERACION DE EMPRESARIOS DE CASTILLA-LA MANCHA
Rosario, 29. 3ª planta. 02001-ALBACETE.
Tels. (967) 21 73 61/00/01
Fax: (967) 24 02 02

CASTILLA-LEON

SODICAL-CECALE
Claudio Moyano, 4. 1ª. 47001 VALLADOLID
Tel. (983) 35 40 33. Fax: (983) 35 47 38

CATALUÑA

CENTRE D'INFORMACIO I DESENVOLUPAMENT EMPRESARIAL (CIDEM)
Avinguda Diagonal, 403/1r. 08008-BARCELONA.
Tel. (93) 416 08 30. Fax: (93) 416 08 18

CENTRO EUROPEO DE INFORMACION BANCO EXTERIOR DE ESPAÑA
Monta, 56-58. 08034-BARCELONA
Tel. (93) 204 13 66. Fax: (93) 205 73 35

CAMBRA OFICIAL DE COMERC. INDUSTRIA I NAVEGACIO DE BARCELONA
Avinguda Diagonal, 452. 08006-BARCELONA.
Tel. (93) 415 16 00. Fax: (93) 416 07 35

EXTREMADURA

SOCIEDAD PARA EL DESARROLLO INDUSTRIAL DE EXTREMADURA (SODIEI)
Doctor Marañón, 2. 10002-CACERES.
Tel. (927) 22 48 78. Fax: (927) 24 33 04

GALICIA

CONFEDERACION DE EMPRESARIOS DE GALICIA (CEG)
Romero Donallo, 7-A, entresuelo.
15706-SANTIAGO DE COMPOSTELA
Tels. (981) 59 76 50/54
Fax: (981) 56 57 88

ISLAS BALEARES

CONSORCI CENTRE DE DOCUMENTACIO EUROPEA DE LES ILLES BALEARS
Patronato Obrero, 30
07006-PALMA DE MALLORCA.
Tel. (971) 46 10 02. Fax: (971) 46 30 70

MADRID

ICEX-IMPI
Pº de la Castellana, 141. 2ª planta.
28046-MADRID
Tels. (91) 571 54 04/571 46 40
Fax: (91) 571 59 12

CONFEDERACION ESPAÑOLA DE ORGANIZACIONES EMPRESARIALES (CEOE)
Diego de León, 50. 28006-MADRID
Tel. (91) 563 96 41. Fax: (91) 564 01 35

INSTITUTO MADRIEÑO DE DESARROLLO (IMADE)
Mariano Ron, 1 B-15. 28902-GETAFE
Tel. (91) 696 11 11. Fax: (91) 695 61 74 / 319 42 90

CAMARA OFICIAL DE COMERCIO E INDUSTRIA DE MADRID
Pza. de la Independencia, 1. 28001-MADRID
Tel. (91) 538 36 10. Fax: (91) 538 36 43

MURCIA

INSTITUTO DE FOMENTO DE LA REGION DE MURCIA - CROEM
Pza. San Agustín, 5-6. 30005-MURCIA.
Tel. (968) 28 08 18. Fax: (968) 29 32 45

NAVARRA

ASOCIACION DE LA INDUSTRIA NAVARRA (AIN)
P.O. Box 439. 31191-CORDOVIDA (Pamplona)
Tel. (948) 10 11 01. Fax: (948) 10 11 00

PAIS VASCO

CAMARA OFICIAL DE COMERCIO, INDUSTRIA Y NAVEGACION DE BILBAO
Alameda de Recalde, 50. 48008-BILBAO
Tel. (94) 444 40 54. Fax: (94) 443 61 71

FUNDACION EUROVENTANILLA DEL PAIS VASCO
Tomás Gros, 3 bajo. 20001-SAN SEBASTIAN.
Tel. (943) 27 22 88. Fax: (943) 27 16 57

LA RIOJA

FEDERACION DE EMPRESARIOS DE LA RIOJA (FER)
Hermanos Moray, 8. 4ª planta.
26001-LOGROÑO
Tel. (941) 25 70 22. Fax: (941) 20 25 37

COMUNIDAD VALENCIANA

CAMARA OFICIAL DE COMERCIO, INDUSTRIA Y NAVEGACION DE VALENCIA
Paseo General, 15. 46002-VALENCIA
Tel. (96) 351 13 01
Fax: (96) 351 63 49/351 35 58

GRUPO BANCO POPULAR ESPAÑOL
Rambla de Méndez Núñez, 12
03002-ALICANTE
Tels. (96) 521 62 91/521 16 86
Fax: (96) 520 19 54

Para cualquier información sobre la Red de Euroventanillas dirigirse a:



Pº de la Castellana, 141, planta 2ª - 28071 MADRID
Teléfono: 900 - 19 00 92
Fax: (91) 582 93 99

Algunas conclusiones del análisis en el tiempo de estructuras de hormigón armado, relativas al cálculo de flechas diferidas

Juan Murcia

**Profesor de Investigación del CSIC (ICMAB).
Actualmente en Dpto. Ingeniería de la Construcción,
UPC (ETSICCP Barcelona)**

INTRODUCCION

Normalmente, en el proyecto de estructuras de hormigón, para considerar los efectos de la retracción y la fluencia no se lleva a cabo un análisis en el tiempo propiamente dicho. En la práctica, todo se suele reducir sin más a calcular las flechas en el tiempo, multiplicando las instantáneas por un factor, que viene a ser $1 + K \cdot \varphi$, donde K es una constante ($K \leq 1$), que depende de la fisuración y otros factores, y φ es el coeficiente de fluencia del hormigón (2, 3).

Aparte de su sencillez, la razón que justifica este modo de proceder, que no contempla ningún análisis para conocer si existen o no redistribuciones diferidas de esfuerzos que hayan de tenerse en cuenta, no siempre es bien conocida. Parece más bien responder a una práctica generalmente admitida. En ocasiones, para las estructuras de hormigón armado ello se atribuye, de forma más o menos vaga, a ciertos motivos (dado que su envergadura no suele ser muy grande, no parece que puedan producirse cambios en ellas demasiado apreciables de los esfuerzos en el tiempo, etc.).

A través de razonamientos sencillos, pero de manera rigurosa, en este trabajo se trata de delimitar este asunto para las estructuras de hormigón armado. Y, en par-

ticular, se demuestra cómo en la gran mayoría de las mismas ello está justificado; aunque el factor que se propone entonces para aplicar a las flechas suele resultar menor y tiene en cuenta el efecto de la retracción, el cual no es en absoluto despreciable en muchos casos. Asimismo, se indican las situaciones en que normalmente conviene proceder a un análisis en el tiempo como tal.

Para ello es preciso analizar el comportamiento diferido en servicio de las zonas no fisuradas de la estructura, realizándose esto de forma paralela a lo hecho en otro lugar (4, 5) para las fisuradas. Más tarde se comparan sus resultados y todo ello se integra de cara a las conclusiones finales.

ASPECTOS GENERALES DEL COMPORTAMIENTO ESTRUCTURAL EN EL TIEMPO

El comportamiento diferido de una estructura isostática de hormigón bajo acciones permanentes es en general muy sencillo de prever. Como no se producen redistribuciones de esfuerzos en el tiempo, los efectos de la retracción y la fluencia se reducen a las variables geométricas (flechas y giros), que se deducen directamente de tales propiedades de forma más o menos ajustada.

La dificultad estriba normalmente en las estructuras hiperestáticas, donde existen coacciones a la deformación, a las cuales nos referiremos en lo que sigue, como caso más general. No obstante, se verá cómo para éstas la cuestión también puede ser sencilla en determinadas condiciones.

Bajo cargas que se mantienen constantes, es sabido que las estructuras hiperestáticas de material viscoelástico lineal, uniforme y homogéneo (igual comportamiento a compresión y a tracción) y con las vinculaciones normales (algunos movimientos nulos en apoyos), si su esquema no se modifica se encuentran en el caso puro "fluencia" (traslación de las condiciones del ensayo básico de fluencia sobre el material): los esfuerzos permanecen constantes y las deformaciones aumentan igual que el coeficiente de fluencia.

El hormigón a compresión, al nivel usual de las tensiones que aparecen bajo cargas permanentes, se aproxima bastante a un tal material. Pero en las estructuras de hormigón armado cuyo trabajo básico es a flexión, lo anterior queda distorsionado tanto por la fisuración, que aparece en las zonas traccionadas, como por la presencia de armaduras de acero, que no experimentan deformaciones diferidas.

Recientemente, se ha llevado a cabo una serie de estudios aproximados (4, 5) del comportamiento en el tiempo de diversos tipos de secciones usuales en hormigón armado, considerando la fisuración. En los mismos, se ha obtenido que el cociente entre las curvaturas diferida e instantánea de tales secciones, en la práctica, sólo depende (además de, claro está, las deformaciones diferidas del hormigón) de las características de la sección; y no, por ejemplo, de la flexión actuante.

Si no se consideran reajustes diferidos de esfuerzos, parece en principio razonable que el citado cociente pueda extrapolarse como factor de paso, que se suele designar como λ , para calcular las flechas diferidas de las piezas a partir de las instantáneas, si la sección varía poco en cada pieza y la zona fisurada es claramente predominante sobre la que no lo está (4, 5). Pues bien, la prevista posibilidad de trasladar a flechas lo que ocurre para curvaturas, cuando no hay

redistribución de esfuerzos en el tiempo, ha sido confirmada en un reciente estudio experimental (6), al haberse obtenido una clara linealidad entre flechas y curvaturas diferidas en ensayos de vigas simples.

En caso de que se produjera una redistribución de esfuerzos en el tiempo, dicha extrapolación ya no parece posible. Esto es algo que, como se dijo antes, no se contempla normalmente, ni siquiera en forma de advertencia, reserva o matización genérica en la normativa. Y, sin embargo, como se verá en lo que sigue, existen distintas situaciones en que tal redistribución puede no ser despreciable.

Pero son precisamente las circunstancias mencionadas (λ es independiente de la flexión, cada pieza se encuentra fisurada en su mayor parte y las armaduras se distribuyen por igual a lo largo de la misma), que dan lugar a extrapolar a las flechas el uso^{II} de λ como factor único, lo que permite concluir que tal redistribución pueda despreciarse muchas veces, al cumplirse ciertas condiciones estructurales antes apuntadas.

En efecto, si λ es prácticamente constante en la estructura, no sólo es posible la extrapolación de curvaturas a flechas sino que, en dichas condiciones, como las flechas diferidas son proporcionales a las instantáneas, no existen reajustes diferidos de esfuerzos ya que la compatibilidad inicial de deformaciones se mantiene en el tiempo.

En la realidad, ni las piezas están siempre fisuradas casi en su totalidad ni la armadura se distribuye en ellas por igual, con lo que en principio no hay razón para pensar en la existencia de tal proporcionalidad.

En todo caso, se muestra necesario conocer el comportamiento diferido de las zonas no fisuradas de la estructura para poder concluir algo al respecto. A este propósito se dedica el apartado que sigue.

COMPORTAMIENTO EN EL TIEMPO DE LAS ZONAS NO FISURADAS

Según lo anterior, procede estudiar el comportamiento diferido en servicio de las zonas no fisuradas en estructuras de hormigón armado. Por supuesto, dada la pequeña

magnitud de las tensiones existentes en ellas, estas zonas se encuentran normalmente dentro del rango elástico lineal.

Ello se puede tratar de realizar de manera similar a lo hecho para las zonas fisuradas (4, 5), pero aquí resulta muy conveniente utilizar el tratamiento de sección total a partir de la sección neta de hormigón (1), que es la que fluye y retrae. Aun formulado originalmente en términos instantáneos (y para hormigón pretensado, aunque es totalmente general), el propio hecho de que el mismo separe las partes con propiedades diferidas (hormigón) y las que no las tienen (armaduras) permite su inmediata extrapolación al ámbito del tiempo, como se verá más adelante.

Tratamiento de sección utilizado

Recordemos en qué consiste dicho tratamiento (1). Se basa en obtener el incremento de fuerza ΔP en cada armadura (activa o pasiva) o conjunto de ellas, para cada incremento de deformación que actúa sobre la sección neta de hormigón; para ello, se establece el equilibrio (todo ΔP de tracción en la armadura supone, el mismo ΔP de compresión sobre el hormigón, y viceversa) y la compatibilidad (las deformaciones en la armadura y el hormigón circundante son iguales).

Con comportamiento lineal, para una armadura o conjunto de armaduras de área A_s y excentricidad (relativa a la sección neta de hormigón) de valor e , se tiene

$$\Delta P = \frac{E_s \cdot A_s (\Delta \varepsilon - \Delta \gamma \cdot e)}{1 + n \cdot A_s \left(\frac{1}{A_c} + \frac{e^2}{I_c} \right)}$$

donde $\Delta \varepsilon$ y $\Delta \gamma$ definen el citado incremento de deformación (respectivamente, de elongación y de curvatura), ajeno siempre al producido por el propio ΔP sobre el hormigón; $n = \frac{E_s}{E_c}$, y, respectivamente, A_c e I_c son el área y la inercia de la sección neta de hormigón.

La figura adjunta muestra un esquema de la situación existente. En cuanto al convenio de signos, la curvatura tiene el signo habitual de los momentos (esto es, positiva para compresiones arriba), el incremento ΔP en la armadura y la elongación son positivos si corresponden a tracción y la excentricidad lo es si va hacia arriba (Fig. 1).

Aplicación del tratamiento anterior en el ámbito instantáneo

Aplicando lo anterior al caso que aquí interesa, una sección genérica de hormigón armado no fisurada con armaduras de tracción y compresión, sometida a una flexión M , como la representada en la figura 2, resulta lo siguiente:

– En la armadura de tracción,

$$\Delta P = -n \cdot A_s \frac{\frac{\Delta p'}{A_c} + \frac{M + \Delta P' \cdot e'}{I_c} \cdot e}{1 + n \cdot A_s \left(\frac{1}{A_c} + \frac{e^2}{I_c} \right)}$$

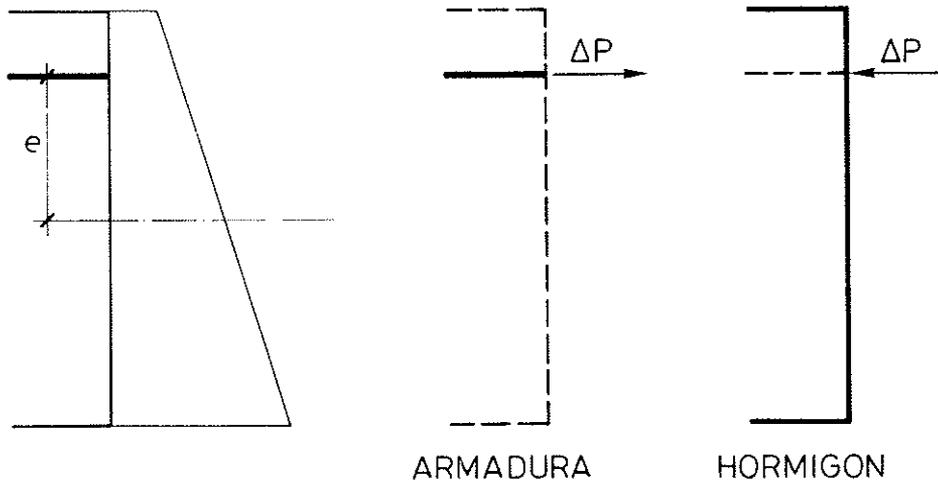


Fig. 1.

—en la armadura de compresión,

$$\Delta P' = -n \cdot A'_s \frac{\frac{\Delta P}{A_c} + \frac{M + \Delta P \cdot e}{I_c} \cdot e'}{1 + n \cdot A'_s \left(\frac{1}{A_c} + \frac{e'^2}{I_c} \right)} ;$$

siendo, respectivamente, A_s y A'_s las áreas, y e y e' las excentricidades, de las armaduras de tracción y compresión. Hay que observar que, con el convenio de signos tomado, e es negativa y e' positiva.

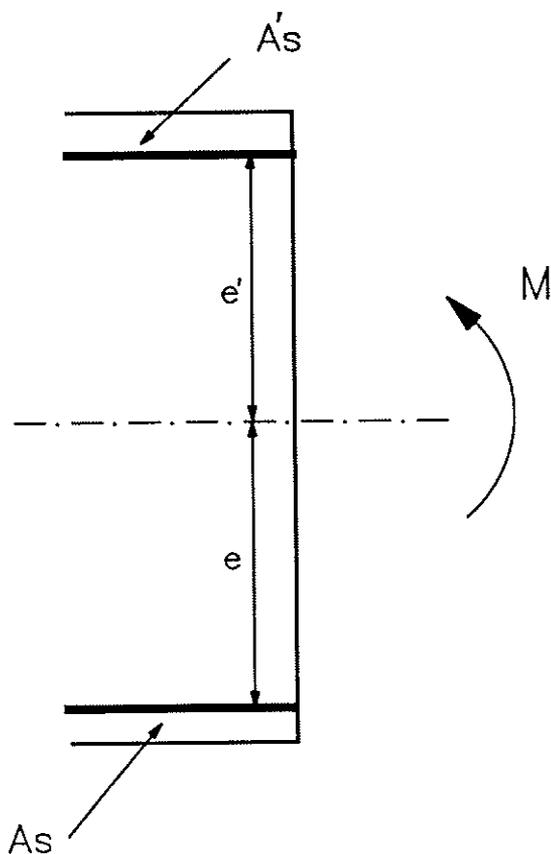


Fig. 2.

Evidentemente, a partir de las dos expresiones anteriores se obtienen ya ΔP y $\Delta P'$ en función de M y de los datos de las secciones netas.

En efecto, definiendo

$$r = 1 + n \left(\frac{A_s + A'_s}{A_c} + \frac{A_s \cdot e^2 + A'_s \cdot e'^2}{I_c} \right) + n^2 \cdot \frac{A_s \cdot A'_s}{A_c} \cdot \frac{(e - e')^2}{I_c} ,$$

que es un factor adimensional siempre positivo (todos sus términos lo son), cuyo

valor normalmente es sólo un poco mayor que la unidad, se obtiene

$$\Delta P = -M \cdot n \cdot A_s \frac{\frac{e}{I_c} + \frac{n \cdot A'_s}{A_c} \cdot \frac{e - e'}{I_c}}{r} .$$

Y, por supuesto, $\Delta P'$ toma la misma forma, pero intercambiando los correspondientes símbolos prima, lo que no modifica para nada el valor del factor r .

Al expresar la curvatura de la sección bajo la acción del momento M , incluyendo el efecto de los ΔP y $\Delta P'$ que el propio momento genera en las armaduras, y sustituir los valores obtenidos para éstos, resulta finalmente

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \frac{M + \Delta P \cdot e + \Delta P' \cdot e'}{E_c \cdot I_c} = \\ &= \frac{M \left[1 + n \left(\frac{A_s + A'_s}{A_c} \right) \right]}{E_c \cdot I_c \cdot r} \end{aligned}$$

Si A es el área total de la sección (homogeneizada), esto es,

$$A = A_c + n (A_s + A'_s) ,$$

se obtiene

$$\gamma_0 = \frac{M \cdot \frac{A}{A_c}}{E_c \cdot I_c \cdot r} .$$

Un resultado lateral, pero interesante, que se deriva de lo anterior es precisamente la inercia total de la sección (homogeneizada) en función de los datos de las secciones netas. Dicha inercia viene dada por

$$\begin{aligned} I &= I_c \cdot \frac{A_c}{A} \cdot r = \\ &= I_c \cdot \frac{A_c}{A} \left[1 + n \left(\frac{A_s + A'_s}{A_c} + \frac{A_s \cdot e^2 + A'_s \cdot e'^2}{I_c} \right) + \right. \\ &\quad \left. + n^2 \cdot \frac{A_s \cdot A'_s}{A_c} \cdot \frac{(e - e')^2}{I_c} \right] . \end{aligned}$$

Como es natural, se cumple siempre que $I > I_c$ (es inmediato comprobar que $A_c \cdot r > A$).

Si, por ejemplo, $A'_s = 0$ la inercia total es

$$I = I_c \cdot \frac{A_c}{A} \left[1 + n \cdot A_s \left(\frac{1}{A_c} + \frac{e^2}{I_c} \right) \right]$$

Hasta aquí el análisis relativo a situación instantánea, que es la que corresponde a la formulación original del tratamiento empleado.

Pero, como ya se apuntó, el anterior proporciona precisamente una base muy adecuada para el análisis en el tiempo de la sección, que es el que aquí procede, a través de una aproximación suficientemente ajustada para lo que se pretende y que no requiere el uso de ecuaciones diferenciales. Además, esta aproximación permite establecer un factor que relaciona la curvatura diferida con la inicial, al igual que el factor λ de (4,5).

Análisis diferido con fluencia

Lo estudiado antes, correspondería entonces a la situación inicial. Como se supone que la flexión externa M surge en un cierto instante y permanece sin variación en el tiempo, a lo largo del mismo sólo aparecen, adicionalmente, unos ΔP_{dif} y $\Delta P'_{dif}$ debidos a la retracción y a la fluencia del hormigón.

Entonces, si se define

$$M^* = M + \Delta P \cdot e + \Delta P' \cdot e'$$

(esto es, M^* es la flexión inicial sobre la sección neta de hormigón) y φ es el coeficiente de fluencia, la curvatura diferida por fluencia puede expresarse en la forma

$$\gamma_{dif} = \frac{M^* \cdot \varphi + \Delta P_{dif} \cdot (1+k \cdot \varphi) \cdot e + \Delta P'_{dif} \cdot (1+k \cdot \varphi) \cdot e'}{E_c \cdot I_c}$$

donde, para las tensiones incrementales diferidas del hormigón se ha utilizado la misma formulación de fluencia empleada para sección fisurada en (4,5), aunque en esta ocasión se ha aplicado directamente a los correspondientes momentos.

Como los ΔP_{dif} y $\Delta P'_{dif}$ se producen tanto por la fluencia originada por M^* como por la creada por ellos mismos, se aprecia que todo lo que aparece en las expresiones para situación instantánea ha de hacerlo igualmente en las expresiones en el tiempo, pero sustituyendo M por $M^* \cdot \varphi$ y, respectivamente, los incrementos instantáneos ΔP y $\Delta P'$

por $\Delta P_{dif} \cdot (1+k \cdot \varphi)$ y $\Delta P'_{dif} \cdot (1+k \cdot \varphi)$.

Es fácil constatar que ahora, en las expresiones donde ya no aparezcan los incrementos ΔP_{dif} y $\Delta P'_{dif}$, los productos de éstos por el factor $(1+k \cdot \varphi)$ dejan su rastro gracias a las áreas A_s y A'_s que siempre aparecen también como factores junto a ellos. Esto proporciona una regla muy sencilla para completar las distintas expresiones ahora operativas a partir de las instantáneas.

Como consecuencia, el factor que sustituye a r será

$$r_{dif} = 1 + n \left(\frac{A_s + A'_s}{A_c} + \frac{A_s \cdot e^2 + A'_s \cdot e'^2}{I_c} \right) \cdot (1+k \cdot \varphi) + n^2 \cdot \frac{A_s \cdot A'_s}{A_c} \cdot \frac{(e-e')^2}{I_c} \cdot (1+k \cdot \varphi)^2$$

Y, ajustando según lo indicado, la primera expresión de γ_0 ya vista, se cumple

$$\gamma_{dif} = \frac{M^* \cdot \varphi \left[1 + n \left(\frac{A_s + A'_s}{A_c} \right) \cdot (1+k \cdot \varphi) \right]}{E_c \cdot I_c \cdot r_{dif}}$$

De ese modo, como $\gamma_0 = \frac{M^*}{E_c \cdot I_c}$, se llega a

$$\lambda = \frac{\gamma_{dif}}{\gamma_0} = \frac{\varphi \left[1 + n \left(\frac{A_s + A'_s}{A_c} \right) \cdot (1+k \cdot \varphi) \right]}{r_{dif}}$$

Análisis diferido incluyendo retracción

Veamos a continuación cómo se incorpora el efecto de la retracción al análisis anterior.

Si, de forma instantánea, actuase sólo sobre la sección una deformación de retracción ϵ_r (en este caso, se toma como positiva la contracción y no la elongación), se cumpliría

$$\Delta P = -n \cdot A_s \cdot \frac{\epsilon_r \cdot E_c + \frac{\Delta P'}{A_c} + \frac{\Delta P' \cdot e'}{I_c} \cdot e}{1 + n \cdot A_s \left(\frac{1}{A_c} + \frac{e^2}{I_c} \right)}$$

$$\Delta P' = -n \cdot A'_s \cdot \frac{\epsilon_r \cdot E_c + \frac{\Delta P}{A_c} + \frac{\Delta P \cdot e}{I_c} \cdot e'}{1 + n \cdot A'_s \left(\frac{1}{A_c} + \frac{e'^2}{I_c} \right)}$$

De las anteriores resulta

$$\Delta P = -\varepsilon_r \cdot E_s \cdot A_s \cdot \frac{1 + \frac{n \cdot A_s' \cdot e' \cdot (e' - e)}{I_c}}{r}$$

Y, de nuevo, $\Delta P'$ es igual pero con los correspondientes símbolos prima intercambiados, lo que no modifica el factor r .

Procediendo como antes para la flexión, y dado que la retracción no produce curvatura en la sección neta de hormigón, se tiene

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \frac{\Delta P \cdot e + \Delta P' \cdot e'}{E_c \cdot I_c} = \\ &= -\frac{\varepsilon_r \cdot E_s (A_s \cdot e + A_s' \cdot e')}{E_c \cdot I_c \cdot r} \end{aligned}$$

En el caso $e = -e'$ (excentricidades simétricas), puede apreciarse en la expresión que precede cómo la retracción genera una curvatura nula si $A_s = A_s'$ (simetría total), positiva si $A_s > A_s'$ y negativa si ocurre lo contrario (recuérdese que e es negativa); lo que era de esperar.

Al introducir ya el tiempo se cumple

$$\gamma_{\text{dif}} = \frac{\Delta P_{\text{dif}} \cdot (1+k \cdot \varphi) \cdot e + \Delta P'_{\text{dif}} \cdot (1+k \cdot \varphi) \cdot e'}{E_c \cdot I_c}$$

y ajustando convenientemente al ámbito diferido la expresión anterior de γ_0 , al igual que para la flexión, se llega a

$$\gamma_{\text{dif}} = -\frac{\varepsilon_r \cdot E_s (A_s \cdot e + A_s' \cdot e') \cdot (1+k \cdot \varphi)}{E_c \cdot I_c \cdot r_{\text{dif}}}$$

Por supuesto, en este marco temporal ya hay que tener presente que ε_r es en realidad una deformación diferida. Aunque ésta no comienza a actuar a la vez que la fluencia más importante, esto es, en el instante de la entrada en carga, sino antes, en la práctica se pueden hacer coincidir si su diferencia no es grande.

En definitiva, combinando ya flexión, retracción y fluencia, no resulta difícil comprobar que finalmente se obtiene

$$\lambda = \frac{\gamma_{\text{dif}}}{\gamma_0} = \frac{\varphi \left[1 + n \left(\frac{A_s + A_s'}{A_c} \right) \cdot (1+k \cdot \varphi) \right] - \frac{\varepsilon_r \cdot E_s (A_s \cdot e + A_s' \cdot e') \cdot (1+k \cdot \varphi)}{M^*}}{r_{\text{dif}}}$$

dado que entonces también $\gamma_0 = \frac{M^*}{E_c \cdot I_c}$ (se

toma como origen el instante de la aparición de la flexión; previamente, el efecto de la retracción y fluencia se obtendría de la expresión que precede a la anterior).

Como normalmente ocurre que $A_s > A_s'$ y, salvo ciertos casos de sección rectangular, $|e| \geq |e'|$, en la expresión anterior de λ el término relativo a la retracción es positivo (recuérdese de nuevo que e es negativa) y se suma al de la fluencia, colaborando entonces ambos a aumentar dicho factor en el tiempo. Esto es lo que ocurre siempre en sección fisurada, donde corresponde $\varphi + \varepsilon_r/\varepsilon_{c0}$, siendo ε_{c0} la deformación inicial del hormigón en una fibra de referencia de la cabeza de compresión (4, 5).

Por otro lado, este término de la retracción es en general pequeño ya que, sobre todo, en las zonas no fisuradas la armadura suele estar más o menos equilibrada arriba y abajo (además de no ser importante, aunque la flexión M^* tampoco lo es). Dicho término puede ser del mismo orden o menor que el que aparece en sección fisurada; donde, por cierto, nunca es nulo, cosa que sí puede ocurrir aquí. Ello se ve más o menos compensado por el hecho de que el término relativo a la fluencia del numerador es aquí siempre mayor.

Las expresiones obtenidas más arriba admiten la simplificación práctica de, por ejemplo, eliminar el último término de r y r_{dif} , normalmente muy inferior al resto.

De forma semejante a lo hecho para secciones fisuradas (4, 5), si lo que interesa es el valor final ($t \rightarrow \infty$) de λ o su valor para un tiempo más o menos largo, situaciones más frecuentes, es práctico sustituir el término $n(1+k \cdot \varphi)$ por un valor constante, introduciendo muy poco error. Pero, tanto para unas secciones como para otras, el λ así ajustado no debe emplearse para tiempos cortos: hay que tomar entonces la expresión original completa, en cada caso; o, a lo sumo, sustituir $1+k \cdot \varphi$ por la unidad.

Otros casos estructurales

Hasta el momento, se han considerado

zonas no fisuradas sometidas sólo a flexión.

¿Qué ocurre en las estructuras de hormigón armado con elementos sometidos a flexocompresión?

Lo único nuevo que aparece son los pilares, a los cuales puede aplicarse un modelo similar al visto para piezas a flexión no fisuradas, incluyendo el efecto de la compresión en las curvaturas inicial y diferida. Este efecto será en general pequeño y similar al de la retracción, según la mayor o menor asimetría entre la armadura de compresión y la de tracción.

Si se utilizan expresiones en función de las acciones netas, similares a las conocidas, al existir ya una compresión es muy conveniente tomar la flexión con respecto al baricentro de la sección neta de hormigón.

En definitiva, para esta situación no es difícil comprobar que se tendrá

$$\lambda = \frac{\varphi \left[1 + n \left(\frac{A_s + A'_s}{A_c} \right) \cdot (1 + k \cdot \varphi) \right] - \frac{\left(\frac{N}{A_c} \cdot \varphi \cdot n + \varepsilon_r \cdot E_s \right) \cdot (A_s \cdot e + A'_s \cdot e') \cdot (1 + k \cdot \varphi)}{M^*}}{r_{lit}}$$

donde N es el esfuerzo axial (tomado como positivo si es de compresión) y M* tiene el mismo significado que antes, pero teniendo en cuenta que los ΔP y ΔP' iniciales corresponden ya a la situación de flexocompresión. Hay que recordar que N no influye en la curvatura de la sección neta de hormigón si la flexocompresión se refiere siempre al baricentro de la misma.

Examinando la expresión anterior se observa que, por supuesto, el efecto de la compresión se suma al de la retracción. Pero el término conjunto que resulta no aumenta, en líneas generales, dado que entonces M* será normalmente mayor que en el caso donde no exista compresión. Por lo demás, si no existiera flexión, o fuera parecida en ambos sentidos, la armadura sería simétrica y el término se anularía.

De nuevo, para las situaciones más frecuentes, resulta práctico y suele ser suficientemente ajustado sustituir, en el factor λ, el término n (1+k·φ) por un valor constante, con las limitaciones antes mencionadas.

Comentarios finales

Como en todo lo anterior las acciones supuestas han sido de tipo mecánico (cargas), cabe preguntarse qué sucede con las acciones geométricas permanentes o de larga duración.

Normalmente, es raro que existan acciones geométricas permanentes (en el mismo sentido que las cargas, esto es, que actúen siempre o casi, con un valor prácticamente constante) interfiriendo con la fluencia, salvo los movimientos de apoyo.

Aparte de la retracción del hormigón, que es una propiedad del hormigón que puede tratarse como una tal acción geométrica (aunque, por supuesto, su valor no es constante en el tiempo), existen algunas deformaciones cuya variación en el tiempo puede ser relativamente conocida y cuyos efectos pueden ser significativos, como es el caso de las deformaciones de origen térmico. Pero raramente pueden dar lugar a unos efectos diferidos considerables.

Volviendo a la retracción, y en la idea citada de tratarla como una acción estructural, existen casos para los que cabe la posibilidad de tener que evaluar también la interacción entre la retracción y la fluencia del hormigón, pero a escala estructural. Se trata de aquéllos en que la retracción origina esfuerzos hiperestáticos de cierta importancia.

En cualquier caso, es sabido que las acciones geométricas que inciden sobre la fluencia tienden a mantener las deformaciones sin variación en el tiempo, pero no los esfuerzos. Pero, incluso en los casos en que dichas acciones generen esfuerzos de importancia, ello no significa que siempre haya que proceder a un análisis en el tiempo, dado que la tendencia general es que los esfuerzos disminuyan con el tiempo; con lo que, en la práctica, la situación más desfavorable, el instante o etapa en que aparece la acción, se conoce sin necesidad de ello.

Por otra parte, está claro que las estructuras que, normalmente por razones construc-

tivas, sufren una evolución en su esquema, ya sea longitudinal como transversalmente, requieren por lo general un análisis en el tiempo para evaluar tanto los reajustes diferidos de esfuerzos como la evolución de flechas y giros.

COMPARACION DE LOS FACTORES EN ZONAS FISURADAS Y NO FISURADAS

De cara al problema principal que se trata de analizar, como ya se indicó es muy importante comparar los factores λ que se obtienen para secciones fisuradas (4, 5) y sin fisurar.

Según los argumentos expuestos algo más arriba, al comentar las expresiones obtenidas y evaluar sus términos en líneas generales, la comparación admite ciertas simplificaciones. Por ello, para no complicar innecesariamente las cosas, una aproximación que se muestra razonable consiste en comparar dichos factores asimilando en ambos casos los valores de los respectivos términos del numerador donde aparecen de forma directa la fluencia y la retracción (suponiendo entonces, naturalmente, que se

trata del mismo hormigón). Siendo así, pueden compararse sin más los coeficientes o valores reducidos del factor de paso λ que resultan al prescindir de dichos términos (incluyendo ya, por supuesto, las sustituciones por valores constantes indicadas más arriba, relativas a los términos en donde aparece $n(1 + k \cdot \phi)$).

Para poder efectuar dicha comparación de manera representativa, en el gráfico adjunto figuran los valores de dichos coeficientes o valores reducidos para una sección rectangular genérica, de dimensiones $b \times h$ (ancho \times canto), en función de la cuantía de tracción y para varias cuantías de compresión (0,001, 0,005 y 0,01). El coeficiente de equivalencia es $n = 7$ y las profundidades de las armaduras (respecto a la fibra más comprimida) son tales que, para la de tracción, $d = 0,9 h$ y, para la de compresión, $d' = 0,1 d$.

Las curvas superiores, marcadas con diversos símbolos sobre línea continua, corresponden a sección sin fisurar ($1/r_{inf}$) y las inferiores, sólo en línea continua, a sección fisurada $\left(\frac{x_0}{d} \cdot \frac{1}{1+150 \cdot \rho'}\right)$ (4).

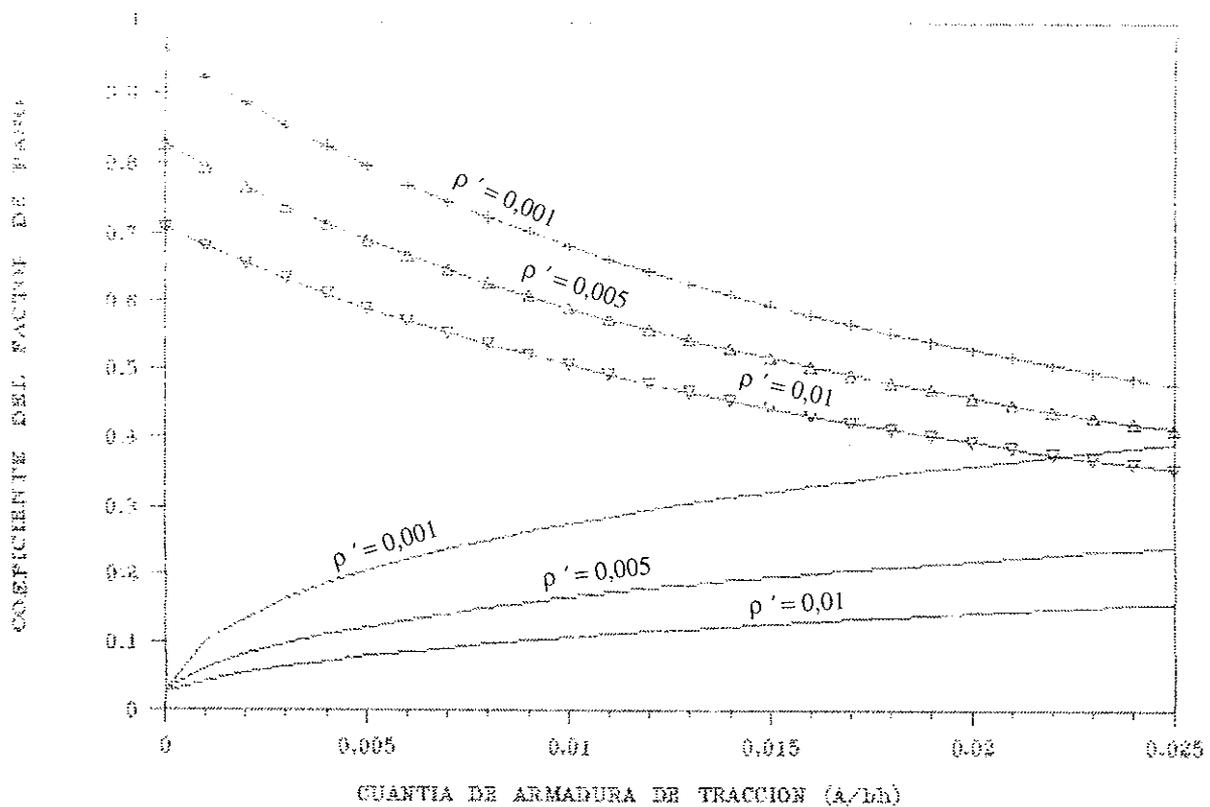


Fig. 3.

Dentro de cada grupo de curvas, éstas se desplazan hacia abajo al aumentar la cuantía de compresión. Por otro lado, debe indicarse que, aunque en las expresiones originales de ambos grupos aparecen cuantías relativas a distintas secciones, todas las curvas del gráfico están, por supuesto, referidas a un único tipo de cuantía, la relativa a la sección total $b \times h$.

En el gráfico se confirman cosas esperables para las secciones que han sido estudiadas más arriba, las no fisuradas. Así, el hecho de que ambas armaduras supongan un obstáculo a la libre deformación diferida del hormigón hace prever que tanto el valor reducido como el propio λ disminuyan al aumentar sus cuantías. En sentido contrario, cuando ambas cuantías tienden a anularse, el valor reducido debe tender a la unidad, ya que para sección no fisurada sin armaduras ha de cumplirse que $\lambda = \phi$ (en este caso, claro está, la retracción no genera curvatura).

Con respecto a las secciones fisuradas, está claro que lo que modifica las cosas respecto a lo anterior, llevando por ejemplo a que la cuantía de tracción tenga una influencia claramente en sentido contrario, es que la sección de hormigón que fluye y retrae no es constante de un caso a otro.

Evidentemente, llegado el momento de comparar sobre el gráfico las zonas fisuradas y no fisuradas en casos concretos, en principio pueden presentarse situaciones muy diversas respecto a las cuantías existentes en unas y otras. No obstante, es posible marcar ciertas tendencias generales que se dan en la realidad, las cuales se examinan a continuación.

En cuanto a la cuantía de tracción, si bien en las zonas fisuradas es superior a la de las no fisuradas, existe una cierta continuidad marcada por la prolongación en éstas, por anclaje y construcción, de las armaduras adyacentes; por lo que, en general, la diferencia no es demasiado acusada. En lo que atañe a la cuantía de compresión, ésta suele presentar diferencias inferiores entre ambas zonas, e incluso es posible que sea superior en las zonas no fisuradas (por ejemplo, zonas donde aún se prolonga la armadura de tracción para momentos de signo contrario en vigas continuas con poca armadura de compresión).

Dadas las influencias de las cuantías en

unas y otras zonas, y en particular la ya citada de la cuantía de tracción, la situación que acaba de mencionarse supone una tendencia al acercamiento de los factores λ de ambas (aunque el de las zonas no fisuradas estará prácticamente siempre por encima), situándose normalmente en el gráfico dentro de un entorno más o menos central.

Por otra parte, según lo indicado al principio, está claro que si el factor λ , que marca la progresión de la deformabilidad en cada zona, no alcanza un valor muy distinto en sus distintas zonas, en las estructuras de hormigón armado que no sufren evolución desde su entrada en carga es válido augurar que no se producirá una apreciable redistribución diferida de esfuerzos. Y, entonces, no sólo no es necesario un análisis en el tiempo sino que, al mismo tiempo, las flechas diferidas pueden calcularse multiplicando las iniciales por $1 + \lambda$ (tomando aquí λ como un valor medio del correspondiente a las diferentes zonas de la estructura).

Es conveniente subrayar que lo importante en todo este asunto es el comportamiento del conjunto de la estructura respecto a su media y no el particular de una zona concreta (aunque éste se aleje mucho de la media, si la zona no es extensa ello afecta poco globalmente).

Por tanto, ante la situación que, como se ha expuesto antes, se da en condiciones normales, cabe concluir que lo anterior se podrá tomar como regla general. En cuanto al valor de λ que deberá utilizarse para obtener las flechas diferidas, está claro que el mismo será normalmente bastante inferior a ϕ (e incluso a $\phi + \epsilon_s/\epsilon_{co}$). Pero, en caso de que no se requiera aquilatar el valor de λ para calcular las flechas diferidas, en las condiciones normales citadas (que deben apreciarse en cada caso) siempre se puede tomar un valor superior sencillo, que está por el lado de la seguridad.

CONCLUSION

Se ha llevado a cabo un análisis diferido de secciones de hormigón armado, no fisuradas, en función de las secciones netas de hormigón (que es la parte que fluye y retrae) y acero (armaduras de compresión y tracción).

La aproximación analítica desarrollada, necesaria para conocer el comportamiento diferido de las zonas no fisuradas, es suficientemente ajustada y bastante sencilla, extrapolando al tiempo un tratamiento de sección establecido en su día para un marco distinto, sin requerir el empleo de ecuaciones diferenciales. Por otro lado, la misma permite llegar a resultados semejantes a otros previos para secciones en zonas fisuradas; en particular, al factor de paso λ entre curvaturas instantáneas y diferidas, que es extrapolable a las flechas.

Todo ello ha facilitado la comparación del comportamiento diferido de las zonas fisuradas y no fisuradas, imprescindible para los objetivos de este trabajo.

Como consecuencia del análisis y la comparación efectuados, se puede concluir que, salvo casos especiales, en la práctica normal las estructuras de hormigón armado que no sufren evolución desde su entrada en carga, bajo cargas permanentes o de larga duración experimentan en el tiempo sólo ligeras redistribuciones de esfuerzos, normalmente despreciables. Ello se debe a que el factor λ , que define la progresión de la deformabilidad en cada zona de la estructura, no suele alcanzar un valor muy distinto de unas zonas a otras (lo que debe estimarse y confirmarse en cada caso).

En tales condiciones, se concluye que es innecesario abordar un análisis diferido propiamente dicho, puesto que los esfuerzos pueden considerarse invariables; además, las flechas (y los giros) totales a lo largo del tiempo pueden calcularse multiplicando los instantáneos por $1+\lambda$, donde λ representa un valor medio del mismo factor (relativo a sección) en la estructura.

Para ello, hay que recordar que:

—En las zonas no fisuradas,

$$\lambda = \frac{a \cdot \varphi + a' \cdot \varepsilon_r + a'' \cdot N}{r_{dif}},$$

con los significados (coeficientes a , a' , a'' y r_{dif}), posibles simplificaciones y signos que se han mencionado más arriba.

—En las zonas fisuradas (con los significados indicados en las referencias 4 y 5),

$$\lambda = \frac{x_0 - d'}{d - d'} \cdot \frac{1}{1 + 20 \cdot \frac{A'_s}{b \cdot h_c}},$$

para sección en T o en cajón; o bien

$$\lambda = \frac{x_0}{d} \cdot \frac{1}{1 + 150 \cdot \rho'},$$

para sección rectangular (y también para sección en T o en cajón, en las circunstancias señaladas en la referencia 5).

Si se obtiene el valor medio de λ , el factor que se aplica a las flechas no sólo tiene en cuenta el efecto de la retracción en las mismas, sino que lo establece, al igual que el de la fluencia, para cada caso concreto en cuanto a hormigón y condiciones de carga existentes. Por otra parte, como se mostró en (4, 5), el citado valor suele resultar menor que, por ejemplo, el propuesto de forma genérica por la normativa española (3).

En aquellos casos en que no sea preciso aquilatar el valor de λ para calcular las flechas diferidas, y dentro de las condiciones mencionadas de semejanza de su valor, siempre es posible tomar un valor superior sencillo (por ejemplo, $\lambda = \varphi + \varepsilon_r / \varepsilon_{co}$, donde ε_{co} es la deformación inicial del hormigón en una fibra de referencia de la cabeza de compresión), lo que está por el lado de la seguridad.

Por lo demás, debe tenerse en cuenta que las estructuras de hormigón cuyo esquema evoluciona, ya sea longitudinal como transversalmente, requieren normalmente un análisis en el tiempo (más o menos preciso, según su importancia y envergadura) para evaluar tanto los reajustes diferidos de esfuerzos como la variación de flechas y giros. Esta situación evolutiva no es demasiado frecuente en hormigón armado, y cuando se produce (estructuras de edificación, por ejemplo) las acciones afectadas por las etapas de evolución vienen a tener una incidencia relativamente menor en tales reajustes (así, por ejemplo, peso propio en sucesivos escalones de carga, pequeños en el conjunto de las cargas permanentes; sobre todo para luces que no sean fuertes).

Por último, en cuanto a las acciones geométricas que inciden sobre la fluencia, aun-

que no es frecuente que generen efectos considerables en el tiempo, no suelen dar lugar de todos modos a un análisis diferido. Ello responde a que, por un lado, dichas acciones tienden a modificar poco la deformabilidad estructural en el tiempo y, por otro, los esfuerzos más desfavorables que originan suelen ser los iniciales.

REFERENCIAS

1. MURCIA, J. Tratamiento, en sección no fisurada, de la sección homogeneizada de hormigón y acero a partir de la neta de hormigón. *Hormigón y Acero* nº 114 (pp. 23-31). Madrid, 1975.
2. COMISION PERMANENTE DEL HORMIGON. EP-80: *Instrucción para el proyecto y la ejecución de obras de hormigón pretensado*. Ministerio de Obras Públicas y Urbanismo. Madrid, 1980.
3. COMISION PERMANENTE DEL HORMIGON. EH-91: *Instrucción para el proyecto y la ejecución de obras de hormigón en masa o armado*. Ministerio de Obras Públicas y Transportes. Madrid, 1991.
4. MURCIA, J. Análisis aproximado en el tiempo de secciones de hormigón armado en servicio. Propuesta de un nuevo factor de cálculo de flechas diferidas. *Hormigón y Acero* nº 181 (pp. 9-17). Madrid, 1991. (Comentarios del autor sobre este artículo en *Hormigón y Acero* nº 183, pp. 9-10. Madrid, 1992).
5. MURCIA, J. Análisis diferido en servicio de secciones en T y en cajón de hormigón armado. Factor práctico para el cálculo de flechas diferidas. *Hormigón y Acero* nº 183 (pp. 19-25). Madrid, 1992.
6. SERRA, I., MARI, A.R., MARTINEZ ABELLA, F. & LOPEZ-ALMANSA, F. Experimental measurement of creep and shrinkage of early-demolded reinforced concrete beams. *Proceedings of the RILEM International Symposium on Creep and Shrinkage of Concrete 'Concreep 5'*. Barcelona, 1993.

RESUMEN

En el proyecto de estructuras de hormigón armado no se realiza propiamente un análisis en el tiempo para considerar los

efectos de la retracción y la fluencia del hormigón. Normalmente, en la práctica, todo se reduce a calcular las flechas diferidas, multiplicando las instantáneas por un factor que está ligado al coeficiente de fluencia.

En este artículo se trata de delimitar esa cuestión empleando un razonamiento sencillo, pero de manera rigurosa; y, en particular, se justifica cómo en la inmensa mayoría de tales estructuras ello tiene razón de ser. Aunque el factor que se propone para las flechas es normalmente menor y depende no sólo de la fluencia sino también de la retracción.

A tal objeto, se ha desarrollado una aproximación analítica para prever el comportamiento diferido de las zonas no fisuradas, bastante sencilla y suficientemente ajustada, extrapolando al ámbito del tiempo un tratamiento de sección en función de secciones netas de hormigón y acero.

SUMMARY

When designing reinforced concrete structures, taking into account the effects of shrinkage and creep, an actual time-dependent analysis is normally not performed. In practice, nothing but delayed deflections are calculated. These deflections are obtained by multiplying the initial (instantaneous) ones by a factor that is linked to the creep coefficient.

Using a simple but accurate reasoning, this paper deals with the aforementioned matter in order to establish its limits. In particular, it is shown that in most cases such a procedure is justified for reinforced concrete. Although the factor that is proposed to obtain the deflections is normally less and it depends on both creep and shrinkage.

To this purpose, an analytical approach to predict the behaviour of the cracked structural parts has been developed. This approach extrapolates to the time-dependency range a method of cross-sectional calculation that considers separately the pure concrete and steel areas.



BASES DE DATOS

Consejo Superior de Investigaciones Científicas

Base de Datos Referencial
especializada en publicaciones
periódicas españolas de
CIENCIA Y TECNOLOGIA

ICYT

TEMATICA: Agronomía, Astronomía, Astrofísica, Ciencias de la Vida, Ciencias de la Tierra y el Espacio, Farmacología, Física, Matemáticas, Química y Tecnología.

FUENTES: 525 publicaciones periódicas

PERIODO DE COBERTURA: Desde 1979 hasta la actualidad

VOLUMEN: 59.000 referencias

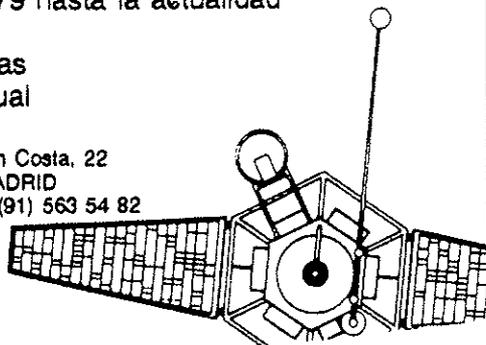
CRECIMIENTO ANUAL: 6.500 referencias

PERIODO DE ACTUALIZACION: Mensual

PRODUCTOR:

INSTITUTO DE INFORMACION Y
DOCUMENTACION EN CIENCIA Y
TECNOLOGIA (ICYT)

c/ Joaquín Costa, 22
28002 MADRID
Teléfono (91) 563 54 82



Otras Bases de Datos:

IME: Medicina y Areas relacionadas

ISOC: Ciencias Sociales y Humanidades

CIRBIC: Catálogo Colectivo de Libros y Revistas de las
Bibliotecas del CSIC

Para información y suscripciones:

SERVICIO DE DISTRIBUCION DE INFORMACION

Pinar, 19

28006 MADRID

Teléfono (91) 585 56 48/5649/5668

Propuesta de normativa de criterios de proyecto de estructuras de hormigón en instalaciones nucleares

Miguel Díaz-Llanos Ros
Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos
Director Ingeniería Civil y Estructural
Empresarios Agrupados

INTRODUCCION

El interés manifestado por los Organismos Oficiales en disponer de una normativa española para las Instalaciones Nucleares, creó un grupo de trabajo específico, dentro de la Comisión Permanente del Hormigón con una representación de profesionales tanto de los organismos públicos como privados.

Este grupo de trabajo ha decidido dar a conocer una parte de la futura normativa que aplicará a los criterios de proyecto de estructuras para dichas instalaciones. Por lo tanto, se adjunta el texto actual que presenta, parcialmente, los criterios de proyecto.

ARTICULO 1. CAMPO DE APLICACION DE LA INSTRUCCION

1.1. Ambito de aplicación

Se refiere la presente Instrucción a las construcciones, estructuras y elementos estructurales de hormigón, en masa, armado o pretensado destinadas a la construcción de Instalaciones Nucleares, fabricados con materiales que cumplan las condiciones indicadas en la misma.

Se consideran Instalaciones Nucleares las definidas en la Ley 25/1964 sobre Energía Nuclear. Esta Instrucción será asimismo aplicable a aquellas instalaciones radiactivas para las que así lo determine el Consejo de Seguridad Nuclear.

Expresamente se excluyen:

–Los hormigones especiales, tales como ligeros, refractarios y los compuestos con amiantos, u otras sustancias análogas.

–Las estructuras mixtas de hormigón y perfiles de acero.

Esta Instrucción se complementa con las vigentes EH y EP, por lo que serán de aplicación al caso de Instalaciones Nucleares todas aquellas prescripciones de las citadas Instrucciones que se refieren a aspectos no incluidos en la presente.

El autor del proyecto y el director de la obra están obligados a conocer y tener en cuenta las prescripciones de la presente Instrucción pero pueden, bajo su personal responsabilidad, emplear sistemas de cálculo, disposiciones constructivas, etc., diferentes.

Comentarios

Esta Instrucción incluye especificaciones relativas a los hormigones pesados, así como a los hormigones que vayan a estar expuestos, de forma habitual, a temperaturas superiores a 70°C.

1.2. Clasificación de seguridad de las estructuras

Las estructuras para Instalaciones Nucleares se clasifican en:

–Estructuras Relacionadas con la Seguridad Nuclear.

–Estructuras no Relacionadas con la Seguridad Nuclear.

Las Estructuras Relacionadas con la Seguridad Nuclear son aquellas que alojan, soportan o protegen equipos necesarios para garantizar el funcionamiento seguro de la instalación o para evitar y mitigar las consecuencias de incidentes anormales o accidentes, limitando la emisión de dosis de radiación al medio ambiente a valores admisibles. Estas estructuras se regirán por la presente Instrucción, complementada por las EH y EP vigentes.

Las restantes estructuras se considerarán no Relacionadas con la Seguridad Nuclear, por cuya razón se regirán, únicamente, por los requisitos de las vigentes Instrucciones EH y EP.

A su vez, dentro de las Estructuras Relacionadas con la Seguridad Nuclear, se distinguen las Estructuras de Contención, que son aquellas estructuras que proporcionan una envolvente estanca alrededor del Sistema del Reactor para que la emisión de sustancias radiactivas al medio ambiente no supere los límites admisibles en las condiciones postuladas de accidentes.

Comentarios

Los avances de la tecnología nuclear pueden hacer que, en el futuro, aparezcan nuevos conceptos de diseño de Centrales Nucleares que amplíen o reduzcan, con relación a la definición dada en el Articulado, los elementos industriales que deban ser protegidos con una Estructura de Contención.

1.3. Clasificación sísmica

El Sismo Base de Operación es el terremoto que razonablemente, pudiera afectar al emplazamiento de la instalación, durante el período operacional, teniendo en cuenta las condiciones regionales y locales, geológicas y sísmológicas, así como las características locales específicas del subsuelo.

Corresponde al movimiento vibratorio del terreno para el cual se proyectan las características de la instalación necesaria para la operación, de forma que permanezca funcional, sin riesgo para la salud y seguridad pública.

El Sismo de Parada Segura es el terremoto potencial máximo considerando la geología y sísmología regional y local, así como las características locales del subsuelo. Corresponde al terremoto para el cual se proyectan las estructuras, sistemas y componentes importantes para la seguridad, de forma que pueda realizarse una parada segura, sin riesgo para la salud y seguridad pública.

Desde el punto de vista sísmico, las estructuras se clasifican en:

–Categoría Sísmica I.

–Categoría Sísmica II.

–Categoría Sísmica III.

Se llaman estructuras Categoría Sísmica I, al conjunto de las estructuras que se proyectan para resistir, en condiciones de seguridad, el Sismo de Parada Segura. Estas estructuras también se proyectarán para que permanezcan operativas, tanto ellas mismas como los equipos que alojan, en caso de Sismo Base de Operación.

Las estructuras clasificadas en Categoría Sísmica II, se proyectan para requisitos sísmicos particulares, menos restrictivos que los correspondientes a Categoría Sísmica I, debiendo incluirse, entre otras, en este grupo, las instalaciones de tratamiento o almacenamiento de residuos nucleares, o los edificios cuyo fallo estructural pudiera afectar a las estructuras clasificadas en Categoría Sísmica I.

Las estructuras Categoría Sísmica III, se proyectan para cumplir los requisitos sísmicos de la Normativa general vigente en España para estructuras normales (como edificios de viviendas, industriales, etc.).

Comentarios

La Normativa vigente en España a que se refiere la Categoría Sísmica III es actual-

mente la Norma Sismorresistente PDS-1, 1974.

1.4. Exigencias relativas a clasificación de estructuras y garantía de calidad

El proyecto deberá incluir una lista de las estructuras, especificando su clasificación sísmica y de seguridad, y un documento que identifique, expresamente, las solicitudes e hipótesis de cálculo.

Las Estructuras Relacionadas con la Seguridad Nuclear estarán preceptivamente sometidas a Garantía de Calidad.

ARTICULO 27. CLASIFICACION DE LAS ACCIONES QUE SE DEBEN CONSIDERAR EN EL PROYECTO DE CENTRALES NUCLEARES

Las acciones que se tendrán en cuenta en el proyecto de centrales nucleares se clasifican según dos criterios: condiciones de planta (normal y anormal, incluyendo los estados de accidente) y condiciones del medio ambiente (normales, severas y extremas). Como consecuencia de estas clasificaciones se obtienen los grupos siguientes de acciones: normales, severas, extremas y anormales.

27.1. Acciones normales

Se denominan acciones normales a las producidas durante la construcción, pruebas y operación normal de la instalación nuclear, bajo condiciones normales del medio ambiente.

Las acciones normales están constituidas por:

27.1.1. Cargas permanentes (G)

Son las que actúan en todo momento y son constantes en posición y magnitud.

Comentarios

Las cargas permanentes incluyen, entre otras:

–Peso propio de la estructura.

–Peso propio de elementos no estructurales (pavimentos, cerramientos, etc.).

–Peso de equipos.

–Peso de instalaciones (tuberías, bandejas de cables, etc.).

A juicio del proyectista, podrán sustituirse los pesos de instalaciones y equipos ligeros, por una carga permanente puntual, lineal o superficial, debidamente justificada en cada caso.

27.1.2. Sobrecargas (Q)

Son cargas variables, producidas por la construcción, explotación, mantenimiento o reparación de la instalación nuclear. Deberán considerarse, al menos, las siguientes:

–Empujes hidrostáticos (H).

–Empujes del terreno (P_0).

–Acciones debidas a la descarga de válvulas u otro sistema de liberación de energía (P_v).

–Presiones diferenciales en operación normal (P_d).

–Reacciones de tuberías o equipos, en condiciones de operación normal o de parada (R_n).

–Presiones de prueba (P_t).

Comentarios

Las sobrecargas incluyen, entre otras:

–Sobrecargas de uso.

–Sobrecargas en fase de construcción.

Los empujes hidrostáticos incluyen:

–Empujes hidrostáticos debidos a líquidos contenidos en depósitos, piscinas, etc.

–Empujes hidrostáticos debidos al nivel freático exterior a los edificios.

En el cálculo de los empujes del terreno, deberán tenerse en cuenta las acciones debidas a:

–Equipos compactadores.

–Vehículos circulando próximos a los edificios.

–Edificios colindantes.

–Instalaciones provisionales de obra.

–Zonas provisionales de acopio de material.

Las acciones producidas por descarga de válvulas u otros sistemas de liberación de energía son debidas al funcionamiento de la instalación nuclear y generan diversos tipos de acciones, generalmente dinámicas: presiones, efectos térmicos, reacciones en anclajes, inundaciones de recintos, etc.

Las presiones de prueba se producen durante las pruebas de integridad estructural y estanqueidad de la instalación nuclear.

27.1.3. Acciones indirectas, en condiciones de operación normal o de parada

Las acciones indirectas, en condiciones de operación normal o de parada, están originadas por fenómenos capaces de engendrar fuerzas de un modo indirecto, al imponer deformaciones a la estructura, siendo, por tanto, función de las características de deformación de la propia estructura. En este grupo se incluyen las siguientes:

–Acciones producidas por las deformaciones a que dan lugar las variaciones térmicas (T). Entre ellas hay que considerar las que se producen en condiciones de operación normal, de parada y de prueba.

–Acciones reológicas (P). Son las producidas por deformaciones cuya magnitud es función del tiempo y del material de la estructura. Estas acciones pueden provenir de la retracción y la fluencia del hormigón o de la relajación del acero.

–Acciones producidas por movimientos impuestos (P_m). Son las originadas como consecuencia de la existencia de movimientos diferenciales, intencionados o no, entre diferentes secciones de la Estructura. Entre estas acciones cabe considerar las causadas por desplazamientos diferenciales de los apoyos de la estructura, como consecuencia de asentamientos y levantamientos del terreno de cimentación, o por movimientos intencionados de tales apoyos.

Las acciones reológicas (P) y las producidas por movimientos impuestos (P_m) se deberán incluir en G o en Q, según que tengan o no carácter de permanencia.

27.1.4. Acciones debidas al pretensado (P)

En general, las acciones debidas al pretensado, en un elemento estructural y en un instante dado, se deducen de las fuerzas de pretensado de los tendones que constituyen su armadura activa, que son tracciones variables a lo largo de su trazado y en el transcurso del tiempo. Para la determinación de estas acciones es de aplicación lo incluido en el articulado y comentarios de la Instrucción para el proyecto y la ejecución de obras de hormigón pretensado (EP).

27.2. Acciones severas

Son acciones variables, infrecuentes, que no siendo excepcionales, pueden presentarse con una pequeña probabilidad de actuación durante el período de vida de la instalación nuclear y bajo condiciones severas del medio ambiente.

Las acciones severas están constituidas por:

–Cargas de viento (W_0).

–Cargas del sismo base de operación (E_0).

En algunos casos, puede ser necesario considerar otro tipo de acciones, como las producidas por avenidas y oleajes.

Comentarios

Para la determinación de las acciones debidas al viento en condiciones ambientales severas, se realizarán mediciones y estudios específicos del mismo en la zona del emplazamiento.

27.3. Acciones extremas

Son acciones postuladas que pudieran producirse durante el período de vida de la instalación nuclear, bajo condiciones extremas del

medio ambiente o debidas a la acción del hombre, con carácter extraordinario.

Las acciones extremas están constituidas por:

- Cargas de viento extremo (W_s).
- Cargas del sismo de parada segura (E_s).

En algunos casos, puede ser necesario tener en cuenta, además, la actuación de las siguientes acciones:

- Impactos de posibles misiles externos.
- Cargas de avenidas y oleajes extremos.
- Ondas de presión debidas a explosiones o deflagraciones externas.

En todos los casos, el carácter externo debe entenderse como ajeno a la instalación nuclear.

Comentarios

Para la consideración en el proyecto de las acciones debidas a impactos de misiles, ondas de presión y avenidas u oleajes, deberán realizarse estudios específicos para determinar si su probabilidad de ocurrencia exige el tenerlos en cuenta.

27.4. Acciones anormales

Son acciones generadas por incidentes dentro de la instalación nuclear. Entre las acciones anormales se consideran las producidas por:

- Presión hidrostática, por inundación de compartimentos o carga de presurización (P_a).
- Reacciones de tuberías y equipos en condiciones de operación anormal (R_a).
- Efectos térmicos en situaciones anormales (T_a).
- Acciones producidas por la rotura accidental de una tubería de alta energía (Y_a).

Entre ellas habrán de considerarse:

- Impacto de misiles internos (Y_m).
- Cargas producidas por chorros a presión (Y_c).
- Reacciones debidas al latigazo producido por la rotura (Y_r).

Artículo 31. COEFICIENTES DE SEGURIDAD

La seguridad se introduce mediante dos coeficientes:

- Minoración de las resistencias del hormigón y del acero.
- Ponderación de las cargas y acciones en general.

31.1. Valores de los coeficientes

Los valores de los coeficientes se establecen en los Cuadros 31.1 y 31.2.

CUADRO 31.1
Estados límites últimos
Coefficientes de minoración de los materiales

Material	Nivel de control	Coefficiente
Acero	Intenso (1)	1,10
Hormigón	Normal	1,50
Hormigón	Intenso (2)	1,40

(1) Esta Instrucción obliga a que el control del acero sea intenso.

(2) Hormigón para elementos prefabricados en instalación industrial permanente, con control intenso.

CUADRO 31.2
Estados límites últimos
Coefficientes de ponderación de las acciones

Estructuras de Contención de Centrales Nucleares	$\gamma_f = 1,60$
Otras estructuras relacionadas con la Seguridad Nuclear	$\gamma_f = 1,60$

Comentarios

Se hace notar que en estas estructuras de Instalaciones Nucleares, habitualmente no se considera procedente minorar adicionalmente con 0,9 la resistencia de proyecto del hormigón, en el caso de elementos hormigonados verticalmente, dadas las dimensiones, normalmente utilizadas, de su sección

transversal; y que sólo sería necesario hacerlo en el caso de soportes de pequeñas dimensiones transversales, hormigonados desde arriba.

Se llama la atención sobre los posibles problemas de congestión de armaduras; debiendo cuidarse la selección del tamaño máximo del árido y las cuantías de armaduras, para evitar las segregaciones.

Se adopta el coeficiente $\gamma_f = 1,60$, partiendo del coeficiente básico, mencionado en las Instrucciones EH y EP, aplicando un nivel de control de ejecución normal, considerando unos daños previsibles muy importantes en caso de accidente y reduciendo del resultado un 5% por estudios, cálculos e hipótesis muy rigurosos (considerando todas las sollicitaciones y todas sus combinaciones posibles y estudiando con el mayor detalle los anclajes, nudos, enlaces, apoyos y demás elementos).

Artículo 32. HIPOTESIS DE CARGA MAS DESFAVORABLES

Para la realización de las comprobaciones relativas a los estados límites últimos se procederá de acuerdo con lo indicado en las correspondientes Instrucciones EH y EP, utilizándose, en cada caso, las hipótesis de combinación de acciones que se indican en los siguientes apartados.

De acuerdo con lo indicado en el artículo 27, se emplea la siguiente notación:

G: Cargas permanentes. Se incluyen entre estas acciones las indirectas del tipo reológico (P_r) y las producidas por movimientos impuestos (P_m) de carácter permanente.

P: Acciones debidas al pretensado.

Q: Sobrecargas en condiciones de operación normal o de prueba. Se incluyen entre estas acciones las indirectas del tipo reológico (P_r) y las producidas por movimientos impuestos (P_m) de carácter temporal.

T: Acciones térmicas en condiciones de operación normal, de parada o de prueba.

E_s : Acciones producidas por el sismo base de operación.

W_s : Cargas de viento en condiciones severas.

E_s : Acciones producidas por el sismo de parada segura.

W_s : Cargas de viento en condiciones extremas.

P_a : Presión hidrostática por inundación de compartimentos o carga de presurización.

T_a : Acciones producidas por efectos térmicos en condiciones anormales.

R_a : Reacciones de tuberías y equipos en condiciones de operación anormal.

Y_a : Acciones producidas por la rotura accidental de una tubería de alta energía. (Y_m, Y_p, Y_r).

32.1. Estructuras relacionadas con la Seguridad Nuclear y con Requisitos de Contención

En las Estructuras Relacionadas con la Seguridad Nuclear y con Requisitos de Contención, se considerarán las siguientes hipótesis:

$$\text{Hipótesis 1: } 1,6 \cdot G + 1,6 \cdot Q + P$$

$$\text{Hipótesis 2: } 0,8 \cdot (1,6 \cdot G + 1,6 \cdot Q) + 1,05 \cdot T + P$$

$$\text{Hipótesis 3: } 0,9 \cdot (1,6 \cdot G + 1,6 \cdot Q + 1,6 \cdot W_0) + P$$

$$\text{Hipótesis 4: } 0,8 \cdot (1,6 \cdot G + 1,6 \cdot Q + 1,6 \cdot E_0) + P$$

$$\text{Hipótesis 5: } G + 1,3 \cdot Q + T + P + 1,5 \cdot E_0$$

$$\text{Hipótesis 6: } G + Q + T + W_s + P$$

$$\text{Hipótesis 7: } G + Q + T + E_s + P$$

$$\text{Hipótesis 8: } G + Q + P + 1,5 \cdot P_a + T_a + R_a$$

$$\text{Hipótesis 9: } G + Q + P + P_a + T_a + 1,25 \cdot R_a$$

$$\text{Hipótesis 10}^{(1)}: G + Q^* + P + 1,25 \cdot P_v + 1,25 \cdot P_a + T_a + R_a$$

(1) En la hipótesis 10, la sobrecarga de explotación (Q) se descompone en la acción de la descarga de válvulas (P_v) a la que se aplica el coeficiente de mayoración 1,25 y el resto $Q^* = Q - P_v$, a la que se aplica un coeficiente de mayoración 1,00. En el resto de las hipótesis, P_v se considera incluida en Q, lo mismo que ocurre con H, P_r, P_m , etc.

Hipótesis 11: $G + Q + P + 1,25 \cdot E_0 + 1,25 \cdot P_a + T_a + R_a$

Hipótesis 12: $G + Q + P + 1,25 \cdot W_0 + 1,25 \cdot P_a + T_a + R_a$

Hipótesis 13: $G + Q + P + E_0 + P_a + T$

Hipótesis 14: $G + Q + P + W_0 + P_a + T$

Hipótesis 15: $G + Q + P + E_s + P_a + T_a + R_a + Y_a$

32.2. Estructuras relacionadas con la Seguridad Nuclear sin Requisitos de Contención

En las Estructuras Relacionadas con la Seguridad Nuclear sin Requisitos de Contención, se consideran las siguientes hipótesis:

Hipótesis 1: $1,6 \cdot G + 1,6 \cdot Q + P$

Hipótesis 2: $0,8 \cdot (1,6 \cdot G + 1,6 \cdot Q) + 1,05 \cdot T + P$

Hipótesis 3: $0,9 \cdot (1,6 \cdot G + 1,6 \cdot Q + 1,6 \cdot W_0) + P$

Hipótesis 4: $0,8 \cdot (1,6 \cdot G + 1,6 \cdot Q + 1,6 \cdot E_0) + P$

Hipótesis 6: $G + Q + T + W_s + P$

Hipótesis 7: $G + Q + T + E_s + P$

Hipótesis 15: $G + Q + P + E_s + P_a + T_a + R_a + Y_a$

Para aquellas estructuras o elementos en los que la presión pudiera ser determinante, se considerará, adicionalmente, la siguiente hipótesis de carga:

Hipótesis 16: $G + Q + 1,25 \cdot P_a + T_a + R_a + P$

32.3. Tabla resumen de hipótesis más desfavorables

Véase Tabla de la página siguiente.

Comentarios

Las hipótesis de carga incluida la Tabla 32.3, corresponden a la descripción siguiente:

Hipótesis 1:

Corresponde al estado normal de las estructuras durante la construcción y durante las pruebas de ensayo.

Hipótesis 2:

Corresponde al estado de funcionamiento normal de la instalación.

Hipótesis 3:

Corresponde al estado de acciones severas del medio ambiente, con la acción del viento, sin funcionamiento de la instalación.

Hipótesis 4:

Corresponde al estado de acciones severas del medio ambiente, con la acción del sismo de operación, sin estar en funcionamiento la instalación.

Hipótesis 5:

Corresponde a las estructuras con requisitos de contención y al estado de acciones severas del medio ambiente, para la acción del sismo de operación, encontrándose en funcionamiento la instalación.

Hipótesis 6:

Corresponde al estado de acciones extremas del medio ambiente, con la acción del viento extremo y la instalación en funcionamiento.

Hipótesis 7:

Corresponde al estado de acciones extremas del medio ambiente, con la acción del sismo de parada segura, estando en funcionamiento la instalación.

Hipótesis 8, 9, 10 y 16:

Corresponden al estado de funcionamiento anormal.

TABLA 32.3
Tabla resumen de hipótesis más desfavorables

La tabla siguiente resume las hipótesis definidas en 32.1 y 32.2.

Hipótesis de carga ⁽¹⁾	Acciones												Requisitos de contención	
	Normales				Severas		Extremas		Anormales				SI	NO
	G	Q	P	T	W _o	E _o	W _s	E _s	P _a	T _a	R _a	Y _a		
1	1,60	1,60	1,00										*	*
2	1,28	1,28	1,00	1,05									*	*
3	1,44	1,44	1,00		1,44								*	*
4	1,28	1,28	1,00			1,28							*	*
5	1,00	1,30	1,00	1,00		1,50							*	*
6	1,00	1,00	1,00	1,00			1,00						*	*
7	1,00	1,00	1,00	1,00				1,00					*	*
8	1,00	1,00	1,00						1,50	1,00	1,00		*	*
9	1,00	1,00	1,00						1,00	1,00	1,25		*	*
10	1,00	1,00 ⁽²⁾	1,00						1,25	1,00	1,00		*	*
11	1,00	1,00	1,00			1,25			1,25	1,00	1,00		*	*
12	1,00	1,00	1,00		1,25				1,25	1,00	1,00		*	*
13	1,00	1,00	1,00	1,00		1,00			1,00				*	*
14	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00				1,00				*	*
15	1,00	1,00	1,00					1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	*	*
16 ⁽³⁾	1,00	1,00	1,00						1,25	1,00	1,00			*

- NOTAS:
- (1) Las hipótesis de carga, en la tabla 32.3, se realizan combinando acciones cuyos valores característicos y probabilidad de ocurrencia se definen en el artículo 28. En el caso de tener que incluir en una determinada hipótesis de carga acciones no consideradas explícitamente en esta tabla (por ejemplo avenidas, oleajes, impacto de misiles externos, etc., citados en los apartados 27.2 y 27.3) y que correspondan a sucesos independientes, se podrán tomar como valores característicos de las acciones los obtenidos para una probabilidad conjunta de ocurrencia no inferior a 10⁻⁶ al año.
- (2) En la hipótesis 10, la sobrecarga de explotación (Q) se descompone en la acción de la descarga de válvulas (P_v), a la que se aplica el coeficiente de mayoración 1,25, y el resto, Q* = Q - P_v, a la que se aplica un coeficiente de mayoración 1,00. En el resto de las hipótesis, P_v se considera incluida en Q, lo mismo que ocurre con H, P_e, P_v, etc.
- (3) La hipótesis 16 sólo se considerará para aquellas estructuras o elementos en los que la presión pudiera ser determinante.

Hipótesis 11, 12, 13 y 14:

Corresponden al estado de funcionamiento anormal, combinada con un estado severo del medio ambiente.

Hipótesis 15:

Corresponde al estado de funcionamiento anormal, combinada con el sismo de parada segura y el estado extremo del medio ambiente.

Conclusiones

El objeto de publicar esta propuesta parcial de normativa es obtener comentarios de los profesionales que trabajan en estos temas y que no han podido participar en el grupo de trabajo.

Aquellas personas que estén interesadas

en comentar el articulado, pueden hacerlo, por escrito, a la dirección siguiente:

Empresarios Agrupados
Magallanes, 3
28015 Madrid

a la atención de: M. Díaz-Llanos

RESUMEN

Se presenta, para comentarios, el texto actual de la futura normativa española sobre criterios de proyecto de estructuras de hormigón para instalaciones nucleares.

SUMMARY

The text of the future spanish code "Criteria for Concrete Structures for Nuclear Installations" is presented for comments.

Un reto de hormigón y acero: Normandía, record mundial de Puentes Atirantados*

Carlos de la Fuente
Director Adjunto del Departamento Técnico de
FREYSSINET INTERNACIONAL

ANTECEDENTES

En 1959, se inauguró en Tancarville el puente colgante sobre el Sena, situado a unos 20 km de su desembocadura. Este puente, que fue el mayor de Europa de su época (608 m de luz), era una concesión del estado a la Cámara de Comercio e Industria de la ciudad de El Havre por un tiempo de 75 años. Su construcción fue un gran éxito pero, en poco tiempo, su capacidad llegó a la saturación. Hoy hay puntas de tráfico de 20.000 vehículos por día.

Este puente permite un enlace conveniente entre El Havre y su zona industrial con París, pero obliga a hacer un largo rodeo para ir al oeste de Francia y al sur del estuario del Sena.

En 1972, la Cámara de Comercio e Industria de El Havre encargó un estudio de viabilidad de un nuevo puente sobre el Sena, en el estuario, aguas abajo de Tancarville. En 1975, la Cámara obtuvo el acuerdo para una nueva concesión. Entre 1975 y 1980, se llevaron a cabo los primeros estudios de esta excepcional estructura que

habría de construirse en un paraje difícil, marítimo y expuesto a vientos de gran intensidad.

El primer proyecto, de 1980, era un gran puente de tirantes, al que se le llamó "Puente de Honfleur". Este proyecto incluía una isla artificial en el río, para proteger las pilas del puente. Esta solución tenía el riesgo de favorecer los depósitos de aluvión, cegando parcialmente el calado del río y dificultando así el tráfico marítimo del puerto de Rouen. Por ello hubo de estudiarse la posibilidad de aumentar la luz del puente.

Los servicios técnicos del Ministerio de Obras Públicas francés, con la ayuda de algunas oficinas técnicas y expertos internacionales, concluyeron, en 1987, que era viable la realización de un puente atirantado, de 856 m de luz central, que pulverizaba el record mundial de este tipo de estructuras. A este proyecto se le llamó "Puente de Normandía".

Varias son las razones que justifican el interés de este proyecto, en cuyo estudio económico se ha previsto un IMD de 5.000 vehículos:

—En primer lugar, favorecerá el desarrollo armónico de las dos márgenes del río Sena. Por un lado, El Havre y sus subur-

* Texto de la conferencia que, organizada por la A.T.E.P., pronunció D. Carlos de la Fuente en el Aula Torroja, del I. c.c. E.T., el día 17 de junio de 1993.

PUENTE DE NORMANDIA

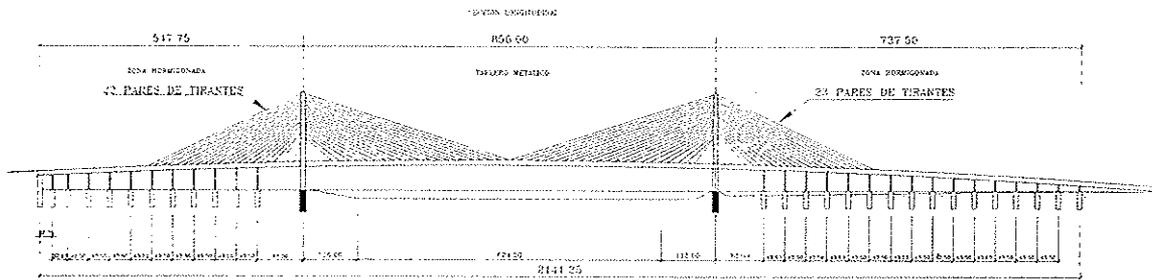


Fig. 1.

bios, al norte, y por otro, las zonas turísticas, rurales y de industria ligera, al sur.

—Permitirá un gran ahorro de tiempo y dinero a los usuarios que se desplacen entre la zona de El Havre y el oeste de Francia.

—Y, finalmente, el puente de Normandía se convertirá en un eslabón esencial de una autopista litoral de interés, tanto nacional como internacional, ya que une el túnel del Canal de la Mancha con el suroeste de Francia y con España y Portugal, permitiendo la conexión entre la autopista A 26, El Havre-Amiens, y la vía de los estuarios (Sena, Loira, Charebtem Garona).

CONJUNTO DEL PROYECTO

Globalmente, el proyecto definitivo incluye los siguientes capítulos:

—Un dique de acceso norte, que enlaza la carretera del norte del estuario con el puente principal. Su longitud es de 1.200 m. Está construido, sobre una capa de lodo superficial, de 4 m de profundidad, y se compone de:

- capa de geotextil filtrante, con drenajes horizontales y verticales;
- capa de arena, con protecciones latera-

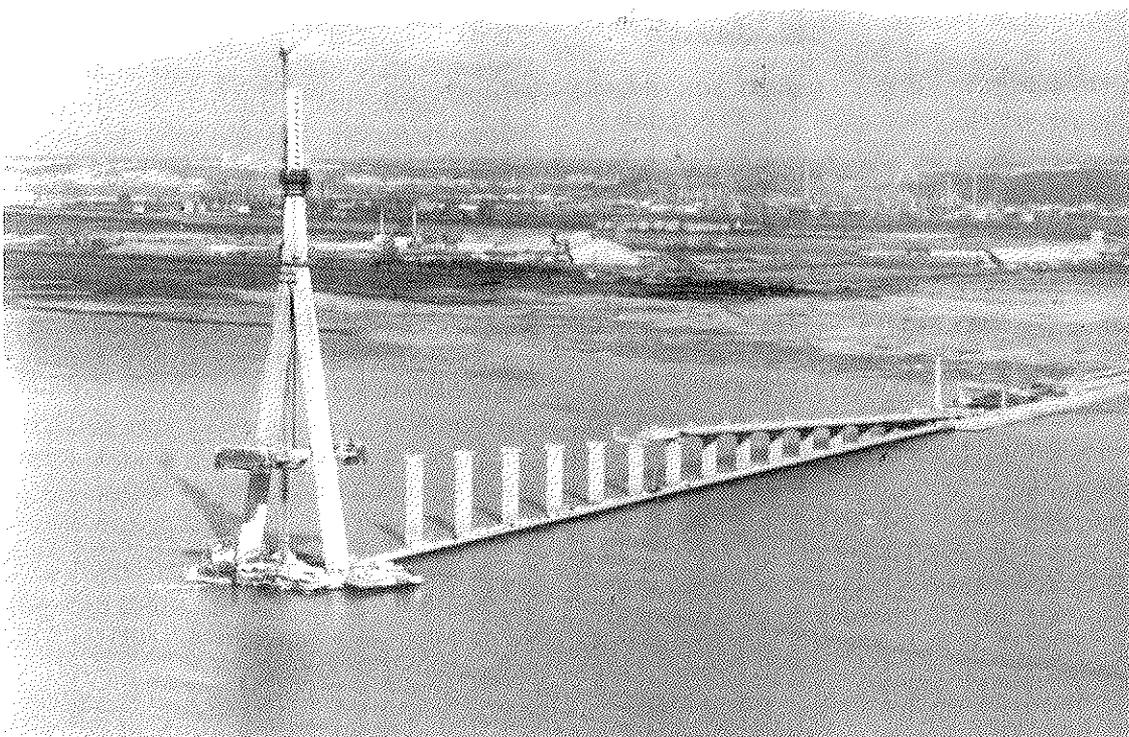


Fig. 2.

les en doble talud formado por rocas y bloques de hormigón de 1,5 m³;

—relleno de tierras, que soporta la calzada.

—El puente principal, de 2.141 m de longitud total, cuya descripción es el objeto de este escrito.

—Un terraplén de acceso sur, de unos 1.500 m de longitud, situado en la zona portuaria e industrial de Honfleur. Alcanza 15 m de altura y está formado de arena, con taludes protegidos por material silico-cálcico extraído de canteras cercanas.

El proyecto incluye también:

—La construcción de una estacada provisional de trabajo, de unos 750 m de longitud y 8,70 m de anchura, necesaria para el acceso de la maquinaria de perforación y hormigonado del viaducto de acceso norte, situado en los citados lodos superficiales. Esta estructura provisional se apoya en 214 tubos de acero, de 813 mm de diámetro y 17 m de longitud, incados en el terreno. Cada 43,50 m, hay una plataforma lateral para poder construir las pilas del viaducto de acceso.

—Una isla artificial, para proteger la torre norte del puente principal, que se encuentra situada al borde del canal de navegación del Sena. Consiste, esencialmente, en una pared de tubos de hormigón, de 9 m de diámetro, incados en el fondo de arena hasta una profundidad aproximada entre 4 y 5 m. Los tubos rellenos de hormigón protegen un relleno de 36.000 m³. Una envolvente, de 15.000 m³ de rocas de materiales diversos, protege el conjunto.

—Finalmente, el proyecto contempla diversas obras de acondicionamiento ecológico, para preservar esta zona que es lugar de paso de aves migratorias y origen de la cadena alimentaria del mar.

El dique, el terraplén sur, la estacada y la isla artificial fueron contratados y ejecutados por separado, antes de iniciarse la construcción del puente principal.

Los viaductos de acceso

Los dos viaductos de acceso tienen una pendiente del 6%. El tablero es un cajón de tres alveolos, de hormigón pretensado, con canto constante de 2,90 m y 22,30 m de anchura.

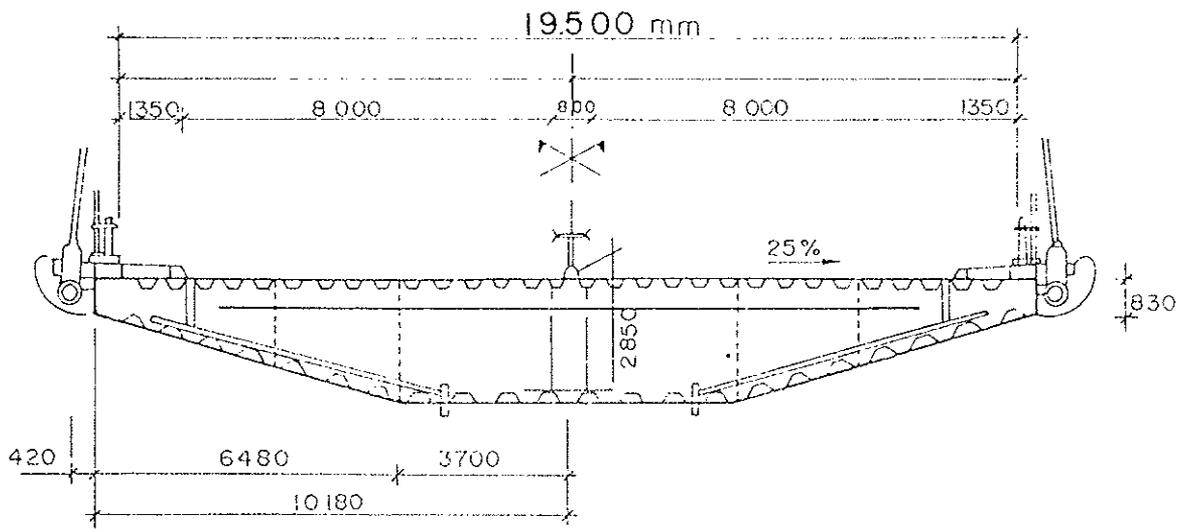
Las pilas de los viaductos están cimentadas sobre pilotes de hormigón armado, de 1,50 m de diámetro y 40 m de profundidad. Los 52 pilotes del viaducto sur se construyeron en tierra firme y los 72 del viaducto norte con ayuda de la citada estacada provisional.

El pliego de condiciones inicial prescribía hormigón de 40 MPa de resistencia característica, en probeta cilíndrica, para el hormigón del tablero y de las pilas. Las empresas constructoras propusieron el uso de hormigón de 60 MPa. Ello permitió reducir algunas dimensiones, tales como el espesor del forjado inferior del tablero y el de la pared de las pilas; pero la principal ventaja de esta propuesta fue la mejora de la impermeabilización frente a los agentes agresivos, que presenta este hormigón. El hormigonado de las pilas se llevó a cabo con encofrado trepante.

Por lo que respecta al tablero, se debe resaltar su construcción por el sistema de empuje. La dificultad que presentaba el sistema era la magnitud de la fuerza horizontal necesaria para vencer un rozamiento del 5% y el 6% de pendiente. Esta magnitud de esfuerzo horizontal, que llegaba a ser del orden de 3.000 t, no podía ser absorbida por los cimientos de los estribos, donde se producía la reacción.

Este problema fue resuelto por la agrupación de empresas, mediante un sistema innovador consistente en empujar el puente, "en escalera", mediante una serie de movimientos horizontales y verticales. Con este sistema, el tablero va siempre sobre apoyos en forma de cuña, cuya cara inferior es horizontal y la superior tiene la pendiente del tablero. Estas cuñas van montadas sobre apoyos deslizantes, especiales, de agujas, con un coeficiente de rozamiento muy pequeño, del orden del cinco por mil. A cada lado del dispositivo formado por la cuña y el apoyo deslizante, hay un gato

SECCION TRANSVERSAL
VANO PRINCIPAL



SECCION TRANSVERSAL
VIADUCTO DE ACCESO

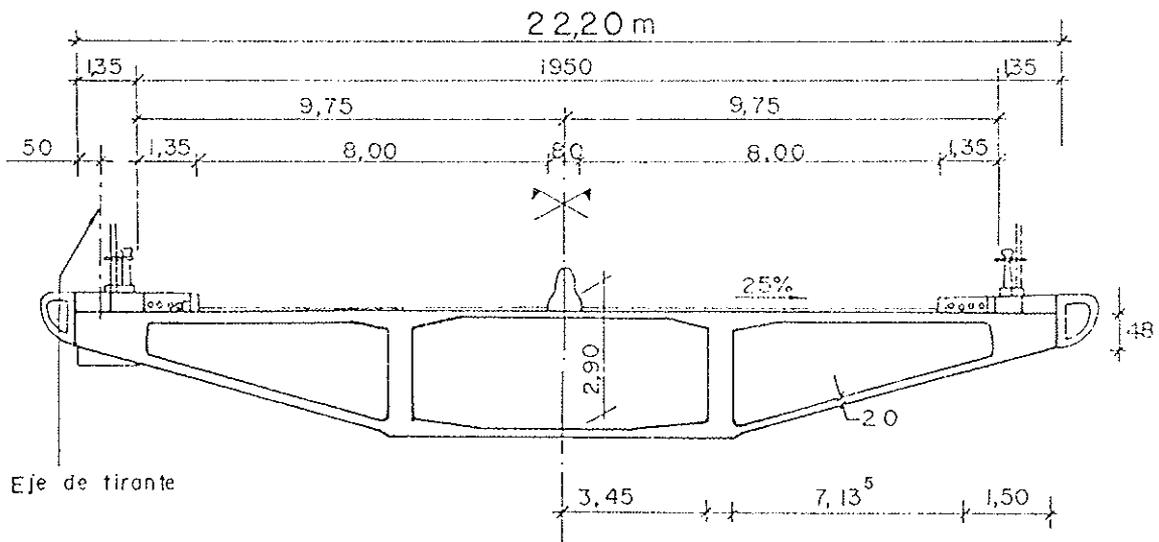


Fig. 3.

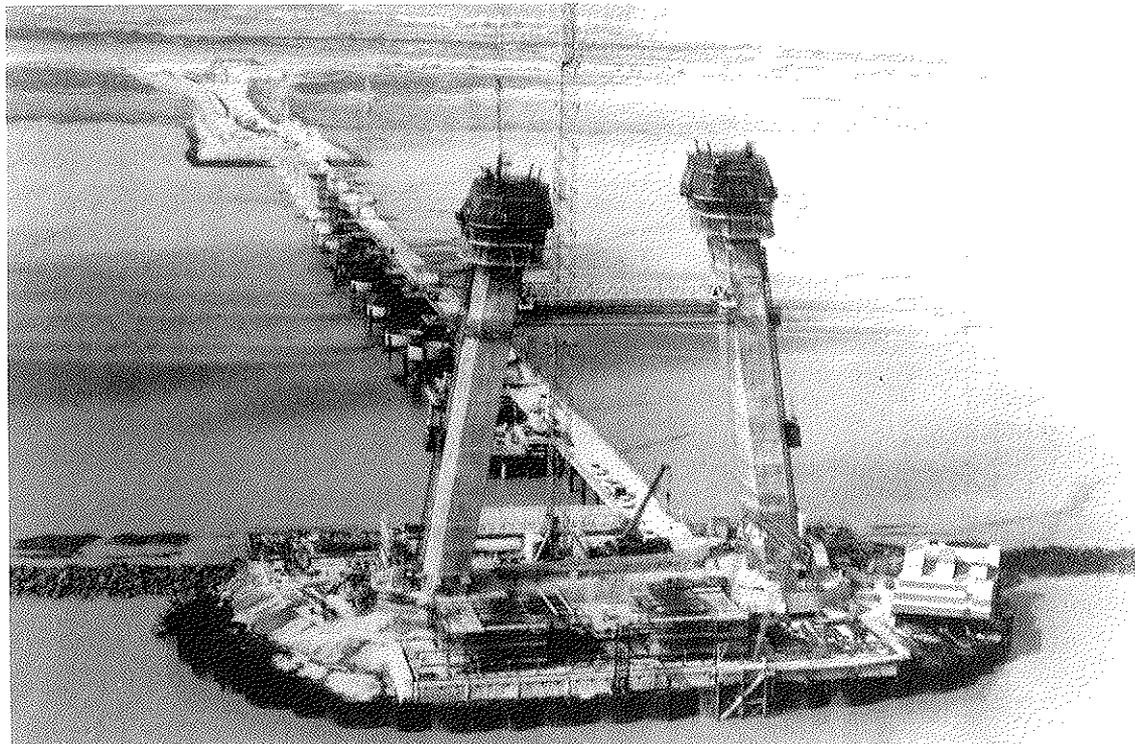
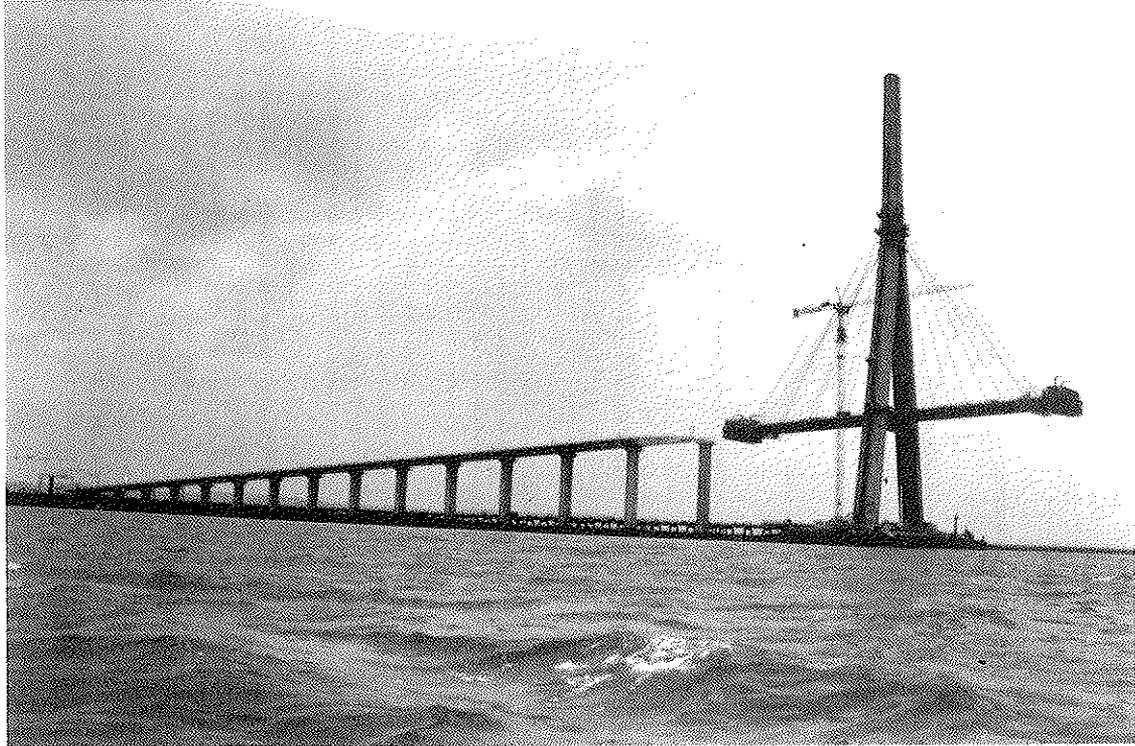


Fig. 4.

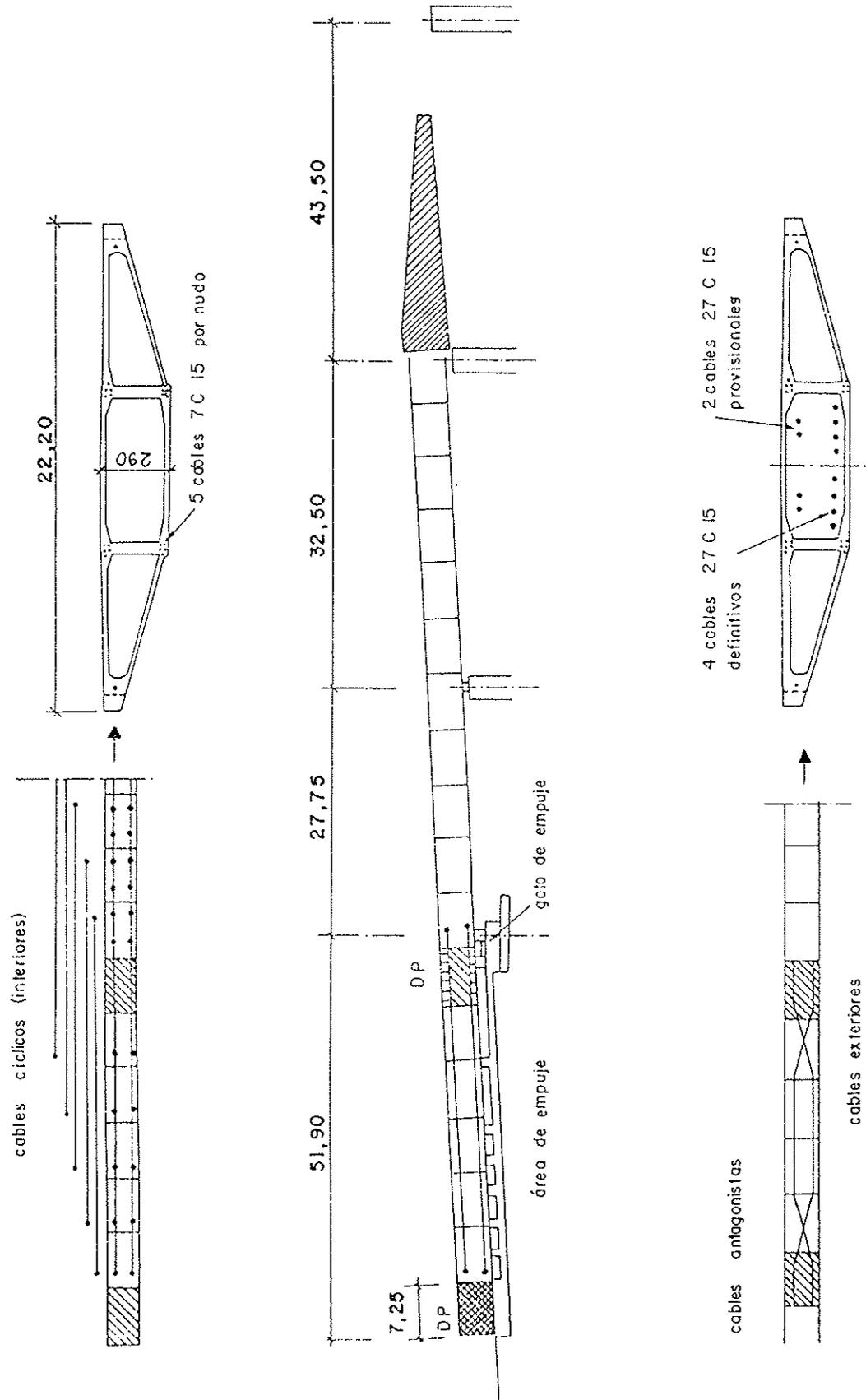


Fig. 5.

hidráulico vertical, con un calce en cuña en la cabeza del pistón.

El tablero recorre, en cada desplazamiento, 15 cm en horizontal. Después de cada carrera, el tablero se iza, mediante los gatos verticales, a la altura necesaria para que los calces retornen a su posición inicial, con la ayuda de unos muelles de amortiguación neumática. Una vez en posición, los gatos verticales se cierran y el tablero descansa nuevamente sobre las cuñas y está dispuesto para un nuevo desplazamiento.

Este sistema de empuje va equipado con células captadoras de presión y desplazamiento, y su control lo lleva un ordenador central que detecta cualquier anomalía.

El tablero está dividido en dovelas de 7,25 m, y el ciclo de empuje es de una dovela cada dos días, excepto las de pila que es cada tres días.

Pretensado de los viaductos de acceso

El tablero de los viaductos de acceso tiene pretensado longitudinal y transversal.

El pretensado transversal afecta tanto al

forjado superior como al forjado inferior y consiste en cables monocordón, de 0,6 pulgadas, engrasados y en vaina individual, repartidos uniformemente. Hay, como media, 20 cordones por dovela. En las dovelas donde se alojan los anclajes de tirantes (18 en cada viaducto de acceso) hay además dos cables, de 13/06, exteriores al hormigón en contacto con el forjado inferior y que atraviesan las almas mediante desviadores. Este pretensado está realizado con unidades FREYSSINET tipo C, de dimensiones reducidas, que permite su empleo en hormigones de alta resistencia y cuya puesta en tensión se lleva a cabo con equipos automáticos, de ligero peso, especialmente aptos para el pretensado exterior.

El pretensado longitudinal de los viaductos comporta tres familias de cables:

—Cables de empuje cíclicos: se trata de cables que solidarizan las dovelas de 6 en 6. Hay 5 cables 7C15 en cada uno de los 6 nudos de la sección de la dovela. En cada dovela se ancla un cable de cada nudo, excepto en las dovelas de pila.

—Cables de pretensado exterior 27C15: estos cables se anclan en las dovelas de pila y están desviados a lo largo del vano. Hay

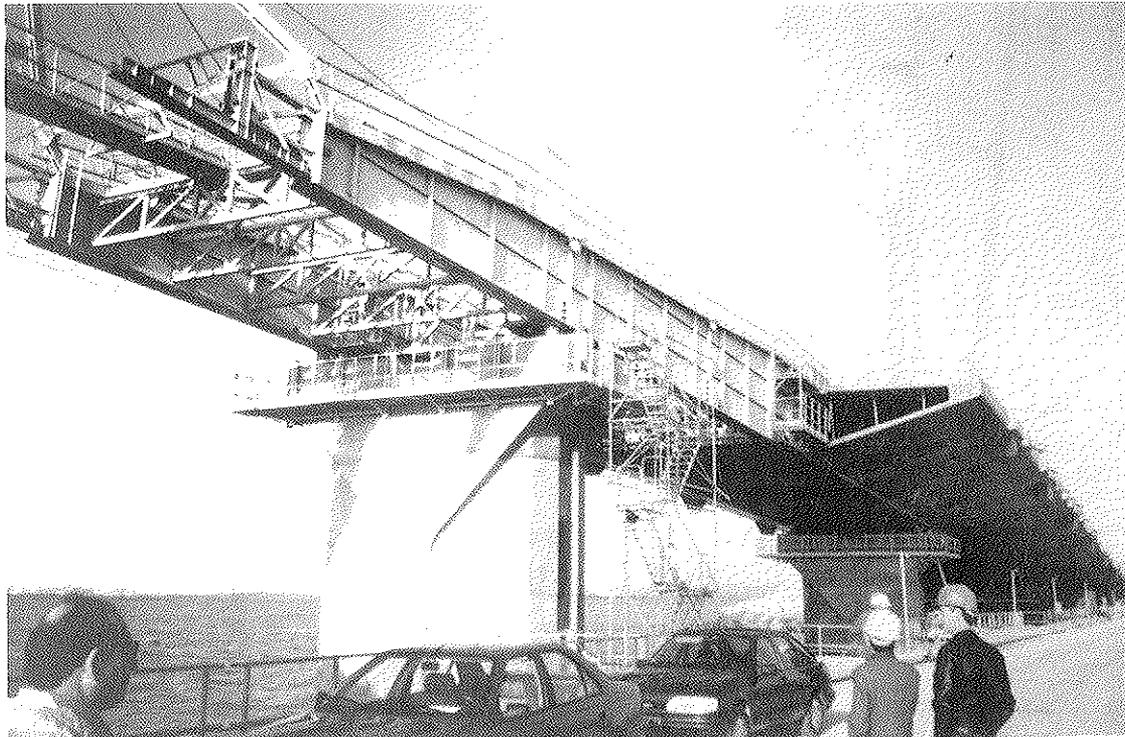
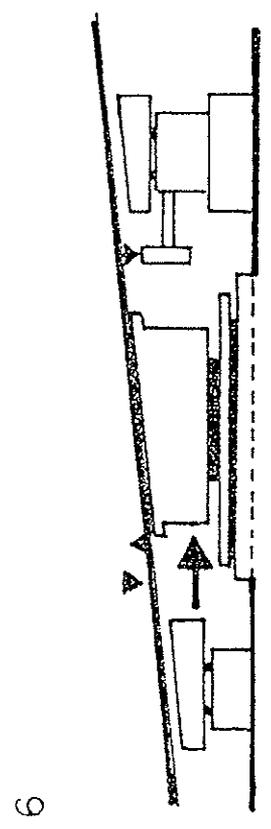
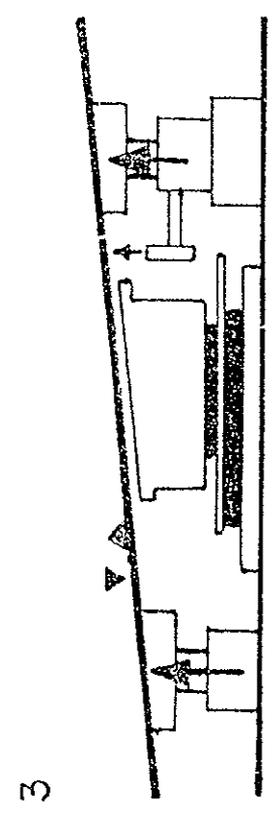
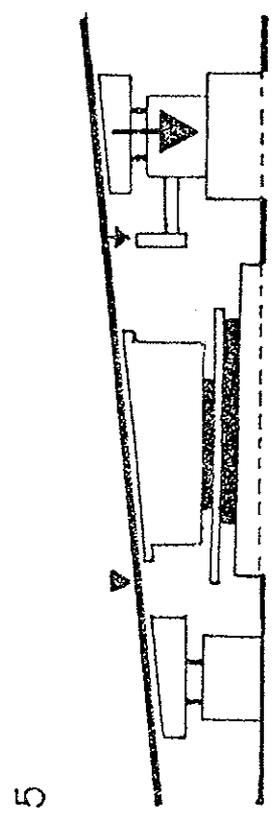
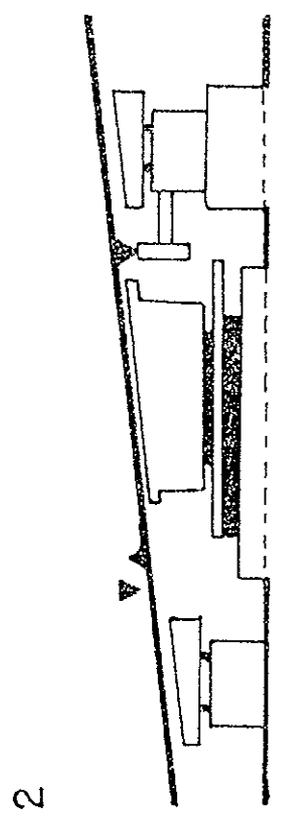
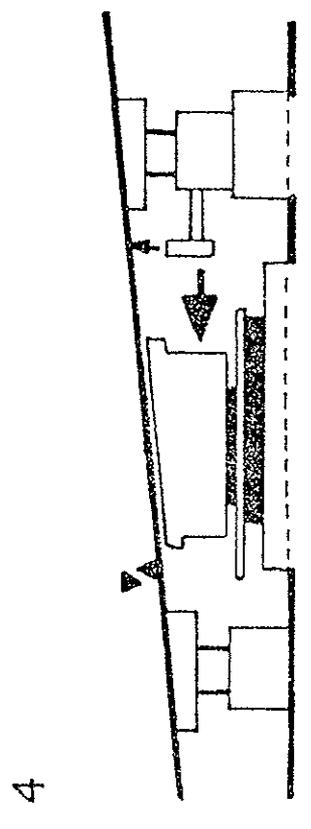
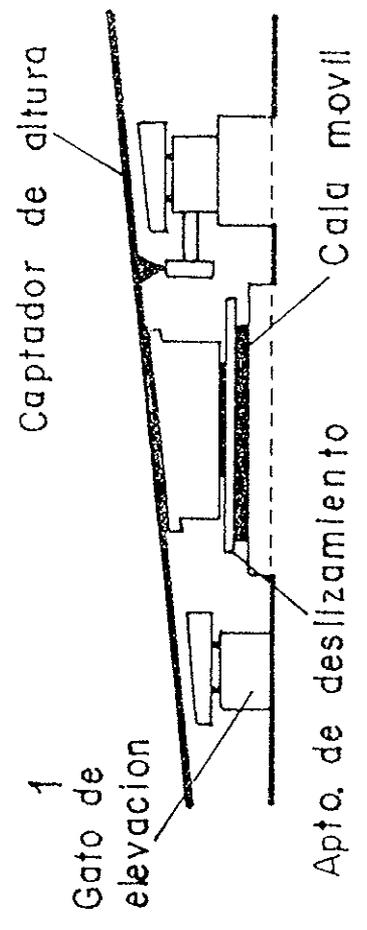


Fig. 6.



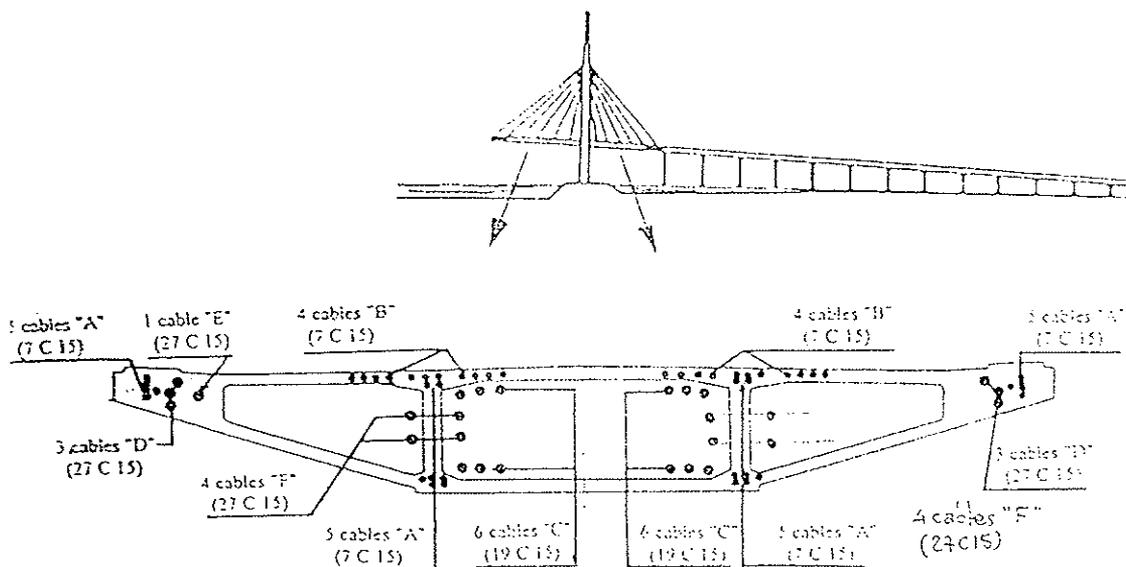


Fig. 8.

8 cables 27C15 por vano, pero durante el empuje sólo se colocan 4. Una vez terminado el empuje, se colocan los 4 restantes en sustitución de 4 cables exteriores, de cordón galvanizado, sin vaina. Estos cables son provisionales, de trazado simétrico a los precedentes (tercera familia) y sirven para obtener un pretensado centrado durante el empuje del tablero.

EL PUENTE PRINCIPAL

Los accesos norte y sur, de 737,5 y 547,25 m, respectivamente, llevan a un vano central, de 856 m, situado entre 2 torres muy rígidas, de 214 m de altura, que son el soporte de 2 capas de tirantes, una a cada lado del tablero, que tiene un ancho de 22,5 m, con dos calzadas de dos carriles cada una. Estas son las características geométricas fundamentales de la estructura principal del puente de Normandía. El tablero de los tramos laterales y de los voladizos que parten de las torres es de hormigón; la parte central, de 624 m, es metálica.

El gálibo de navegación, en el centro, es de 50 m, previsto para buques de 100.000 t y 11 m de calado.

El proyecto del puente de Normandía fue

realizado, entre 1986 y 1988, por un equipo formado, por un lado, por el S.E.T.R.A. (Oficina Técnica del Ministerio de Obras Públicas) dirigido por Michel Virlogeux, y por otro, por varias oficinas privadas, como SOFRESID, SOGELERG, QUADRIC y SEEE. Dos importantes organismos especialistas en estudios sobre los efectos del viento y la aeroestabilidad, el ONERA y el CSTB, de Nantes, colaboraron con este equipo. La dirección departamental de Seine-Maritime formó, a mediados de 1987, un ente especial temporal llamado "Misión Puente de Normandía", dirigido por Bertrand Deroubaix, que se encargó de la dirección del proyecto y de la obra.

Como es habitual en Francia, el proyecto propuesto a las empresas constructoras en marzo de 1988, no era un proyecto de ejecución al estilo anglosajón, sino lo que se denomina un anteproyecto detallado. Definía el esquema estático de la estructura, sus principales dimensiones geométricas, el cableado del pretensado y la organización general de las armaduras pasivas. La puesta a punto del proyecto de ejecución requirió análisis detallados y cálculos complementarios destinados a evaluar los efectos del viento.

El Ministerio encargó la evaluación del proyecto a un grupo de 6 expertos: los pro-

fesores Lacroix, Schleich y Walter y los inspectores generales Brignon, Huet, Mathieu, que recomendaron algunas mejoras que fueron tomadas en cuenta.

El anteproyecto detallado final se realizó teniendo en cuenta la metodología y las técnicas de construcción, así como las mejoras y sugerencias de las empresas adjudicatarias, responsables de la preparación del proyecto de ejecución.

A efectos del concurso internacional, la obra se dividió en dos lotes: uno para todos los elementos de hormigón y el otro para el tramo principal metálico y el atirantado.

Se calificaron tres grupos de empresas para el lote de hormigón. De ellos, uno estaba dirigido por Bouyges y otro por Campenon Bernard y agrupaban a la mayoría de las empresas francesas. Las grandes empresas europeas no se interesaron en este concurso. Para el lote metálico se calificaron siete empresas europeas, de Francia, Alemania, Inglaterra y Dinamarca.

Tras varios meses de negociación con los dos grupos principales, el lote de hormigón se adjudicó a una agrupación formada por dichos grupos, cuyos líderes, Bouyges y Campenon Bernard, capitaneaban a DUMEZ, GTM, SPIE, SOGEA, QUILLERY.

El contrato del lote metálico se adjudicó a la empresa Danesa MOMBORG & THORSEN.

Todas las empresas presentaron la solución FREYSSINET para el atirantado.

La construcción del puente de Normandía se repartió de la siguiente forma:

El GIE Pont de Normandie (Agrupación del puente de Normandía) tiene a su cargo la ejecución de los viaductos de acceso norte y sur, las torres y los voladizos de hormigón de a cada lado de la torre. Se incluyen en esta obra los tirantes que van anclados en dichos voladizos.

MOMBORG & THORSEN ejecuta el tablero metálico central, de 624 m, y el resto de los tirantes que van anclados en el tablero metálico y en los viaductos de acceso.

DESCRIPCION DEL PUENTE

Las torres

Las torres tienen forma de una Y invertida, cuya altura total sobre los cimientos es de 214 m. La base y las patas de la torre son de hormigón armado. El empleo de hormigón de 60 MPa, permitió reducir el espesor de la pared de las patas, de 50 a 40 cm.

El mástil de más de 60 m de alto, donde se alojan los anclajes superiores de los tirantes, pasó por varias fases a lo largo del diseño. Es de construcción mixta, formada por una superposición de cajones de sección rectangular, de acero, que constituyen el núcleo central del mástil, de 7 x 2 m²; este núcleo central va revestido con piezas prefabricadas de hormigón.

Cada zapata de las patas de la torre descansa en 14 pilotes de hormigón armado, de 210 mm de diámetro y hasta 60 m de profundidad.

Las zapatas de la torre están unidas por un tirante de hormigón pretensado; y a una altura de 42 m, las patas se unen mediante un travesaño pretensado donde se empotra el tablero.

Las patas de las torres se hormigonaron por encofrado trepante.

El pretensado de las torres

Las zapatas de las torres van pretensadas longitudinal y transversalmente. El pretensado transversal está formado por cables de 27C15 y el longitudinal por cables de 19C15, que en su zona central se convierte en el pretensado de unión de las zapatas. Este pretensado se introduce, gradualmente, en función del avance de la construcción. El primer tesado se da cuando se construye este tirante de unión; el segundo tesado, cuando se inicia la construcción de las patas, y la fase final de tesado, cuando se termina la construcción de los tableros en voladizo.

Las patas de las torres llevan un pretensado vertical, con cables de 13C15 que se interrumpen a distintas alturas, hasta pasar

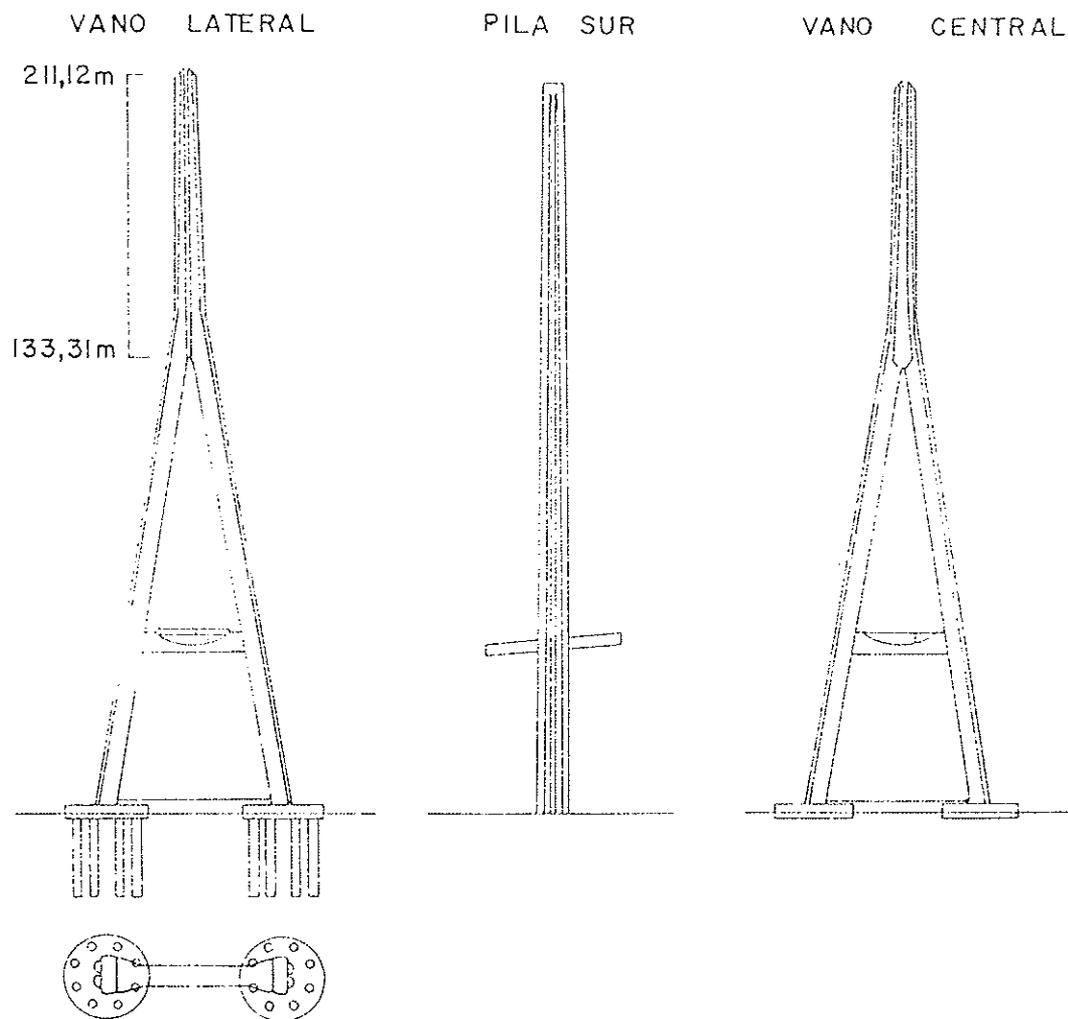


Fig. 9.

por encima de la cota del travesaño a una altura de 88 m. El extremo inferior de estos cables verticales se anclan, horizontalmente, en una cámara interior de la zapata de la torre.

El pretensado del travesaño que se encuentra a nivel del tablero está formado por cables longitudinales 19 y 27C15 y cables transversales 7C15 en los nudos de unión con las patas.

Con objeto de aligerar la estructura de la cimbra para construir el travesaño, éste se hormigona en dos fases: en primer lugar, se construyen los dos tramos laterales, se pretensan provisionalmente en voladizo con cables 7C15 que van instalados en las vainas de los cables definitivos y después se hormigona el tramo central, desmontándose

el pretensado provisional y realizándose el definitivo.

El mástil también va pretensado con cables 7C15, en forma de U, para asegurar la unión de las piezas prefabricadas de hormigón con los cajones metálicos que a su vez van provistos de conectores en la zona de unión que se hormigona in situ. Hay dos cables por cajón.

El núcleo metálico

En cada torre, el núcleo metálico está compuesto de 21 cajones de acero contruidos a partir de chapas de 20 a 45 mm de espesor, oxicortadas con gran precisión y soldadas. Los cajones se prefabrican en el

DETALLES DE ANCLAJE DE
TIRANTES

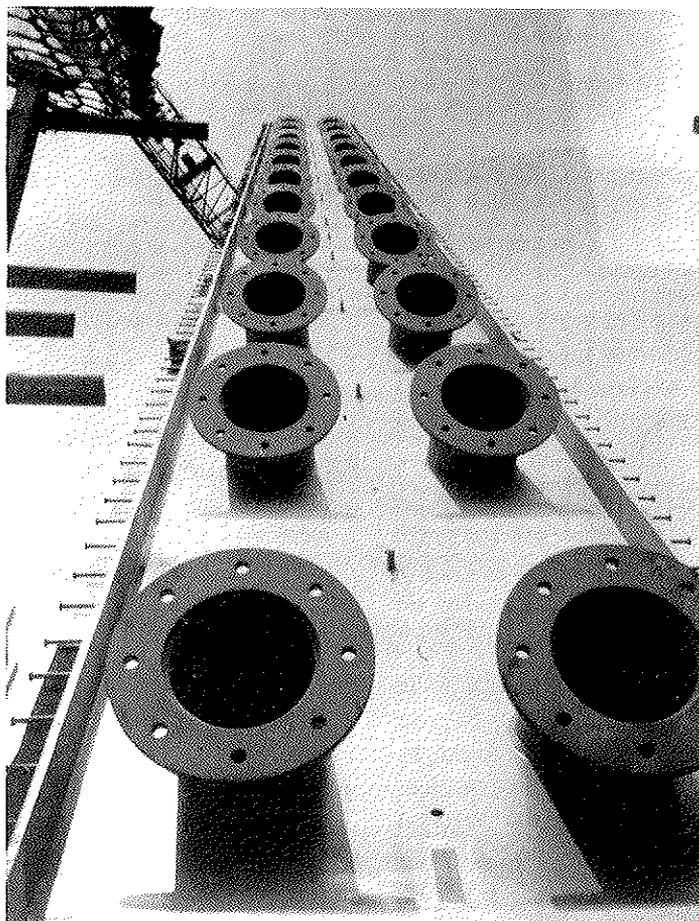
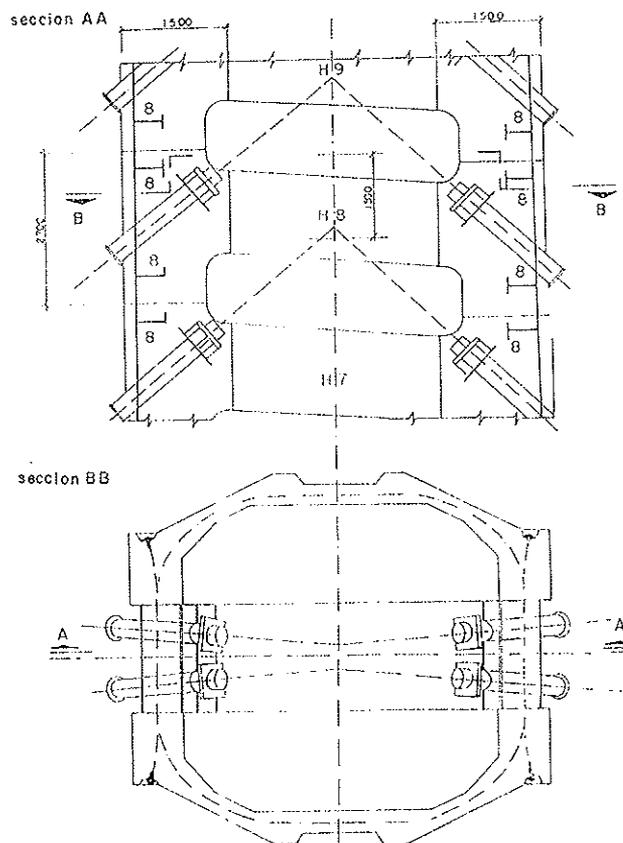


Fig. 10.

este de Francia y, posteriormente, se transportan a Alemania, donde son sometidos a un tratamiento térmico de liberación de tensiones. A continuación, se mecanizan las caras superior e inferior para garantizar su perfecto asiento. En el taller se realiza un montaje de prueba del conjunto de cada mástil, en dos mitades.

El montaje en obra requiere especial cuidado, sobre todo el montaje del primer cajón, puesto que si su cara inferior no se coloca en un plano rigurosamente horizontal se puede llegar a un desplazamiento inaceptable de la coronación del mástil, porque la cara expuesta al sol se dilata más que la que está a la sombra, y las deformaciones se modifican durante el día. Hubo pues, que seguir con gran cuidado la evolución de las deformaciones térmicas, para elegir el momento de la noche, en el que la base de hormigón está perfectamente horizontal, para colocar y ajustar el primer elemento metálico.

Los anclajes de los tirantes se apoyan, por pares, en el interior de los cajones y la componente horizontal de los mismos se transmite mediante las chapas laterales.

El programa inicial de montaje de elementos metálicos era de uno cada dos días, pero se llegaron a montar, una vez que los equipos adquirieron la velocidad de cruce-ro, 2 por día.

Los voladizos de hormigón

El tablero de hormigón se construye en voladizo a partir del travesaño de la torre; las "grandes consolas", de 116 m de longitud, hacia el Sena, tienen 42 dovelas y están soportadas por 7 pares de tirantes; las "consolas traseras", 96 m de longitud, se unen con los viaductos de acceso empujados, y tienen 31 dovelas y 5 pares de tirantes.

La sección del tablero es prácticamente la misma que la de los viaductos de acceso.

La construcción se hace por voladizos sucesivos, con dovelas hormigonadas in situ, mediante 4 carros de avance (2 por torre) de 140 t.

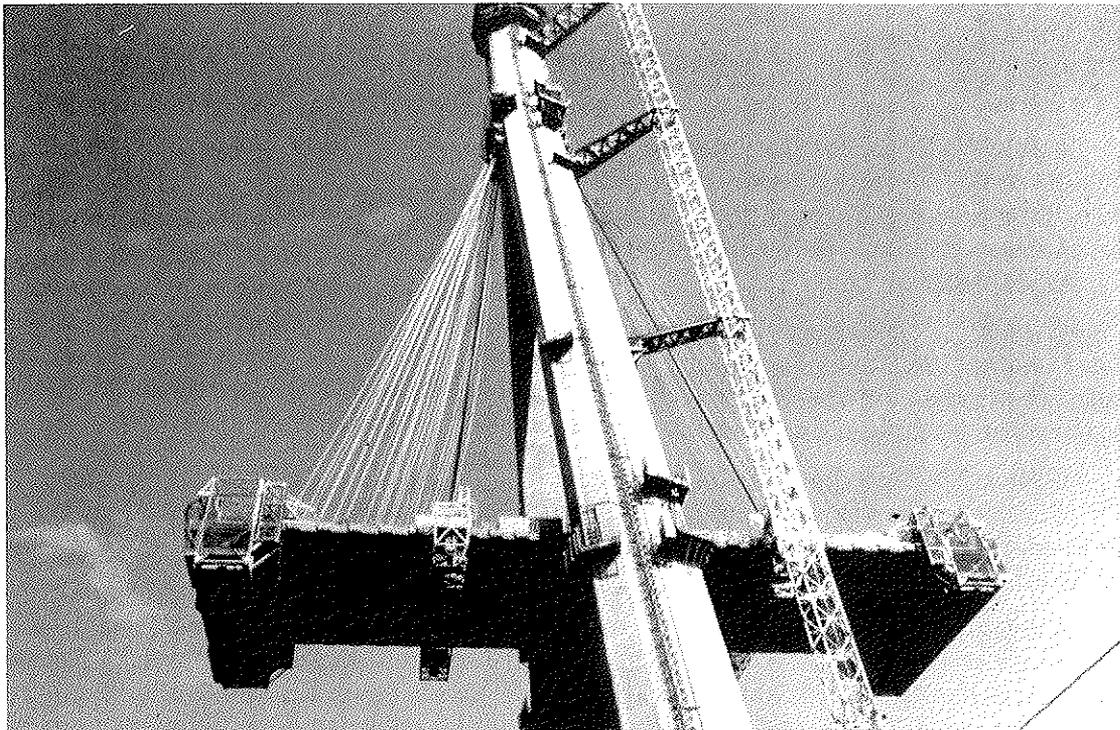


Fig. 11.

Hay cuatro tipos de dovelas, según su función:

—Las 4 primeras dovelas de cada voladizo, de 2,32 m de largo;

—Las dovelas con tirante definitivo y desviador de cables de pretensado, de 2,40 m;

—Las dovelas con tirante definitivo y anclaje de cables exteriores, de 2,40 m;

—Las dovelas situadas entre las dovelas con tirante (que son 5), de 2,72 m.

El peso de las dovelas llega a alcanzar 150 t.

Pretensado del tablero del puente

Como en los viaductos de acceso, el pretensado transversal consiste en monocordones engrasados, envainados, colocados en los forjados superior e inferior, y cables de 7C15 a 13C15, según las dovelas, exteriores al hormigón, en las dovelas con tirantes.

El pretensado longitudinal se compone de cables interiores y exteriores al hormigón. Hay 6 tipos de cables:

—Cables "A", cíclicos: 5 cables 7C15, interiores al hormigón, en cada nudo de la sección. Se tesa un cable de cada nudo, en cada dovela.

—Cables "B", cables de voladizo: se trata de cables 7C15, interiores, colocados en el forjado superior, cerca de las almas, en las zonas próximas de las torres, construidas sin atirantamiento.

—Cables "C", exteriores al hormigón. Estos cables, 19C15, completan el pretensado del voladizo en fase de construcción. Se anclan en las dovelas con tirantes.

—Cables "D", interiores. Estos cables, 27C15, están en las vigas de borde, y están destinados a resistir la flexión del eje vertical de los tableros.

—Cables "E" y "F". Estos cables sólo existen en el voladizo del lado del Sena. Son cuatro cables 27C15, exteriores, por alma y un cable 27C15, interior y luego exterior, cuando la viga de borde se estrecha. Estos cables clavan el tramo metálico

al tramo de hormigón, y se anclan en el tablero metálico y detrás del travesaño de la torre.

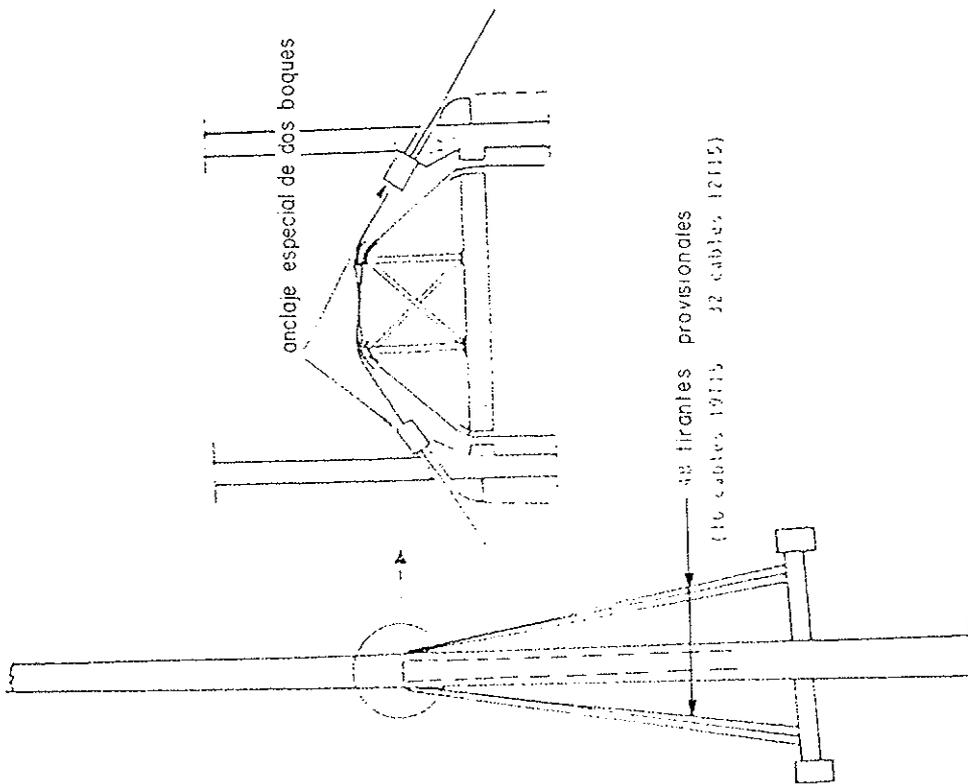
El pretensado queda dimensionado por la acción del viento. En total, crea un esfuerzo centrado de unas 14.000 t que se puede equiparar con la componente horizontal de los tirantes, que es de 13.000 t.

Tirantes provisionales

Para limitar los momentos flectores debidos al voladizo se adoptó la solución consistente en atirantar provisionalmente las dovelas comprendidas entre dos tirantes definitivos. Habida cuenta del gran número de tirantes provisionales, de distintas longitudes, que eran necesarios, (unos 500 por torre) FREYSSINET propuso una solución original consistente en emplear 24 tirantes por torre, cuya longitud es la del tirante más largo necesario al final del voladizo. Como los primeros tirantes provisionales son mucho más cortos, el exceso de longitud del cable se almacena, suspendido, en el interior de las patas de la torre, y cada tirante se va alargando a medida que avanza la construcción del voladizo. Los tirantes provisionales consisten en un haz de 12 ó 18 cordones T15, galvanizados, anclados en la torre, en el interior de una cámara situada en la cota 133 m, y en el tablero, cerca de las almas.

Los anclajes situados en la torre son dispositivos especiales consistentes en dos bloques de anclaje con cuñas: uno de ellos, el inferior, apoya sobre una placa de apoyo, el otro, el superior, puede desplazarse, verticalmente, guiado por 3 tubos. El esfuerzo del tirante, tesado a cerca del 60% de la tensión de rotura, se ancla siempre en el bloque inferior.

El anclaje inferior en el tablero es un anclaje fijo, provisto de una pequeña estructura articulada que se sujeta al forjado superior de la dovela mediante un sistema de cono metálico y barra de pretensado. El tesado de los tirantes se realiza de forma clásica, mediante gatos hidráulicos anulares que toman apoyo en barras de pretensado que forman parte del dispositivo de anclaje.



PUNTE DE NORMANDIA

TIRANTES PROVISIONALES PARA LA CONSTRUCCION DEL VOLADIZO DE HORMIGON

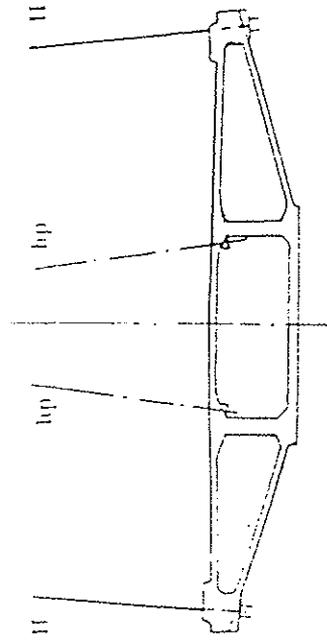
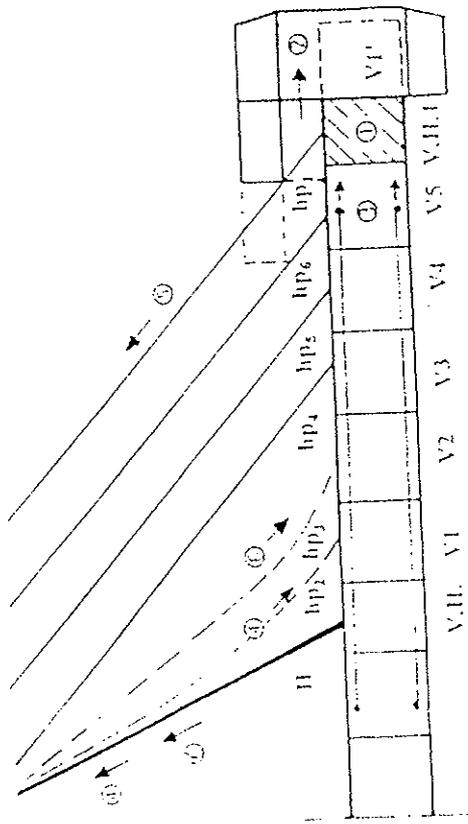


Fig. 12.

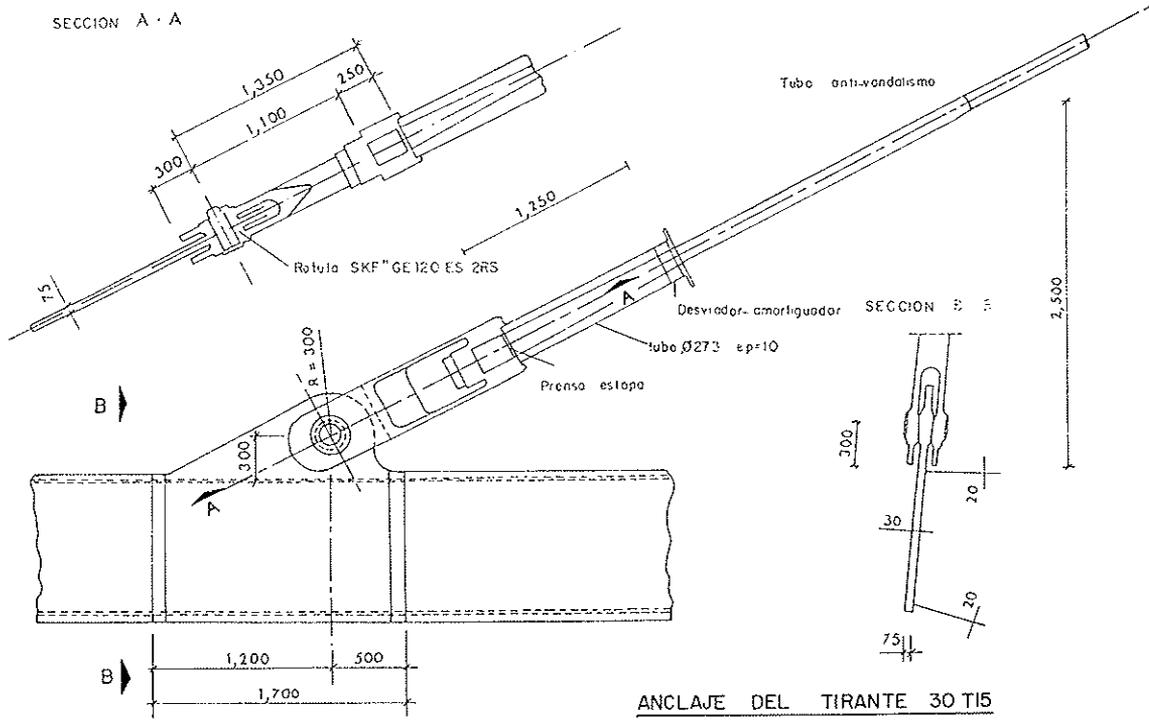


Fig. 13.

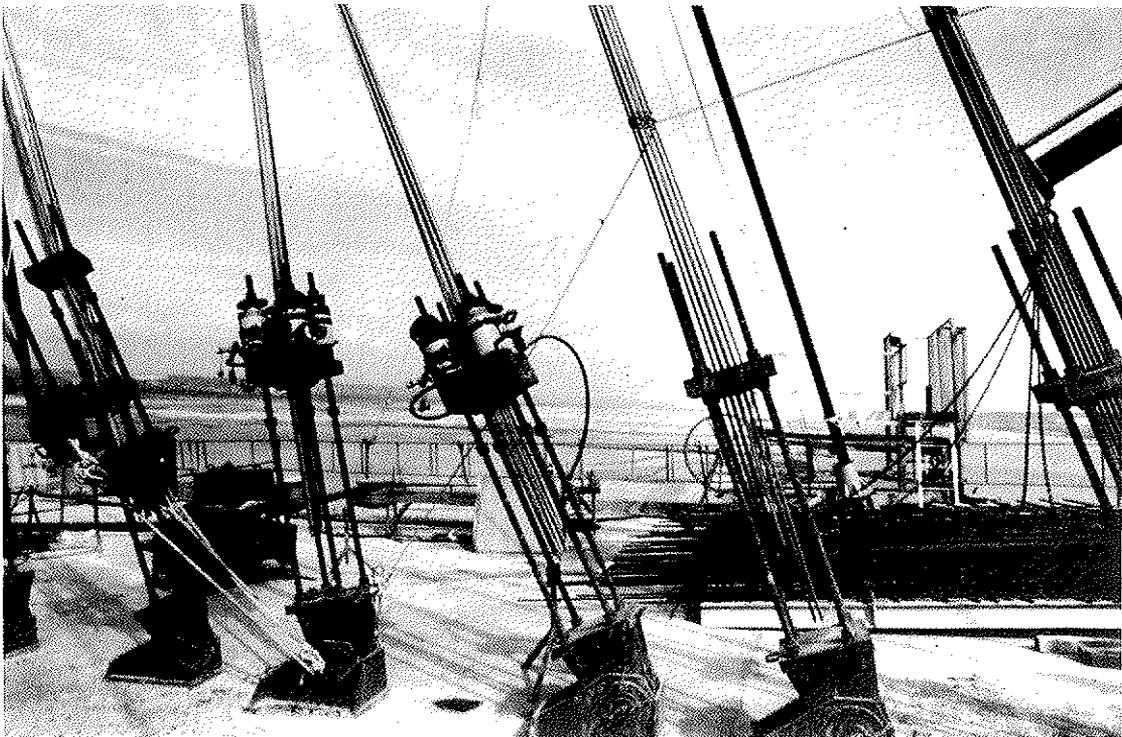


Fig. 14

Cuando es necesario prolongar un tirante provisional, se destesa primero por su dispositivo de anclaje a nivel del tablero y se instala a continuación, en el anclaje superior, un sistema hidráulico especial, consistente en tres pequeños gatos de doble efecto y unos 40 cm de recorrido, y 6 gatos de desacuñar. De este modo, se puede "tragar" el tirante que cuelga en la pata de la pila, mediante una serie de movimientos de vaivén de los bloques de anclaje superpuestos, coordinados con el acuíe y desacuñe de las mordazas de cada bloque. Los dispositivos de anclaje superiores están orientados de forma que los tirantes atraviesan la pared de la torre por tubos alineados según la catenaria del tirante más largo. A la salida de los tubos se han previsto desviadores provisionales de hormigón armado, que permiten orientar los tirantes, sin quiebro brusco, en todas las otras posiciones.

El tramo metálico central

La luz central del puente se descompone en dos tramos, de 116 m, de hormigón, y 624 m de tablero metálico, en el centro. Esta distribución fue prevista, desde el principio del proyecto, para dar rigidez al gran vano central mediante los voladizos de hormigón, lo que, bajo ciertos aspectos relativos al comportamiento dinámico del puente, hace que éste se comporte como una estructura de 624 m de luz, más cercana a los records existentes, de unos 500 m.

El tablero de acero tiene la misma forma exterior que el tablero de hormigón. Es un cajón de poco canto, con una losa ortótropa en la parte superior, con una chapa de 14 mm en el carril lento y 12 mm en el carril rápido, con canaletas trapezoidales, para darle rigidez,

La fijación de los tirantes se asegura mediante orejas verticales de las chapas de cierre laterales, que sobresalen del tablero. En estas zonas, las chapas llegan a tener 85 mm de espesor. La rigidez del cajón se obtiene con diafragmas verticales inferiores.

La fabricación de los cajones se lleva a cabo en dos talleres, uno cerca de Nancy, en el este de Francia, donde se construyen

las vigas de borde y los diafragmas, y el segundo, a orillas del Sena, cerca del puente de Tancarville, ya citado, en donde se preparan los paneles con rigizadores y se hace un ensamble final.

El tablero se divide en dovelas de 19,65 m de longitud, que es la distancia entre anclajes de tirantes. Cada dovela pesa 180 t. La fabricación del tablero es una operación muy delicada, debido a la dimensión de las piezas, y a las estrictas tolerancias exigidas. Se efectúa un montaje de prueba, por grupos de tres dovelas, antes de su almacenamiento.

El montaje, que comenzará después del verano de 1993, se prevé que se haga mediante una estructura de izado, montada en voladizo. Las dovelas se transportarán con barcazas hasta la vertical del voladizo y se izarán hasta su posición, para ser luego soldadas. Después de instalar los tirantes correspondientes, se avanzará la estructura de izado para efectuar un nuevo ciclo.

Para dar una idea de la flexibilidad del tablero, podemos citar dos ejemplos:

Cuando se monte la última dovela de cada voladizo y en el momento de izarla, el tablero descenderá 2,60 m, antes que la dovela despegue de la barcaza.

Durante la fase más crítica de la construcción del puente, justo antes de cerrar el vano central, con un voladizo de 427 m, los efectos del viento podrán ser muy grandes: el momento flector horizontal en el tablero, en su unión con la torre, podría llegar a 1.500 MNm, con un viento de cincuenta años de periodo de retorno. Se ha calculado que el movimiento horizontal del extremo del tablero puede oscilar entre 1,60 m en sentido del viento y 1 m contra el viento.

Para estabilizar el tablero en caso de tempestad, se imaginaron diversas soluciones, tales como la instalación de cables estabilizadores anclados en grandes masas sumergidas en el lecho del río, que se instalarían con uno o dos días de antelación, en caso de predicción meteorológica de tempestad. Hoy día, la solución que parece ser la definitiva es la propuesta por la empresa MOMBERG & THORSEN, consistente en colocar sobre el tablero un amortiguador

dinámico, llamado TMD, (Tuned Mass Damper), o amortiguador de masa sintonizado. Se trata de una masa de unas 40 t, que puede oscilar transversalmente, con amortiguadores hidráulicos; este dispositivo tiene la ventaja de que permite poder seguir, a partir de cierta distancia, la construcción del tablero y estar así siempre operacional. Se calcula que este amortiguador reduce en un 40% el momento flector horizontal en el empotramiento con la torre.

Otra particularidad de este puente es la protección contra la corrosión del tablero metálico: el exterior se protegerá con pintura, pero el interior quedará desnudo, y se instalarán en el interior del tablero dos sistemas de deshumidificación y distribución de aire seco, para mantener la humedad relativa por debajo del 60%.

El coste de la instalación y mantenimiento del sistema es muy inferior al de la pintura interior. Este dispositivo de protección ya se ha empleado con éxito en otros puentes, en Escandinavia, como por ejemplo en el puente atirantado de Faroe.

Los tirantes

El sistema de atirantamiento del Puente de Normandía consiste en dos capas laterales de tirantes, dispuestos en semiarpa. Hay 23 pares de tirantes a cada lado de las torres.

Del lado de la tierra, los 23 pares de tirantes están anclados en el tablero de hormigón (18 en los viaductos empujados y 5 en el voladizo). Del lado del Sena, 7 pares de tirantes están anclados en el voladizo de hormigón y 16 en el tablero metálico.

Por razones estéticas y técnicas (como la optimización con respecto a la acción del viento) la separación entre tirantes, a nivel del tablero, es variable: 14,50 m en los viaductos de acceso; 16 m en los voladizos de hormigón y 19,65 m en el tablero metálico.

En su parte superior, todos los tirantes se anclan en el interior de los cajones que constituyen el mástil metálico, de 62 m, que corona cada torre. Los ejes de los tirantes se cortan en el plano vertical central del mástil, con una separación vertical de 2,70

m. Los anclajes superiores son regulables, y todos los inferiores fijos.

El sistema de atirantamiento incluye también dos dispositivos de amortiguación: cuatro cables transversales por capa de tirantes, llamados "agujas", para amortiguar las vibraciones verticales, y amortiguadores hidráulicos situados en la base de los tirantes, a unos 4 m de altura y fijos al tablero, para amortiguar la vibración transversal de los mismos. Estos dos sistemas de amortiguación están siendo estudiados y puestos a punto actualmente. Más adelante veremos que se ha añadido un tercer dispositivo.

Los tirantes, propuestos por FREYSSINET, consisten en un haz paralelo de cordones de pretensado de alta resistencia a la fatiga, galvanizados y protegidos individualmente por una vaina extruida de polietileno de alta densidad, con un relleno de cera en los intersticios entre los alambres y en la periferia. La vaina de polietileno sigue la forma exterior del cordón, y tiene un espesor mínimo de 1,5 mm. Cada cordón se ancla, mediante una mordaza de tres cuñas, especialmente diseñada para tirantes, con excelente comportamiento estático y a la fatiga, en un bloque de anclaje común. La zona del anclaje, donde el cordón está desnudo, se protege contra la corrosión mediante una inyección de cera, que queda confinada gracias a un prensaestopas especial.

El ajuste de la tensión del tirante durante las fases de construcción, se hace con un gato monocordón. Los ajustes ulteriores, durante la vida de la obra, se pueden llevar a cabo, si ello fuera necesario, mediante un gato que tira del conjunto del anclaje; para este fin, los anclajes regulables van provistos de un tubo de reglaje roscado, con su anillo de apoyo, que permite regular la tensión, con gran precisión.

En la zona de transición de los anclajes con la parte libre de los tirantes, se añade un dispositivo llamado guía-desviador que tiene como función, por una parte, agrupar el paquete de cordones, y por otra parte, mediante unos partines de neopreno, centrar el tirante en el tubo metálico que atraviesa la estructura, de hormigón o metálica, para proporcionar una guía fija que absorbe

SECCION TIPO DE TIRANTE



PAQUETE DE CORDONES

CORDON INDIVIDUAL PROTEGIDO

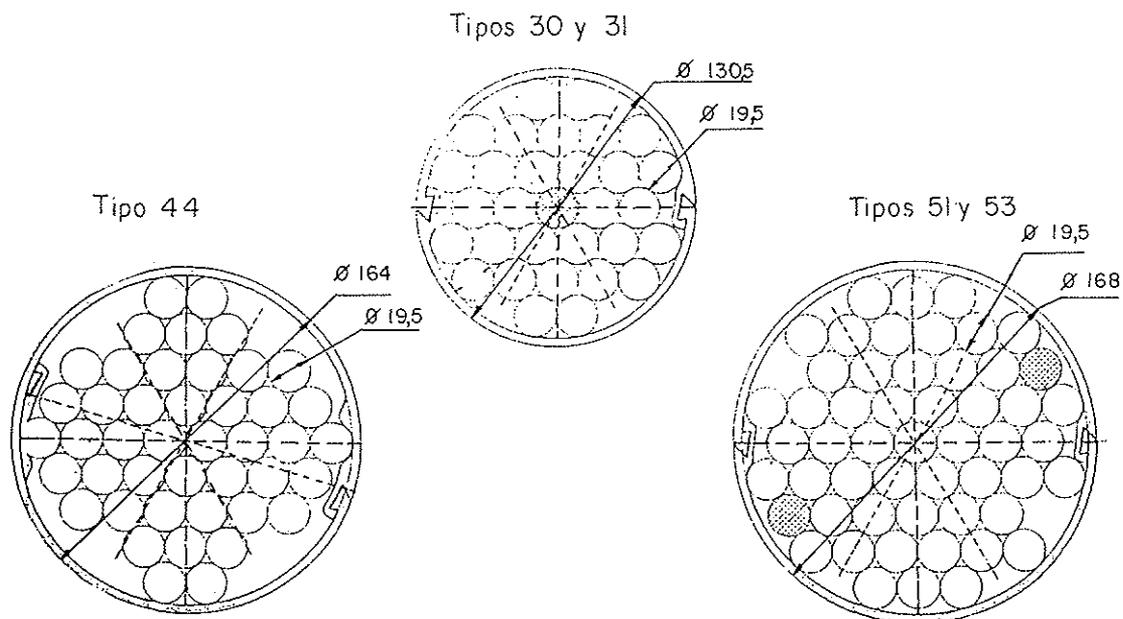


Fig. 15.

las variaciones angulares del tirante y reduce su transmisión a las cuñas.

Desde un principio, se planteó la cuestión del efecto del viento, fenómeno muy importante para una luz tan grande como la del Puente de Normandía, en el que se ha estimado que el 55% del momento de fle-

xión horizontal producido en la unión del tablero con la torre es consecuencia de la resistencia al viento de los tirantes, y sólo el 45% restante es debido a la resistencia del tablero.

Se hicieron varios ensayos en túnel de viento, y el cliente decidió que, para

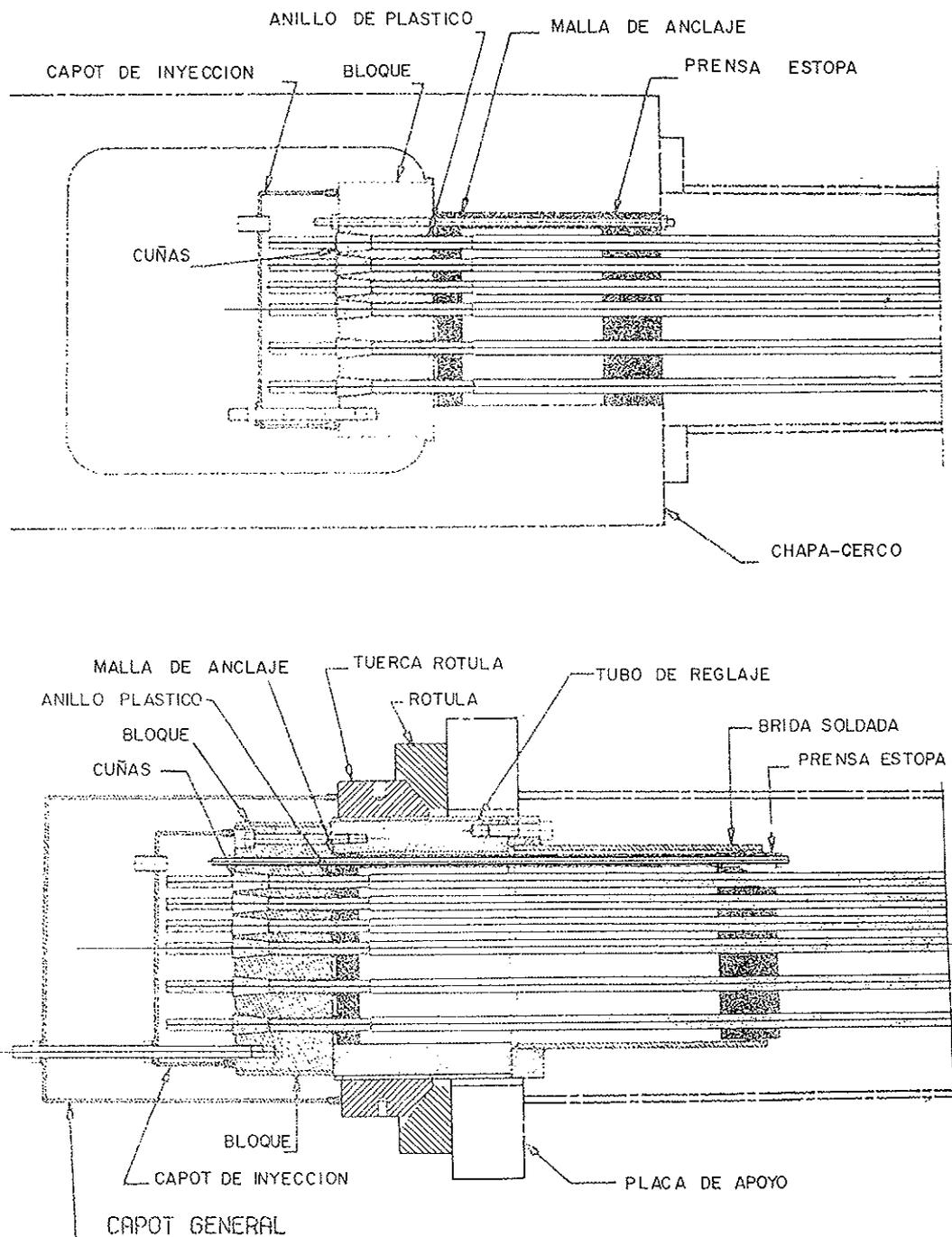


Fig. 16.

aumentar el coeficiente de seguridad global, era deseable disminuir el coeficiente de resistencia al avance. Tras estudiar varias soluciones, FREYSSINET propuso añadir, alrededor del haz de cordones, una delgada vaina de plástico, circular, fabricada en dos medias cañas y montada después de la instalación y tesado de los cordones. Esta solución reducía de manera notable el coe-

ficiente de resistencia a la acción del viento, sin aumento sensible del diámetro del cable. Esta vaina complementaria se instala por trozos de 3 m. Queda interrumpida en los collarines de sujeción de las "agujas".

También se ha evocado el problema de la vibración de los tirantes bajo los efectos simultáneos de la lluvia y el viento, fenó-

meno que se ha observado recientemente en varios puentes atirantados japoneses y que produce vibraciones de gran amplitud, incluso con vientos relativamente moderados.

Después de las pertinentes comprobaciones en ensayos realizados en túnel de viento, el problema se ha resuelto añadiendo un fino cordón de plástico, de media caña, de 3 mm de diámetro, soldado en hélice en los elementos de vaina aerodinámica, cuyo objeto es impedir la circulación del agua a lo largo de la misma. Se trata del tercer sistema antivibratorio antes citado.

Montaje y tesado

El montaje de los tirantes se realiza con un cordón, según un procedimiento ya utilizado con éxito por FREYSSINET en varios puentes atirantados. El tesado de los cordones se hace al mismo tiempo que su montaje.

La particularidad del puente de Normandía es la gran longitud que alcanzan los tirantes: los más largos tienen unos 450 m, con un peso total de más de 25 t. Para poder realizar el montaje con medios y equipo ligero, se ha diseñado un sistema de soporte de los cordones que consiste en un doble funicular soportado por los propios cordones de cada tirante. El funicular de montaje se compone de una serie de aros desmontables, mantenidos a la distancia conveniente por 3 cables, en el interior de los cuales se encuentra un cable de tracción que arrastra unos "carritos" a los que van fijados los cordones del tirante, que son así izados, a partir de la bobina de cordón situada en el tablero, cerca del anclaje inferior, hasta el anclaje superior, a través del cual se enfilan y se tesan.

Por cada par de capas de tirantes hay un funicular único, con dos ramas, una para cada tirante del mismo par, aguas arriba y aguas abajo. Cuando una rama del funicular iza un par de cordones (pues se suben de dos en dos), el carrito correspondiente a la otra rama desciende para ir a buscar un par de cordones del otro tirante.

El traslado del funicular es una operación sencilla, pues el primer cordón de cada

tirante se monta mientras el funicular está instalado en el tirante precedente. Una vez anclado este primer cordón en su propio anclaje, la operación de descenso, desmontaje de los aros del tirante precedente y montaje en el siguiente es muy rápida.

Se consigue así realizar una operación que requeriría un equipo extremadamente potente y costoso si hubiera que instalar tirantes prefabricados.

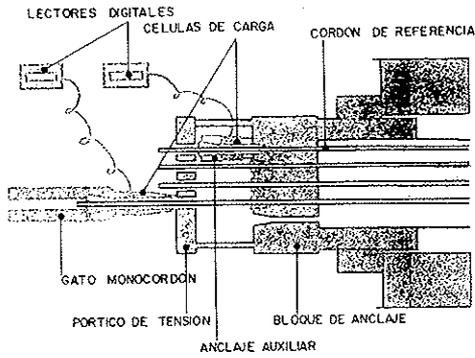
El tesado de los tirantes se hace por el método puesto a punto y patentado por FREYSSINET, llamado ISOTENSION. Se trata de un procedimiento que garantiza una tensión igual en todos los cordones instalados, individual y sucesivamente. Permite, asimismo, el empleo de un gato de tesado ligero y pequeño, puesto que la fuerza necesaria queda limitada a la de un cordón.

El principio de ISOTENSION es el siguiente: el primer cordón del tirante se tesa a una fuerza predeterminada, medida mediante una célula electrónica de medida de fuerza, que se deja bajo el anclaje, provisional, del primer cordón. El valor de esta fuerza varía a medida que se tesan los otros cordones. Durante el tesado de cada uno, la fuerza aplicada por el gato se compara y se iguala a la fuerza del primer cordón.

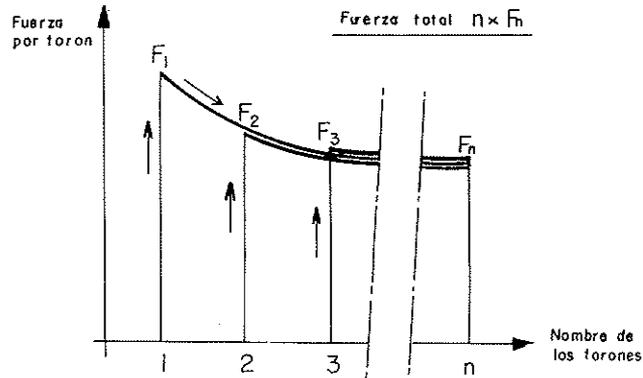
La tensión de cada cordón tesado y anclado, sigue así las mismas variaciones de longitud y por lo tanto de esfuerzo. La operación de tesado termina con la recuperación de la célula de fuerza del primer cordón, y su tesado (igual que el último cordón) y anclaje definitivo en el anclaje del tirante.

El objetivo que se han fijado las empresas es obtener el perfil correcto del puente con el primer tesado. Para ello, la importancia de la precisión y evaluación de la fuerza de tesado del primer cordón es esencial en las zonas con tablero de hormigón. Esta fuerza teórica puede ser corregida mediante un programa informático que tiene en cuenta toda una serie de parámetros medidos en la obra: geometría, módulos de elasticidad, temperatura, hora, etc.

En el tramo central, al contrario, el dato esencial es la longitud inicial del tirante.



Isotension



Isotension

Fig. 17.

Para ello, el primer cordón de cada tirante o cordón patrón, se mide con gran precisión, con corrección de temperatura; y el tesado de este primer cordón, se realiza con referencia al alargamiento correspondiente. La fuerza de tesado obtenida es, por supuesto, la referencia para el dispositivo de ISOTENSION. Como medida complementaria de control, se decidió también utilizar el cordón patrón en los tirantes del tablero de hormigón.

RESUMEN Y CONCLUSION

El puente de Normandía es una estructura singular, no sólo por sus dimensiones que lo convierten en record mundial por varios conceptos, sino también por la aplicación en gran escala de tecnologías en cierta medida ya experimentadas, como son, entre otras:

- pretensado exterior del tablero;
- avance mediante empuje "en escalera" de los tableros de los accesos;
- utilización del cordón individualmente protegido (engrasado/envainado) en el pre-

tensado del tablero;

— utilización del cordón de acero galvanizado en los tirantes;

— puesta a punto de los tirantes transversales (agujas) de unión entre tirantes, cuando dichos tirantes están materializados por un mazo de cordones;

— colocación a posteriori de una vaina de plástico para mejorar la respuesta aerodinámica de la sección del tirante.

Ello supone que este gran proyecto está respaldando, con sus soluciones constructivas, todos los últimos avances de las técnicas conexas al pretensado que se han venido aplicando, recientemente, en otros proyectos vanguardistas.

La solución a los problemas de concepción y ejecución de esta gran estructura atirantada, han sido el reto lanzado a la actual ingeniería; y ésta ha sabido responder aunando las voluntades de los especialistas y buscando solidariamente el éxito de esta empresa.

La forma en que este reto se está superando, puede ser interesante para todos nosotros.

PUENTE DE NORMANDIA

CANTIDADES

HORMIGON=	70.000 m ³
ARMADURAS PASIVAS=	10.000 t.
ACERO DEL TRAMO CENTRAL=	5.600 t.
TIRANTES DEFINITIVOS=	2.600 t.
TIRANTES PROVISIONALES=	175 t.
PRETENSADO=	2.000 t.
PRETENSADO (GALVANIZADO)=	140 t.
PRETENSADO (ENVAINADO-ENGRASADO)=	350 t.

PUENTE DE NORMANDIA

DIMENSIONES

LONGITUD TOTAL=	2141,25 m.
VIADUCTO DE ACCESO NORTE=	737,50 m.
VIADUCTO DE ACCESO SUR=	547,50 m.
ALTURA DE LAS TORRES=	214 m.
ANCHURA DEL TABLERO=	22,20 m.
GALIBO DE NAVEGACION=	60 m.
LUZ CENTRAL=	856 m. = RECORD MUNDIAL DE PUENTES ATIRANTADOS.

Fig. 18.

PRINCIPALES PARTICIPANTES

PROPIEDAD:

Cámara de Comercio e Industria de Le Havre con el concurso de los Entes Locales y Regionales (Departamento y Región).

DIRECCION DE PROYECTO Y OBRA:

Mission Pont de Normandie (DDE de Seine-Maritime)

ANTEPROYECTO DETALLADO:

SETRA, con la asistencia de:

-QUADIC y SOGELERG (Viaductos de acceso).

-SETRA y SEEE (Torres).

-SOFRESID (Estructuras metálicas).

-ONERA y CSTB (Viento).

-CETE de Rouen (Cimientos).

-Ch. LAVIGNE, F. DEOYELLE, Arquitectos.

EXPERTO ACCIONES VIENTO:

A. DAVENPORT.

CONSTRUCCION Y PROYECTO DE EJECUCION:

Hormigón: GIE Pont de Normandie.

Tramo central: MONBERG & THORSEN.

TIRANTES Y PRETENSADO:

FREYSSINET.

BIBLIOGRAFIA

—B. DEROUBAIX, A. DEMARE, R. LAVOUÉ. "Le Pont de Normandie - Pont à haubans sur la Seine, entre Le Havre et Honfleur". Travaux, abril 1989.

—B. DEROUBAIX, A. DEMARE, R. LAVOUÉ. "Pont de Normandie: les travaux sont commencés". Travaux, julio 1990.

—M. VIRLOGEUX, B. DEROUBAIX. "Conception et construction du Pont de Normandie". Simposio de la Asociación Internacional de Puentes y Estructuras. San Petersburgo, noviembre de 1991.

—"1110 MÈTRES DE TRAVÉES POUSSÉES". Le Moniteur, 3 de julio de 1992.

—B. DEROUBAIX, A. DEMARE, R. LAVOUÉ, C. MONTEMONT. "Le Pont de Normandie, altitude 215 m". Travaux, abril 1993.

—M. VIRLOGEUX. "Les études du Pont de Normandie". Travaux, abril 1993.

RESUMEN

El Puente de Normandía, estructura atirantada de 856 m de luz central, es una de las grandes obras civiles en construcción en el mundo.

En este artículo el autor describe este magno proyecto en su conjunto, detallando sus partes más características, sobre todo aquellas que se encuentran relacionadas con la técnica del pretensado.

En esta descripción queda plasmada la actual situación de los trabajos y, sobre todo, las soluciones aportadas a los problemas que se han presentado, derivados de la magnitud de la obra.

SUMMARY

The Normandy bridge, cable-stayed structure with 856 m main span, is one of the world's largest civil works under construction.

The author describes in this paper the entire project as a whole, detailing also some design features, in particular those related with post-tensioning and cable stays.

The description reflects the present status of the works as well as the various solutions adopted to solve the problems arisen by the size of this project.

Reparación localizada de columnas de hormigón con pérdida total de resistencia

J.L. Ramírez, Dr. Ing. Ind.

J.M. Bárcena, Dr. Ing. Ind.

J.I. Urreta, Dr. Ing. Ind.

J.A. Sánchez, Ing. Ind.

B. Hernández, Lic. C. Quím.

LABEIN - Bilbao

0. INTRODUCCION

El propósito de este artículo es el presentar resultados de un programa de investigación sobre la reparación de columnas de hormigón que, debido a diversas circunstancias, han perdido un porcentaje importante de su capacidad resistente, más del 50% por ejemplo, y resulta aconsejable proyectar una reparación capaz de permitir resistir la carga total.

El esfuerzo que tienen que soportar es de compresión centrada, y se impone especialmente la condición de que la reparación sea localizada, es decir, que la longitud de la transferencia de esfuerzo a cada lado de la zona dañada sea mínima. Interesa, igualmente, que su espesor sea reducido.

Esta problemática se presenta, en la práctica, en casos de esfuerzos anormales que rompen una zona debilitada del pilar, como áreas con corrosión avanzada de armaduras y estribos, zonas afectadas por choque de vehículos, mala calidad localizada del hormigón, zonas de pilares rotas por dilataciones anormales causadas por incendios, explosiones...

En lo que sigue, se exponen los resultados obtenidos con dos procedimientos de reparación, de los cuatro en que ha consistido el programa completo: uno se basa en la aplicación de un encamisado de hormigón polimérico y el otro en angulares de acero colocados contra las esquinas y apretados por tornillos de alta resistencia.

1. DISEÑO DE LAS COLUMNAS PARA REPARACION TOTAL

Las dimensiones y calidades de los materiales pueden verse en la figura 1, haciéndose además las siguientes observaciones:

—Se ha establecido un pequeño recubrimiento para dar mayor resistencia a la flexión, proporcionando mayor seguridad frente a eventuales roturas por manejo de los pilares durante las tareas de reparación.

—La cuantía ha sido lo más reducida posible, para dejar pequeña resistencia residual en la sección que simula la rotura del pilar.

—La pérdida de resistencia del pilar, o su rotura previa al refuerzo, se ha simulado por la interrupción del hormigón, con placa de plástico expandido colocada

en la correspondiente posición en el encofrado, aunque las dos partes del pilar quedan unidas por las armaduras.

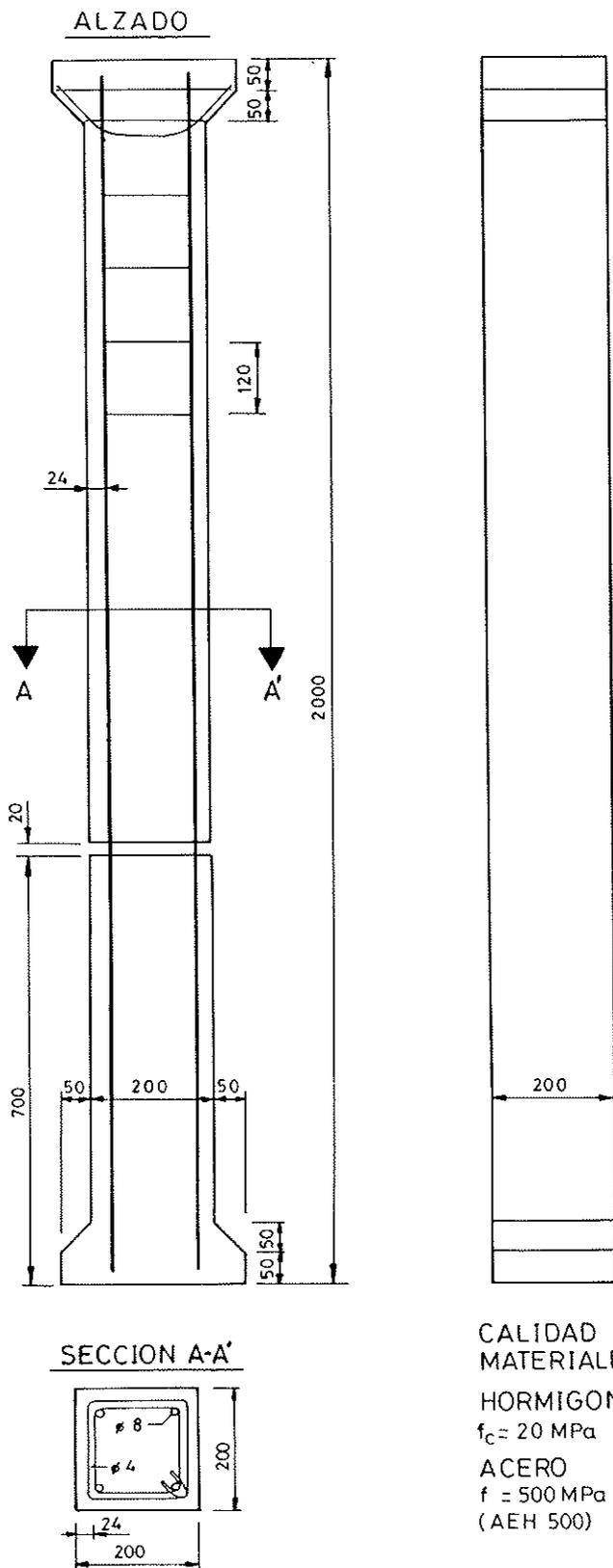


Fig. 1

2. FABRICACION DE LAS COLUMNAS ORIGINALES

Se preparó un molde metálico sextuple, que fue hormigonado tres veces, inser-

dimientos diferentes de reparación. Al haber sido hormigonado el molde tres veces, se han obtenido tres valores para cada tipo de ensayo.

Una vez que se desencofraron los pila-

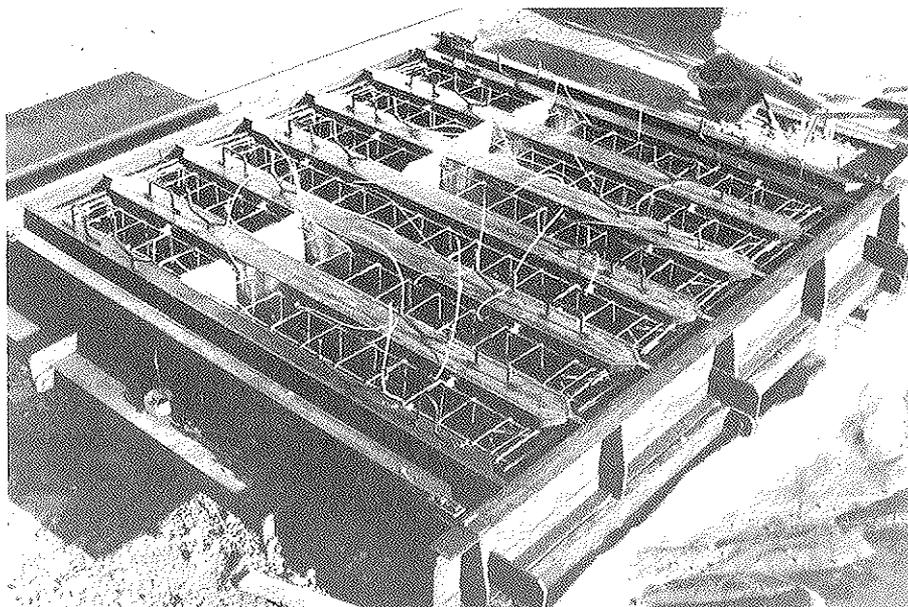


Foto 1

tando, en la posición adecuada, una lámina de plástico poroso para simular la rotura del pilar (Foto nº 1).

Cada serie de seis columnas ha permitido comparar una de referencia, sin la rotura simulada, con hasta cinco proce-

res (Foto nº 2), fueron transportados a LABEIN, para su almacenamiento hasta el momento de llevar a cabo las reparaciones y ensayos. El almacenamiento ha durado del orden de 9 meses a la intemperie y unos pocos meses a cubierto.



Foto 2

3. DISEÑO DE DOS TIPOS DE REPARACION PARA CARGA TOTAL

3.1. Criterios generales

De los cinco tipos de reparación programados, nos referimos en este artículo solamente a dos de ellos que son:

- Recrecido de hormigón polimérico.
- Angulares adosados, con tornillos pretensados.

Aún cuando, en la práctica, el propósito de estos tipos de reparación es elevar la resistencia hasta la total del pilar, se han diseñado los refuerzos de forma que la rotura se produjera a una carga alrededor del 80% de la del pilar, de forma que el fallo esperable correspondiera a la zona del refuerzo y se pudieran realizar juicios de valor sobre el comportamiento de los mismos en comparación con los cálculos teóricos.

3.2. Encamisado de hormigón polimérico

Este sistema de refuerzo se basa en la transferencia de esfuerzo entre el hormi-

gón original y el hormigón polimérico, a través de adherencia y fricción.

En el diseño, utilizando las características teóricas de los materiales, se ha tenido en cuenta lo siguiente:

—La sección transversal del recrecido debe absorber la carga vertical.

—La resistencia a esfuerzo rasante entre columna y recrecido, sigue la fórmula:

$$\tau_r = f_{ct} + \mu \cdot \sigma_h$$

$$\mu = 0,7 \text{ para superficie lisa.}$$

f_{ct} = Resistencia a tracción del hormigón original.

σ_h = Presión de zunchado, debido al efecto Poisson, entre columna y recrecido, para el que se asume distribución lineal.

—Hay que comprobar el espesor del recrecido, para el efecto horizontal de la presión σ_h

Las dimensiones finales resultantes de este cálculo han sido las de la Figura 2.

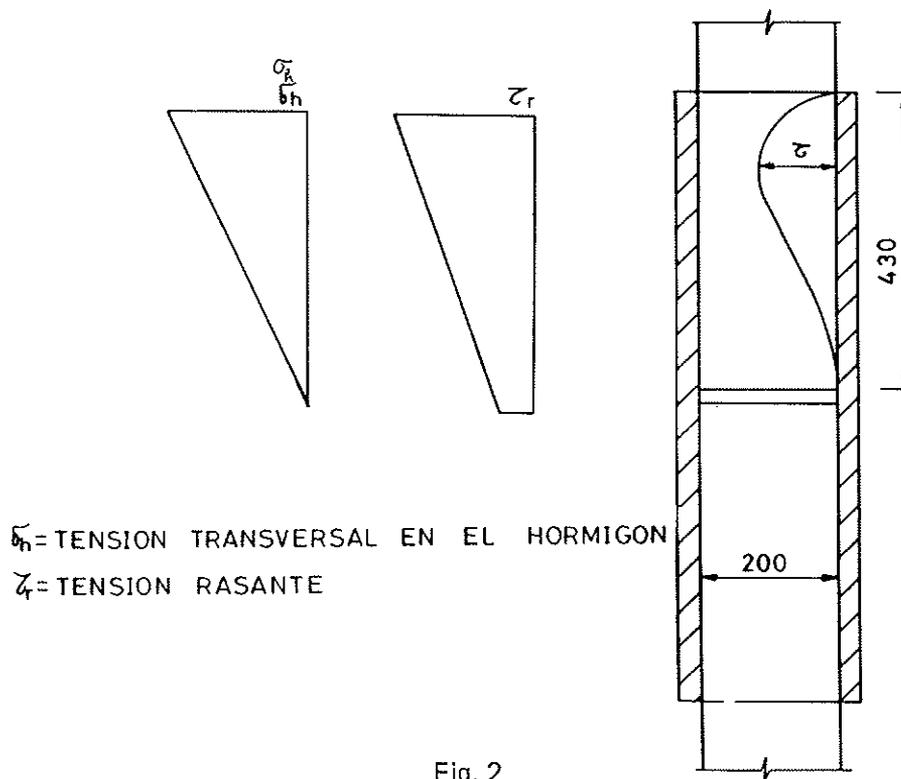


Fig. 2

3.3. Angulares adosados con tornillos pretensados

El esquema de este refuerzo ha consistido en cuatro angulares de acero, con piezas perforadas soldadas a sus alas, en las que es posible introducir tornillos de alta resistencia. A los angulares se les aplica, en el momento de la reparación, un mortero epoxi tixotrópico, que permite la adherencia y el ajuste, sin holguras entre ellos y las esquinas del pilar de hormigón, al apretarse controladamente los tornillos.

La transferencia de esfuerzo entre angulares y hormigón, se hace en función del rozamiento provocado por el tensado de los tornillos, sin tener en cuenta, en este caso, el aumento de la compresión lateral generada por el efecto zuncho.

En teoría, un sistema de este tipo podría servir para reparaciones rápidas en emergencias, teniendo preparados diversos juegos de angulares y tornillos.

Los pasos para el cálculo han sido:

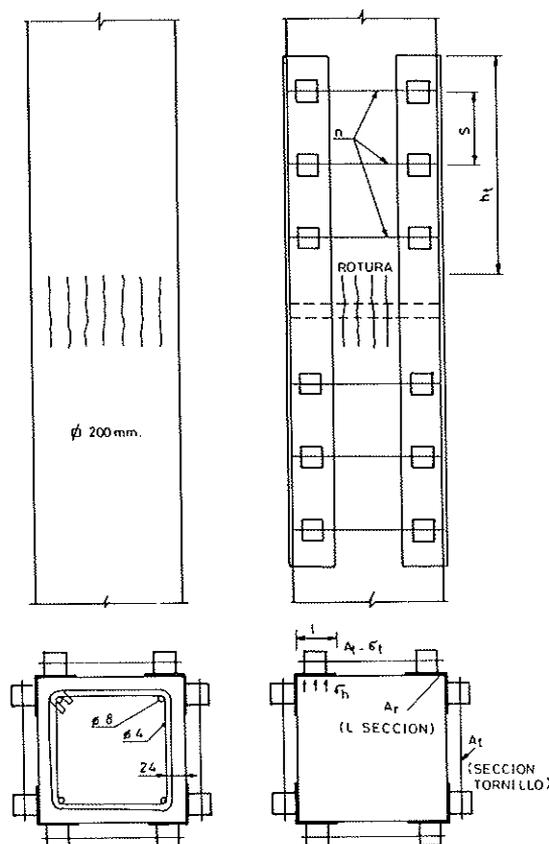


Fig. 3

—Determinación de la sección de angulares necesaria.

—Apriete de los angulares y tensión de los tornillos.

—Número de planos de tornillos necesarios, suponiendo que la resistencia al deslizamiento entre columna y ángulos es la suma de las tracciones en los tornillos, multiplicada por un coeficiente de rozamiento (se supone un valor de 0,45).

—Comprobación de la tensión de compresión horizontal en el hormigón, σ_h .

—Comprobación de la cortadura del hormigón de las esquinas.

Las dimensiones finales resultantes de este cálculo han sido las de la Figura 3.

4. PROCEDIMIENTOS DE REPARACION

4.1. Fase previa

Antes de iniciar la reparación, se hicieron una serie de operaciones previas a los pilares objeto de ensayo.

En primer lugar, se cepillaron con cepillo de alambre las paredes de los mismos, en la zona donde el hormigón iba a entrar en contacto con el refuerzo. De esta manera, se eliminaba la lechada superficial y se mejoraba la adherencia entre los materiales. Estas superficies se soplaron, posteriormente, para evitar la presencia de polvo superficial.

Posteriormente, se rellenó con yeso la parte exterior de la rotura simulada en los pilares, con objeto de que los materiales de reparación no penetraran en este hueco y dotasen de continuidad al pilar.

4.2. Encamisado de hormigón polimérico

Después de numerosas pruebas para decidir la composición del hormigón polimérico, se optó por 14% de resina y 86% de árido de granulometría 0/5 mm.

Con objeto de armar mínimamente el hormigón polimérico y evitar la caída o

desprendimiento de trozos en la rotura, se colocó una malla de acero, de 150 x 150 ϕ 3 mm, del tipo AEH 500, a la cual se aplicaron los separadores necesarios para guardar las distancias adecuadas a los paramentos.

El encofrado se confeccionó de paneles de madera, que fueron imprimados con cera líquida para favorecer la colabilidad en un espesor de 3 cm y permitir el desencofrado, que tuvo lugar 24 horas después del hormigonado de los encamisados (Foto nº 3).

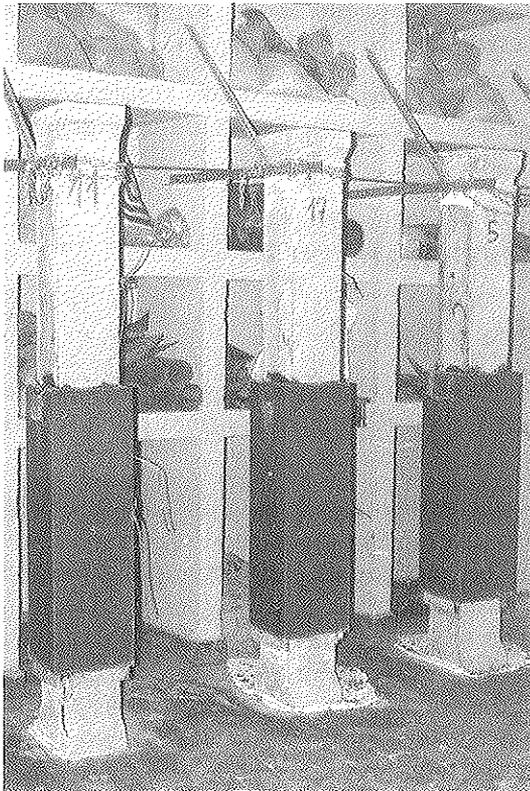


Foto 3

4.3. Angulares adosados con tornillos pretensados

Para este tipo de reparación se utilizan angulares de acero, con cuadradillos perforados, soldados, y tornillos de alta resistencia, con sus correspondientes tuercas y arandelas.

Tuvo que determinarse la relación, par aplicado/tracción en el tornillo, y elegir un material de acoplamiento angulares-esquinas de pilar, que endureciera

rápidamente y que fuera tixotrópico para evitar su escurrimiento del angular.

Después de limpiar las caras interiores de los perfiles eliminando la capa de óxido y empleando tricloroetano, se les aplicó con espátula el mastic, por su parte interior, y fueron colocándose uno a uno. Después, se introdujeron los tornillos en los cuadradillos soldados y se apretaron al par correspondiente. (Foto nº 4).

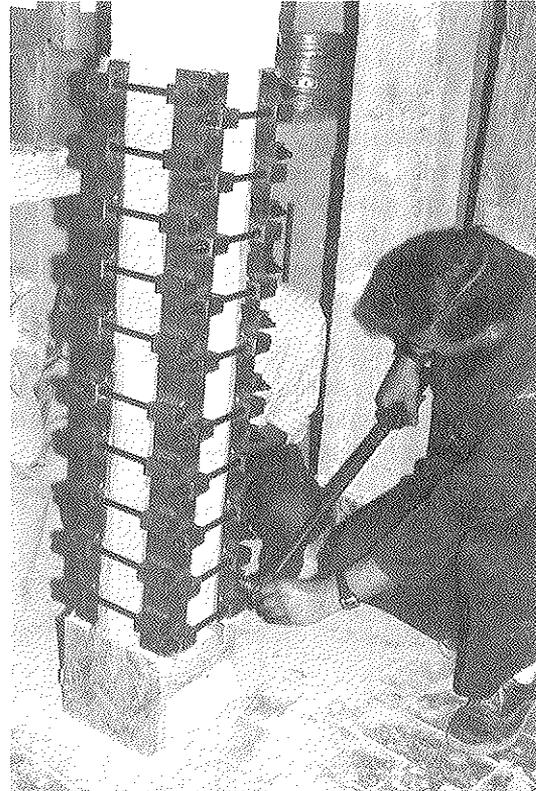


Foto 4

5. DESARROLLO Y RESULTADOS DE LOS ENSAYOS

5.1. Características de los materiales de reparación

5.1.1. Hormigón polimérico

Se confeccionó con un árido silíceo de 0-5 mm, con 14% de finos, y el 14% de resina epoxi y endurecedor poliamina.

Los ensayos de compresión dieron los siguientes resultados:

Cuadro 1
Módulo de Young y coeficiente de Poisson

Probeta nº	Resistencia a compresión (MPa)	E (MPa)	ν	Em (MPa)	ν_m
1	72,7	19.023	0,211	19.109	0,209
2	74,5	19.195	0,209		

5.1.2. Angulares de acero

Se utilizaron con la calidad habitual A-42 de límite elástico $f_{yk} = 260$ MPa.

5.1.3. Tornillos

Los tornillos, tuercas y arandelas utilizadas para fijar los angulares fueron de acero de alta resistencia en calidad 8.8, de un límite elástico $\tau_E = 640$ MPa.

5.1.4. Mastic de acoplamiento

Se utilizó un mastic adhesivo, comercial, de las siguientes características:

Pot life: 2 horas.

Tiempo de endurecimiento: 48 horas.

Resistencia a la compresión: 90 MPa.

Resistencia a la tracción: 20 MPa.

5.2. Resultados de los ensayos sobre pilares

Como ya ha sido mencionado, de cada tipo de refuerzo se han ensayado 3 pilares. Cada uno de ellos pertenecía a una amasada distinta.

Igualmente, se han ensayado, y ello en primer lugar, los tres pilares de referencia de cada serie, a los que no se les había practicado la rotura simulada y que han servido de término de comparación.

El procedimiento de carga seguido, tanto para los pilares de referencia como para los pilares reforzados, ha sido el de llegar en dos escalones sucesivos a la rotura: el primero, hasta el 40% de la

carga teórica de rotura y el segundo, hasta rotura, haciendo una descarga entre los dos.

Las columnas reparadas han sido ensayadas alrededor de dos semanas después de la realización de las reparaciones.

5.2.1. Valores numéricos

Cuadro 2

PILARES DE REFERENCIA		
Serie	Edad rotura (días)	Carga rotura (kN)
N-1	380	787,1
N-2	375	932,9
N-3	360	779,9

Cuadro 3

ENCAMISADO DE HORMIGON POLIMERICO		
Serie	Edad rotura (meses)	Carga rotura (kN)
N-1	≈ 15	957,8
N-2	≈ 15	1.079,0
N-3	≈ 15	916,6

Cuadro 4

ANGULARES ADOSADOS CON TORNILLOS PRETENSADOS		
Serie	Edad rotura (meses)	Carga rotura (kN)
N-1	≈ 17	909,5
N-2	≈ 17	1.061,2
N-3	≈ 17	940,1

5.2.2. Formas de rotura

Columnas de referencia

En los tres casos, la rotura se presentó en la sección central, con pandeo localizado de alguna de las armaduras.

Encamisado de hormigón polimérico

En dos casos, falló la parte no reparada de la columna, aunque se percibía que la rotura del refuerzo estaba próxima, al observarse algunas pequeñas grietas de tracción en el encamisado.

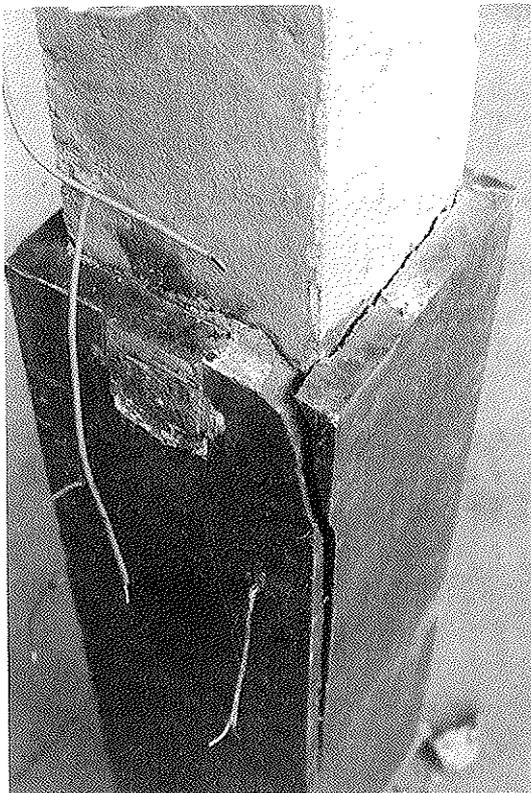


Foto 5

En el otro caso, la reparación de hormigón polimérico falló por tracción horizontal en las esquinas, siendo la rotura frágil y ruidosa (Foto nº 5). En el interior puede verse cortadura en el hormigón original, no en el plano de contacto de los dos hormigones, lo que muestra la buena adherencia entre ellos (Foto nº 6).

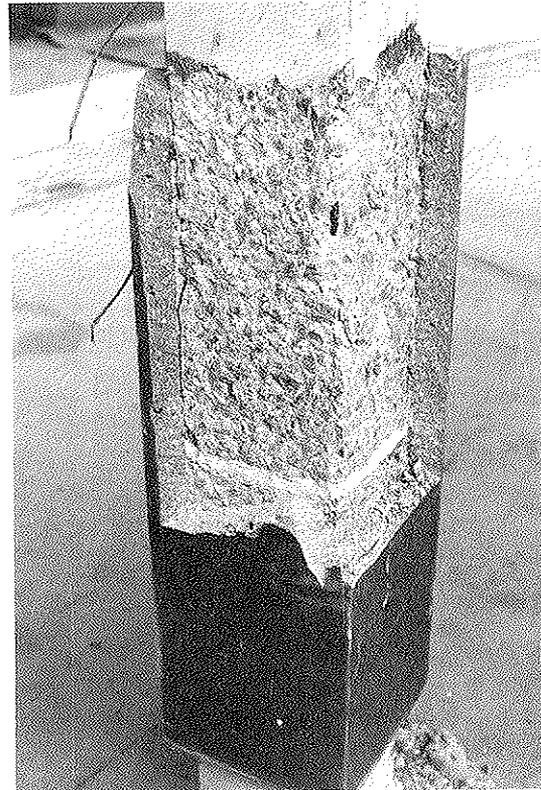


Foto 6

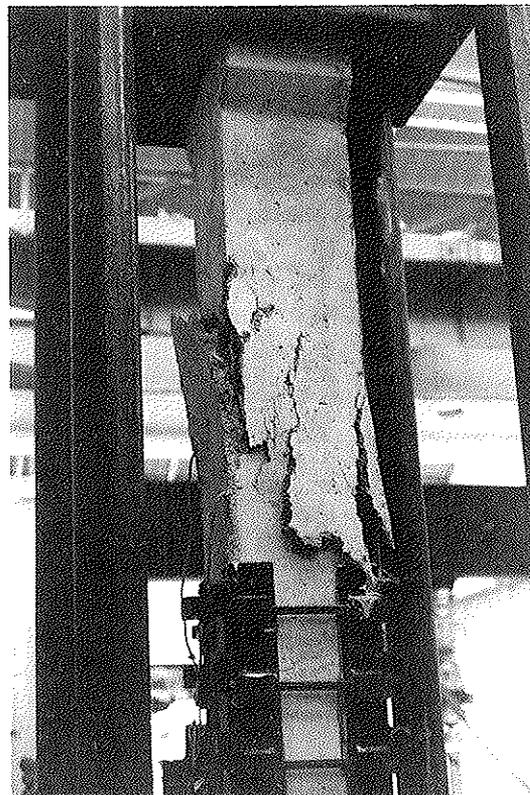


Foto 7

Angulares adosados con tornillos pretensados

La rotura se produce idénticamente en las tres columnas, fallando a compresión la parte de la columna original fuera del refuerzo (Foto nº 7).

6. COEFICIENTES DE SEGURIDAD Y TRANSFERENCIA DE CARGAS

En el presente apartado se va a analizar la eficacia de los diferentes refuerzos, comparando resistencias teóricas esperables en las pruebas, con las reales, y las de los diversos tipos de reparación entre sí.

Ello permitirá extraer algunas conclusiones respecto al comportamiento real de los elementos reparados, con respecto al cálculo, lo que posiblemente exija el establecimiento de algún coeficiente de seguridad adicional, e, igualmente, orientará sobre la técnica de reparación más idónea para el presente tipo de patología.

6.1. Valores teóricos de la resistencia, en el ensayo de rotura de los pilares

Con los valores *reales* de las características de los materiales y los parámetros adecuados para un ensayo normal a compresión, se han calculado las cargas esperables en los ensayos, de acuerdo con los supuestos teóricos generales utilizados en el diseño inicial de las reparaciones.

6.2. Eficiencia resistente y comparación de deformaciones

En los cuadros siguientes, se incluyen las relaciones teóricas y experimentales y los comportamientos relativos de las distintas reparaciones.

6.2.1. Pilares originales de referencia

Cuadro 5

Refe-rencia	CARGA ROTURA (kN)		γ_n (2/1)
	N_u cálculo (1)	N_u real (2)	
N-1	634,1	787,1	1,24
N-2	842,5	932,9	1,10
N-3	786,8	780,0	0,99
MEDIA	754,5	833,3	1,11

6.2.2. Pilares reforzados por encamisado de hormigón polimérico

Se comparan las resistencias teóricas de los refuerzos, con las resistencias reales obtenidas en ellos tras el ensayo en prensa de los pilares. En estos últimos, se ha descontado la resistencia transmitida a través de las armaduras, ya que éstas poseían continuidad a lo largo de todo el pilar, sin verse afectados por la simulación de rotura.

Cuadro 6

Refuerzo encamisado polimérico	CARGA ROTURA (kN)		γ_n (2/1)	γ_n Relativ. Resp. ref.
	N_u cálculo (1)	N_u real (2)		
N-1	811,8	895,7	1,10	0,89
N-2	915,0	1.008,6	1,10	1
N-3	798,1	854,5	> 1,07	> 1,08
MEDIA	841,6	919,6	> 1,09	> 0,99

Cuadro 7

Refuerzo angulares y tornillos A.R.	CARGA ROTURA (kN)		γ_n (2/1)	γ_n Relativ. Resp. ref.
	N_u cálculo (1)	N_u real (2)		
N-1	624	808,9	> 1,30	> 1,05
N-2	624	960,6	> 1,54	> 1,40
N-3	624	839,5	> 1,34	> 1,35
MEDIA	624	869,7	> 1,39	> 1,27

6.2.4. Comparación de deformaciones

Se han obtenido 14 curvas “carga sobre el pilar/acortamiento total”, para las diferentes columnas y las correspondientes curvas medias.

Se realizaron, sobre todo, para detectar algún deslizamiento anormal entre pilar original y refuerzo, que pudiera ser significativo de fallo o debilidad del refuerzo.

Como puede comprobarse en la Figura 4, que incluye conjuntamente las medias correspondientes a los tres tipos de pilares ensayados, no hay síntomas de deslizamiento previos a las roturas producidas.

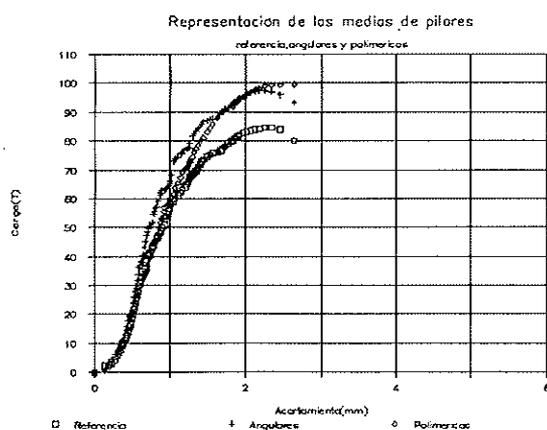


Fig. 4

7. CONCLUSIONES

La consideración de todo lo expuesto anteriormente, permite avanzar una serie de conclusiones que se indican en este apartado.

Se desea dejar constancia, sin embargo, de la abundancia de datos recogidos en forma de curvas carga-deformación, que va a permitir su estudio pormenorizado posterior y extraer otras consecuencias importantes en relación con la transferencia de esfuerzos entre pilar original y refuerzo.

Enumeramos, pues, una serie de conclusiones:

—Las resistencias obtenidas en prensa, en los pilares reforzados, según ambos métodos, han resultado superiores a las de los pilares de referencia de las respectivas series, con mejoras relativas entre el 16 y 18%. (Cuadros 2, 3 y 4).

La explicación de este resultado, con independencia del buen funcionamiento de los refuerzos que ello presupone, pensamos radica en una menor esbeltez de la zona fuera de los refuerzos, con respecto a los pilares sin reforzar y, sobre todo, al menor efecto del momento debido a la excentricidad inevitable sobre la zona media de los pilares reforzados y por tanto con mayor rigidez.

—Los planteamientos de cálculo hechos para el dimensionamiento del encamisado de hormigón polimérico (Fig. 2), han conducido a resultados satisfactorios, aunque no sea correcta la suposición de constancia de la presión de zunchado, σ_n , en una sección cuadrada. La relación de la resistencia de rotura real del refuerzo (descontando la fuerza transmitida por las armaduras) a la teórica, ha sido algo superior a 1,09, prácticamente análogo al 1,11 obtenido para los pilares originales de referencia.

—Dichos cálculos resultan bastante sensibles a las características mecánicas del hormigón original y por ello, en casos reales, es muy importante determinar dichas características mediante la extracción de testigos, etc. Una variación de la resistencia a la compresión del hormigón del 20% implica una variación en la resistencia esperada del refuerzo del 15%.

—El encamisado de hormigón polimérico ha funcionado monolíticamente con el pilar de referencia inicial, hasta la rotura, sin detectarse ningún deslizamiento relativo.

—Entre las grandes ventajas del refuerzo con hormigón polimérico están el pequeño espesor resultante (3 cm), la facilidad de puesta en obra y el coste reducido.

En efecto, de acuerdo con los cálculos, el armado necesario es prácticamente nulo, el encofrado muy simple y el precio de los materiales necesarios muy bajo (12.500 ptas., en nuestro caso, para uno de los refuerzos).

—Como desventajas están la necesidad de protección contra el fuego, a base de algún material aislante, dado que estas resinas mantienen sus propiedades hasta temperaturas por debajo de los 100°C, dependiendo de cada una, y la necesidad de conocer bien, a priori, las propiedades resistentes del hormigón polimérico *bajo cargas mantenidas*.

—La utilización del método de refuerzo a base de angulares adosados con tornillos ha proporcionado un resultado muy superior al proyectado, habiendo roto el pilar original antes que el refuerzo, sin

ningún deslizamiento previo. El cociente de la resistencia real y la teóricamente esperable es superior a 1,39. Ello ha sido debido, sin duda, a haber utilizado, como material de acoplamiento entre angulares y pilar de hormigón, un mastic epoxy tixotrópico, con lo que al rozamiento debido a la presión de los tornillos, se habrá unido la fuerte adhesión de este tipo de productos, no tenida en cuenta en el cálculo. Otro efecto beneficioso, aunque menos significativo, sería el aumento de presión de los angulares por la oposición de los tornillos al ensanchamiento transversal de Poisson.

—Aunque no se ha podido verificar la hipótesis de cálculo inicial, el resultado ha sido, sin embargo, muy superior al necesario, con la interposición del mastic epoxy tixotrópico, que apenas encarece el procedimiento, y que parece recomendable utilizar. Quizás nuevos ensayos podrían validar un procedimiento de cálculo que, con dicho material, daría lugar a longitudes del refuerzo más cortas.

—Insistimos en lo dicho para el otro refuerzo, de que hay que estar seguro de que los parámetros de cálculo que se utilizan para materiales de base polimérica, corresponden con actuación *permanente* de las cargas.

—Desde el punto de vista operativo es un procedimiento más laborioso y de mayor coste de materiales que el encamisado polimérico. En efecto, la colocación de los angulares y tornillos es una operación precisa, con múltiples aprietes y reaprietes de los mismos. El coste de los angulares preparados, con las piezas soldadas de inserción de los tornillos, tuercas y arandelas y de mastic epoxy, ha sido, en nuestro caso, de unas 100.000 ptas. por pilar, es decir, 8 veces el de los materiales del refuerzo polimérico.

—Una ventaja de este método puede ser la facilidad de tener prefabricados y almacenados diferentes tipos de refuerzo, para poderlos utilizar, de inmediato, ante una emergencia (bomberos, ejército...); y también su reducido espesor (3,6 cm.).

8. AGRADECIMIENTOS

Este artículo presenta, en parte, resul-

tados del proyecto BREU P3091 "Assesment of performance and optimal strategies for inspection and maintenance of concrete structures using reliability based expert systems". Este proyecto está subvencionado por el programa BRITE-EURAM, de la E.E.C., siendo sus socios:

—CSR, Aalborg, Denmark.

—Instituto Superior Técnico, Lisboa, Portugal.

—JAHN Ingenieurs Bureau, Brielle, Holland.

—LABEIN, Bilbao, Spain.

—University of Aberdeen, U.K.

9. BIBLIOGRAFIA

[1] Ramírez J.L., Bárcena J.M., Urreta J.I., Del Val B., Aurrekoetxea J.R., "Repair of concrete columns with partial localized damages". Report T2.1-05 BREU P3091. June 1991.

[2] Hellestand J., Green R. "Test of reinforced concrete columns". ACI Journal. December 1972.

[3] Ramírez J.L., Bárcena J.M., "Eficacia resistente de pilares de hormigón armado de baja calidad, reforzados por dos procedimientos diferentes". Informes de la Construcción, nº 272, Julio 1975.

[4] Ramírez J.L., Bárcena J.M., Feijoo J.M. "Comparación resistente de cuatro métodos de refuerzo de pilares de hormigón armado". Informes de la Construcción, nº 290, Mayo 1977.

[5] Grill L.A., "Strengthening and/or repair of existing structures", IABSE Symposium: Strengthening of building structures. Venice 1983.

[6] Kraft U. "Strengthening of concrete columns". Bautechnik, May 1987.

[7] Ramírez J.L., Bárcena J.M., Urreta J.I., Sánchez J.A., Hernández B. "Local repair of concrete columns with total compressive strength loss". Report T2.3-09 BREU P3091. January 1992.

RESUMEN

Se presentan los resultados de un programa de investigación sobre reparación, para resistencia a carga centrada, de columnas de hormigón que han perdido suficiente capacidad portante como para hacer recomendable la reparación para que resistan la totalidad de la carga que tengan que soportar.

Han sido diseñados y experimentados dos métodos: el encamisado con hormigón polimérico y la colocación de angulares de acero contra las esquinas, apretados por tornillos de alta resistencia.

Una de las características fundamentales exigidas en los proyectos de refuerzos ha sido que éstos sean del menor tamaño posible, interesando la longitud más corta a un lado y otro de la rotura.

Ambos métodos han conducido a buenos resultados, los cuales, junto con las características constructivas y la valoración del método de diseño, se exponen en las conclusiones.

SUMMARY

It is presented the results of a research program about repair for centered load of concrete columns that have lost such amount of its bearing capacity that makes advisable the repair for total initial strength capacity.

It has been designed and tested two repair procedures: polymeric concrete jacket and steel angles tightened against column corners through high strength preloaded bolts.

One of the main repair methods characteristic is the shortest possible design, that is, the smallest repair length at each side of damage.

Both methods have led to good results that, with constructive details and calculation method discussion, are explained in the conclusions.

MIEMBROS PROTECTORES DE LA ASOCIACION TECNICA ESPAÑOLA DEL PRETENSADO

(Continuación de Int. Portada)

- FOMENTO DE CONSTRUCCIONES Y CONTRATAS, S.A. (FCCSA).**—Federico Salmón, 13. 28016 Madrid.
- FORMIGONS GIRONA, S.A.**—Carretera C-250 de Girona a Sant Feliú de Guixols, Km. 4,3. 17242 Quart (Gerona).
- FREYSSINET, S.A.**—General Perón, 24. 28020 Madrid.
- GRACE, S.A.**—Apartado 523. 08080 Barcelona.
- HORMIGONES PROYECTADOS, S.A.**—Avda. Príncipe de Asturias, 63. 08012 Barcelona.
- HUARTE, S.A.—Oficina Técnica.**—Avda. General Perón, 40-C-4.º. 28020 Madrid.
- IBERDROLA, S.A. Servicio Formación.**—Referencia 3001. Gardoqui, 8. 48008 Bilbao.
- IBERDROLA, S.A. Servicio Formación.**—Referencia 8501. Gardoqui, 8. 48008 Bilbao.
- IBERICA DE ESTUDIOS E INGENIERIA, S.A. (IBERINSA).**—Avda. de Burgos, 11. 28036 Madrid.
- INDUSTRIAS GALYCAS, S.A.**—Portal de Gamarra, 46. 01013 Vitoria.
- INGENIERIA DEL ATLANTICO, S.A. (IDASA).**—Pérez Cepeda, 5 y 7. 15004 La Coruña.
- INSTITUTO ESPAÑOL DEL CEMENTO Y SUS APLICACIONES (IECA).**—José Abascal, 53-2.ª planta. 28003 Madrid.
- INSTITUTO TECNICO DE LA CONSTRUCCION, S.A.**—Avda. de Elche, 164. 03008 Alicante.
- INSTITUTO TECNICO DE MATERIALES Y CONSTRUCCIONES (INTEMAC).**—Monte Esquinza, 30. 28010 Madrid.
- INTERNACIONAL DE INGENIERIA Y ESTUDIOS TECNICOS (INTECSA). Biblioteca.**—Orense, 70. 28020 Madrid.
- JOSE ANTONIO TORROJA, OFICINA TECNICA, S.A.**—Príncipe de Vergara, 103. 28006 Madrid.
- LABORATORIO CENTRAL DE ESTRUCTURAS Y MATERIALES. CEDEX.**—Alfonso XII, 3. 28004 Madrid.
- MECANOGUMBA, S.A.**—Apartado 23. 08100 Mollet del Vallés (Barcelona).
- PACADAR, S.A.**—Hermosilla, 57. 28001 Madrid.
- PREFABRICACIONES Y CONTRATAS, S.A.**—Apartado 138. 36600 Villagarcía de Arosa (Pontevedra).
- PRETENSADOS DEL LOURO, S.A.**—Polígono Industrial Atios. 36400 Porriño (Pontevedra).
- PROYECTOS Y ESTRUCTURAS, S.A. (PROES).**—Padre Damián, 42-1º-D. 28036 Madrid.
- SENER, INGENIERIA Y SISTEMAS, S.A.**—Avda. de Zugazarte, 56. 48930 Las Arenas (Vizcaya).
- SIKA, S.A.**—Carretera de Fuencarral, 72. Polígono Industrial. 28100 Alcobendas (Madrid).
- SOCIEDAD ESPAÑOLA DE ESTUDIOS PARA LA COMUNICACION FIJA A TRAVES DEL ESTRECHO DE GIBRALTAR, S.A. (SECEGSA).**—Estébanez Calderón, 3-1.º-A. 28020 Madrid.
- TECNICAS DEL PRETENSADO, S.A. (TECPRESA).**—Príncipe de Vergara, 135. 28006 Madrid.
- TREFILERIAS DEL NORTE, S.A.**—Carretera de Zorroza a Castrejana, 150. Apartado 590. 48080 Bilbao.
- TREFILERIAS QUIJANO, S.A.**—Fábrica de Forjas de Buelna. 39400 Los Corrales de Buelna (Cantabria).
- TRENZAS Y CABLES DE ACERO, S.A. (TYCSA).**—Monturiol, 5. 08210 Barberá del Vallés (Barcelona).
- VSL IBERICA, S.A.**—Paseo de la Castellana, 117-2.º-dcha. 28046 Madrid.

La Asociación Técnica Española del Pretensado se complace en expresar públicamente su agradecimiento a las Entidades citadas, por la valiosa ayuda que le prestan, con su especial aportación económica, para el desenvolvimiento de los fines que tiene encomendados.



**asociación técnica
española del pretensado**