

hormigón

**y ACERO**

*nº 137*

*ASOCIACION TECNICA ESPAÑOLA DEL PRETENSADO.*

*DECLARADA DE UTILIDAD PUBLICA CON FECHA 4-3-77*

*INSTITUTO EDUARDO TORROJA DE LA CONSTRUCCION Y DEL CEMENTO.*

*COSTILLARES (CHAMARTIN). MADRID-33.*

## **MIEMBROS PROTECTORES DE LA ASOCIACION TECNICA ESPAÑOLA DEL PRETENSADO**

Dentro de nuestra Asociación existe una categoría, la de "Miembro Protector", a la que pueden acogerse, previo pago de la cuota especial al efecto establecida, todos los Miembros que voluntariamente lo soliciten. Hasta la fecha de cierre del presente número de la Revista, figuran inscritos en esta categoría de "Miembro Protector" los que a continuación se indican, citados por orden alfabético.

- AGRUPACION DE FABRICANTES DE CEMENTO DE ESPAÑA.**— Velázquez, 23. Madrid-1.  
**AGUSTI, S.A.**— Carretera de Barcelona, 36. Gerona.  
**ALVI, S.A. (PREFABRICADOS ALBAJAR).**— Orense, 10. Madrid-20.  
**CAMARA, S.A.**— Paseo de San Vicente, 4. Valladolid.  
**CAMINOS Y PUERTOS, S.A.**— J. Lárzo Galdiano, 4. Madrid-16.  
**CARLOS FERNANDEZ CASADO, S.A.**— Grijalba, 9. Madrid-6.  
**CENTRO DE ESTUDIOS Y EXPERIMENTACION DE O.P. CENTRO BIBLIOGRAFICO.**— Alfonso XII, 3. Madrid-7.  
**CENTRO DE TRABAJOS TECNICOS, S.L.**— Aribau, 185. Barcelona-21.  
**DRAGADOS Y CONSTRUCCIONES, S.A.**— Avda. de América, 22. Madrid-2.  
**ELABORADOS METALICOS, S.A.**— Apartado 553. La Coruña.  
**ENTRECANALES Y TAVORA, S.A.**— Biblioteca. Juan de Mena, 8. Madrid-14.  
**ESTRUCTURAS Y GEOTECNIA BAUER, S.A.**— Pintor Juan Gris, 5. Madrid-20.  
**E.T.S. INGENIEROS DE CAMINOS.**— Jorge Girona Salgado, 31. Barcelona-34.  
**EUROPEA DE INYECCIONES, S.A. (EURINSA).**— López de Hoyos, 13. Madrid-6.  
**FOMENTO DE OBRAS Y CONSTRUCCIONES, S.A.**— Balmes, 36. Barcelona-7.  
**FORJADOS DOMO.**— Hermosilla, 64. Madrid-1.  
**FREYSSINET, S.A.**— General Perón, 24. Madrid-20.  
**HEREDIA Y MORENO, S.A.**— Princesa, 3. Madrid-8.  
**HIDROELECTRICA DE CATALUÑA, S.A.**— Archs, 10. Barcelona-2.  
**HIFORCEM.**— Apartado 41. Sevilla.  
**HORMIGONES GERONA, S.A.**— Ronda San Antonio Marfa Claret, 12. Gerona.  
**IBERING, S.A.**— Plaza Gala Placidia, 5-7. Barcelona-6.  
**INDUSTRIAS GALYCAS, S.A.**— Portal de Gamarra, 46. Vitoria.  
**INGENIERO JEFE DE LA SECCION DE PUENTES Y ESTRUCTURAS.**— Ministerio de Q.P. y Urbanismo.  
Dirección General de Carreteras. Madrid-3.  
**INTECSA.**— Orense, 70. Madrid-20.  
**INTEMAC.**— Monte Esquinza, 30. Madrid-4.  
**JOSE ANTONIO TORROJA, OFICINA TECNICA.**— General Mola, 103, 10<sup>o</sup>. Madrid-6.  
**LABORATORIO CENTRAL DE ESTRUCTURAS Y MATERIALES.**— Alfonso XII, 3. Madrid-7.  
**MEDITERRANEA DE PREFABRICADOS, S.A.**— Apartado, 34. BENICARLO (Castellón).  
**NEXOR, S.A.**— Dato, 18-1<sup>o</sup>. Vitoria.  
**NUEVA MONTAÑA QUIJANO, S.A.**— Fábrica de Forjas de Buelna. LOS CORRALES DE BUELNA (Santander).  
**PACADAR, S.A.**— Hermosilla, 57. Madrid-1.  
**PRELOAD SISTEMAS, S.A.**— Avenida del Generalísimo, 30. Madrid-16.  
**PRENSOLAND, S.A.**— Calle Industria, s/n. SAN MARTIN DE CENTELLAS (Barcelona).  
**PROCEDIMIENTOS BARREDO.**— Raimundo Fernández Villaverde, 45. Madrid-3.  
**S.A.E. BBR.**— Polígono Industrial Barcelonés. Calle Carrero Blanco, s/n. ABRERA (Barcelona).  
**S.A. ECHEVARRIA.**— Apartado 46. Bilbao-8.  
**TECNICAS DEL PRETENSADO, S.A. (TECPRESA).**— Velázquez, 105. Madrid-6.  
**TRENZAS Y CABLES DE ACERO, S.A.**— Monturiol, 5. SANTA MARIA DE BARBARA (Barcelona).

La Asociación Técnica Española del Pretensado se complace en expresar públicamente su agradecimiento a las empresas citadas, por la valiosa ayuda que le prestan, con su especial aportación económica, para el desenvolvimiento de los fines que tiene encomendados.

# **Son Instituciones Miembros Correspondientes del Instituto Eduardo Torroja de la Construcción y del Cemento**

- La Pontificia Universidad Católica de Chile (Santiago de Chile).
- La Facultad de Arquitectura de la Universidad del Valle de Calí (Colombia).
- El Departamento de Ingeniería de la Universidad Nacional del Sur. Bahía Blanca (República Argentina).
- La Facultad de Ingeniería de la Pontificia Universidad Católica del Perú (Lima).
- La Facultad de Ingeniería de la Universidad Central de Venezuela (Caracas).
- La Facultad de Ingeniería de la Universidad Católica de Córdoba (República Argentina).
- La Facultad de Arquitectura y Urbanismo. Universidad de Chile (Santiago de Chile).
- El Instituto de la Construcción de Edificios de la Facultad de Arquitectura. Montevideo (Uruguay).
- El Instituto Nacional de Tecnología Industrial. Buenos Aires (República Argentina).
- La Facultad de Arquitectura de la Universidad Nacional de Colombia (Medellín).
- La Universidad Autónoma - Guadalajara, Jalisco (México).
- El Departamento Técnico y Laboratorios de Aproveche, Caracas (Venezuela).
- El Instituto de Ingeniería Civil de la Facultad de Ingeniería y Agrimensura de la Universidad de la República del Uruguay (Montevideo).
- El Centro Impulsor de la Habitación, A.C., de México.
- El Departamento de Investigación de la Dirección General de Tecnología del Ministerio del Bienestar Social de la República Argentina (Buenos Aires).
- El Departamento de Obras Civiles de la Universidad de Chile (Santiago de Chile).
- El Instituto Mexicano del Cemento y del Concreto, A.C. - IMCYC (México).
- La Escuela Politécnica del Ejército. Facultad de Ingeniería Civil. Av. Colombia y General Paz y Miño. Quito (Ecuador).
- La Universidad de Cuenca. Facultad de Arquitectura. Cuenca (Ecuador).
- El Instituto de Pesquisas Tecnológicas de Sao Paulo (Brasil).

# *hormigón y acero*

n.º 137

4.º trimestre, 1980

## CUOTAS ANUALES

| CATEGORIAS  | ESPAÑA         | EXTRANJERO   |
|---|----------------|--------------|
| Miembros "Personales adheridos" (personas naturales que sean Socios Adheridos al I.E.T.)*                             | 1.000,— ptas.  | 20,—dólares  |
| Miembros "Personales" (personas naturales que no sean Socios Adheridos del I.E.T.)                                    | 2.000,— ptas.  | 40,—dólares  |
| Miembros "Colectivos" (personas jurídicas, sean o no Socios Adheridos del I.E.T.)                                     | 5.000,— ptas.  | 100,—dólares |
| Miembros "Protectores" (personas naturales o jurídicas que deseen prestar una ayuda económica especial a la A.T.E.P.) | 10.000,— ptas. | 200,—dólares |

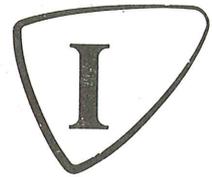
Ni la Asociación ni el Instituto, una de cuyas finalidades es divulgar los trabajos de investigación sobre la construcción y sus materiales, se hacen responsables del contenido de ningún artículo y el hecho de que patrocinen su difusión no implica, en modo alguno, conformidad con la tesis expuesta.

De acuerdo con las disposiciones vigentes, deberá mencionarse el nombre de esta Revista en toda reproducción de los trabajos insertos en la misma.

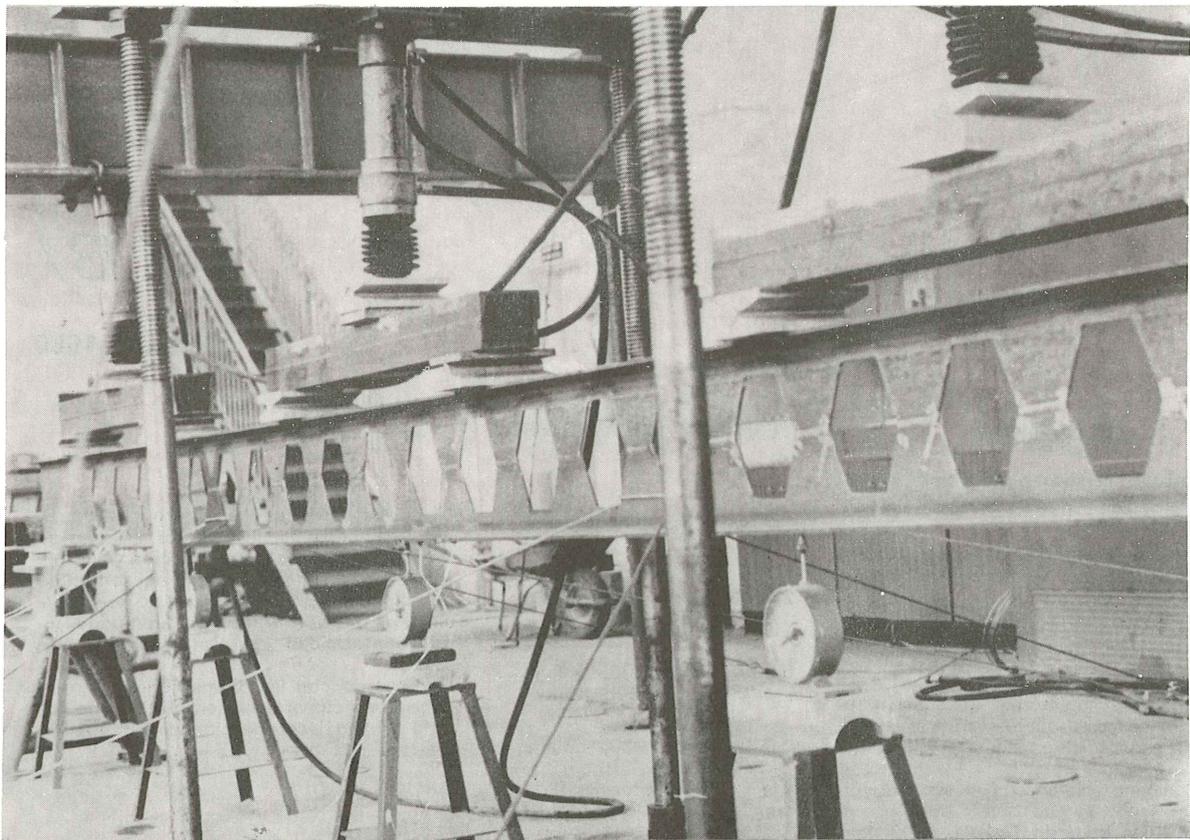
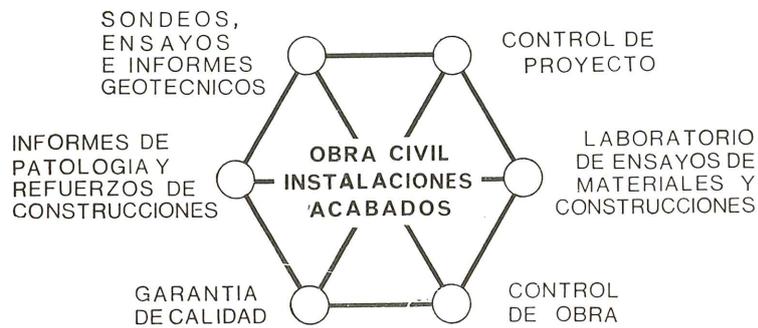
\* Conviene aclarar que el ser suscriptor de la Revista "Informes de la Construcción" no quiere decir que se es también Socio Adherido del Instituto Eduardo Torroja.

APARTADO 19.002 - COSTILLARES - CHAMARTIN - MADRID - 33

# INTEMAC



INSTITUTO TECNICO DE MATERIALES Y CONSTRUCCIONES



Ensayo a flexión de una viga metálica.

## MADRID

Central:

Monte Esquinza, 30 - 4.º D  
Tels. (91) 410 51 58/62/66

## MADRID

Laboratorio

Carretera de Loeches, 7  
TORREJON DE ARDOZ  
Tels. 675 31 00/04/08

## BARCELONA

Pasaje Busquets, 37

CORNELLA DE LLOBREGAT

Tels. (93) 377 43 58/62

## SANTANDER

Félix Apellániz, 11

TORRELAVEGA

Tel. (942) 89 02 01

**Comité de Redacción  
de la Revista  
Hormigón y Acero**

ARENAS, Juan José  
AROCA, Ricardo  
BARREDO, Carlos  
CUVILLO, Ramón del  
CHUECA, Rafael  
ELICES, Manuel  
FERNANDEZ TROYANO, Leonardo  
FERNANDEZ VILLALTA, Manuel  
FISAC, Miguel  
JODAR, Juan  
JULIA, Manuel  
LLOMBART, José Antonio  
MANTEROLA, Francisco Javier  
MONEO, Mariano  
MORENO TORRES, Juan  
PIÑEIRO, Rafael  
ROMERO, Rafael  
SANCHEZ CASTRO, Carlos  
SANCHEZ GALVEZ, Vicente

# hormigón y acero

**n. 137**

## *índice*

|  | Pág. |
|--|------|
| <b>457-0-72</b> Modelo para el análisis no lineal de estructuras de hormigón por el método de los elementos finitos.....                                       | 9    |
| Un modèle pour l'analyse non linéaire des structures en béton au moyen de la méthode d'éléments finis.   |      |
| Pattern for non linear analysis of concrete structures by the method of finite elements.   |      |
| <i>F. Millanes Mato.</i>   |      |
| <b>457-0-74</b> Análisis de la flexión de placas mediante hiper elementos finitos de orden elevado .   | 41   |
| Etude analytique de la flexion des dalles au moyen des hiperéléments finis d'un ordre élevé.   |      |
| Analytical study of bending in slabs by means of high order finite hyper elements.   |      |
| <i>A. Samartín y J. Díaz del Valle.</i>  |      |
| <b>457-3-10</b> Aplicación del método de las deformaciones impuestas para analizar el comportamiento no lineal de estructuras hiperestáticas de hormigón ..... | 71   |
| Application de la méthode des déformations imposées pour analyser le comportement non linéaire des structures hyperstatiques en béton.                         |      |
| Application of the superimposed deformation method for the analysis over the non linear behaviour of concrete hyperstatic structures.                          |      |
| <i>A. Aguado de Cea y J. Murcia.</i>   |      |

|   | <u>Pág.</u> |
|---|-------------|
| <b>457-8-79 Instrucción para la ejecución de obras de hormigón pretensado EP-80 .....</b>   | <b>87</b>   |
| <p>Instruction pour la réalisation de constructions en béton précontraint, EP-80.<br/>Code for the manufacture of prestressed concrete works. EP-80.</p>  |             |
| <b>457-8-80 Medidas de seguridad en los trabajos de pretensado.....</b>   | <b>95</b>   |
| <p>Mesures de sûreté pour les travaux de précontrainte.<br/>Safety precautions for prestressing operations (post-tensioning).<br/><i>Concrete Society.</i></p>  |             |
| <b>591-1-33 Estudio comparativo de la inestabilidad de soportes rectangulares de hormigón armado, según la Instrucción EH-73, el Código ACI y los ábacos de J. J. Arenas .....</b>  | <b>101</b>  |
| <p>Etude comparatif de l'instabilité des poteaux rectangulaires en béton armé, d'accord l'Instruction EH-73, le Code ACI et les abaques de J. J. Arenas.<br/>Estimative study of rectangular support untableness in reinforced concrete, according to Standard EH-73, the ACI Code and the J. J. Arenas Charts.<br/><i>L. Villegas.</i></p> |             |
| <b>Notas de la F.I.P., N° 81 .....</b>  | <b>123</b>  |
| <p>Notes de la F.I.P., N° 81.<br/>F.I.P. Notes, N° 81.</p>  |             |

**RELACION DE EMPRESAS QUE EN LA FECHA DE CIERRE DEL PRESENTE NUMERO,  
FIGURAN INSCRITAS EN LA ASOCIACION TECNICA ESPAÑOLA DEL PRETENSADO,  
COMO "MIEMBROS COLECTIVOS"**

**ESPAÑA**

AEDIUM, S.A.— Basauri (Vizcaya).  
AGROMAN, S.A.— Madrid.  
ALBISA, S.A.—Algeciras (Cádiz).  
ARIDOS LIGEROS, S.A.—Madrid.  
AUTOPISTAS DEL ATLANTICO-CESA.—La Coruña.  
AUTOPISTAS, CONCESIONARIA ESPAÑOLA, S.A.—Barcelona.  
AZMA, S.A.—Madrid.  
BIGUETES, S.L. Elche.—Alicante.  
BUTSEMS, S.A.—Madrid.  
CAMARA OFICIAL DE COMERCIO, INDUSTRIA Y NAVEGACION.—Barcelona.  
CASA GARGALLO, S.A.—Madrid.  
CASTRO HERMANOS, S.L.— Mislata (Valencia).  
CASTRO MATELO, V., S.A.— Sigueiro (La Coruña).  
CEMENTOS MOLINS, S.A.— Sant Vicenc dels Horts (Barcelona).  
CENTRO DE ESTUDIOS CEAC.—Barcelona.  
CIMENTACIONES ESPECIALES, S.A.— Madrid.  
COLEGIO DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS.—Madrid. I.  
COLEGIO DE INGENIEROS TECNICOS DE OBRAS PUBLICAS.— Madrid.  
COLEGIO OFICIAL DE APAREJADORES.— La Coruña.  
COLEGIO OFICIAL DE ARQUITECTOS DE ARAGON. SECCION BIBLIOTECA.—Zaragoza.  
COLEGIO OFICIAL DE ARQUITECTOS DE CANARIAS. DEPARTAMENTO LABORATO-  
RIOS.— Sta. Cruz de Tenerife.  
COLEGIO OFICIAL DE ARQUITECTOS VASCO-NAVARRO.—Bilbao.  
COLEGIO OFICIAL DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS.—  
Málaga.  
CONSTRUCCIONES BIGAR, S.L.— Aranda de Duero (Burgos).  
CONSTRUCCIONES Y CONTRATAS, S.A.—Madrid.  
CONSTRUCTORA MAXACH, S.A.—Madrid.  
CONTROLEX.—Alicante.  
COTESA, COLOCACIONES TECNICAS, S.A.—Barcelona.  
CUBIERTAS M.Z.O.V., S.A.—Barcelona.  
CUBIERTAS M.Z.O.V., S.A.—Madrid.  
CUMBRE MODULAR, S.A.— Barcelona.  
INSTITUTO NACIONAL DE EMPLEO Y PROMOCION SOCIAL. SECCION ASUNTOS GE-  
NERALES (SEAF-PPO).— Madrid.  
DIRECCION GENERAL FORTIFICACIONES Y OBRAS. MINISTERIO DEL EJER-  
CITO.—Madrid.  
DITECO, S.L.—Valencia.  
ELABORADOS DE HORMIGON, S.A.—Burgos.  
ELEMENTOS ESTRUCTURALES PREFABRICADOS (EEPSA).—Manresa(Barcelona).  
EMPRESA AUXILIAR DE LA INDUSTRIA (AUXINI).—Madrid.

ENAGA, S.A.—Pozuelo de Alarcón (Madrid).  
ESTEBAN ORBEGOZO, S.A.—Zumárraga (Guipúzcoa).  
ESTUDIO PREST.—Barcelona.  
ESTUDIOS Y PROYECTOS TECNICOS INDUSTRIALES, S.A.—Madrid.  
E.T.S. DE ARQUITECTURA.—Barcelona.  
E.T.S. DE ARQUITECTURA.—Sevilla.  
EUROESTUDIOS, S.A.— Madrid.  
FEDERACION NACIONAL DE ENTIDADES EMPRESARIALES DE DERIVADOS DEL  
CEMENTO (ANDECE).— Madrid.  
FERNANDEZ CONSTRUCTOR, S.A.— Madrid.  
FORJADOS DOL.— Esquivias (Toledo).  
FORJAS Y ALAMBRES DEL CADAGUA.— Erandio (Bilbao)  
GIJON E HIJOS, S.A.— Motril (Granada).  
GOMHERSA.—Talavera de la Reina (Toledo).  
HERRING LEVANTE, S.A.—Valencia.  
HIDAQUE, S.A.—Granada.  
HORMIGONES GERONA, S.A.—Gerona.  
HORMYCER, S.L.—Madrid.  
HORSA, S.A.—Viladecans (Barcelona).  
HUARTE Y CIA, S.A.—Madrid.  
IBERDUERO, S.A.—Bilbao.  
IBERDUERO, S.A. (CENTRO DE DOCUMENTACION).— Bilbao.  
IBERTECNICA, S.A.— Madrid.  
IDASA, INGENIERIA DEL ATLANTICO, S.A.— La Coruña.  
INBADELCA, S.A.—Baracaldo (Vizcaya).  
INDUSTRIAS VEYGA, S.A.— Tarrasa (Barcelona).  
INFORMES Y PROYECTOS, S.A. (INYSA).—Madrid.  
INGENIERIA Y CONSTRUCCIONES SALA AMAT, S.A.—Barcelona.  
INSTITUTO NACIONAL DE REFORMA Y DESARROLLO AGRARIO.—Madrid.  
JEFATURA PROVINCIAL DE CARRETERAS.—Valencia.  
3ª JEFATURA REGIONAL DE CARRETERAS. SERVICIO DE CONSTRUCCION.—  
Bilbao.  
5ª JEFATURA REGIONAL DE CARRETERAS.—Barcelona.  
JULIAN ARUMI, S.L.—Vich (Barcelona).  
JUNTA DEL PUERTO DE ALMERIA.—Almería.  
LA AUXILIAR DE LA CONSTRUCCION.—Sta. Cruz de Tenerife.  
LABORATORIO DE INGENIEROS DEL EJERCITO.—Madrid.  
LABORATORIO GEOCISA. BIBLIOTECA.—COSLADA (Madrid)  
LABORATORIO DEL TRANSPORTE Y MECANICA DEL SUELO.—Madrid.  
LAING IBERICA, S. A.—Madrid.  
LIBRERIA RUBIÑOS.—Madrid.  
LUIS BATALLA, S.A. (LUBASA).—Castellón de la Plana.  
MAHEMA, S. A.—Granollers (Barcelona).  
MATERIALES PRETENSADOS, S.A. (MATENSA).—Madrid.  
MATERIALES Y TUBOS BONNA, S.A.—Madrid.  
MATUBO, S.A.—Madrid.  
MECANOGUMBA, S.A.— Mollet del Vallés (Barcelona).  
NUEVA CERAMICA CAMPO.— Lendo-Laracha (La Coruña).  
OTEP INTERNACIONAL, S.A.— Madrid.

POSTELECTRICA, S.A.—Palencia.  
 POSTENSA, S.A.—Bilbao.  
 PRAINSA.—Zaragoza.  
 PREBETONG CANARIA, S.A.—Sta. Cruz de Tenerife.  
 PREFABRICADOS ALAVESES, S.A. (PREASA).Vitoria.  
 PREFABRICADOS DEL CEMENTO, S.A. (PRECESA).— León.  
 PREFABRICADOS DEL HORMIGON, S.A. CUPRE-SAPRE.— Valladolid.  
 PREFABRICADOS NAVARROS, S.A.— Olazagutia (Navarra).  
 PREFABRICADOS NOR-THOM, S.A.— Valladolid.  
 PREFABRICADOS POUSA, S.A.— Santa Perpetua de Moguda (Barcelona).  
 PRETENSADOS AEDIUM, S.L.— Mutilva Baja (Navarra).  
 PRODUCTOS DERIVADOS DEL CEMENTO, S.A. HORTE.— Valladolid.  
 PROFESA.— Barcelona.  
 PROTEC, S.L.— Gijón (Oviedo).  
 REALIZACIONES Y ESTUDIOS DE INGENIERIA, S.A.— Pinto (Madrid).  
 RENFE.— Madrid.  
 RUBIERA. CENTRO TECNICO DE CALCULO, S.A. - CETERSA.— Gijón (Oviedo).  
 RUBIERA MAHER, S.A.— Las Palmas de Gran Canaria.  
 RUBIERA PREFLEX, S.A.— Gijón (Oviedo).  
 RUBIERA R.L.M. "SOTECSA".— Gijón (Oviedo).  
 SAINCE.— Madrid.  
 SENER, S.A.— Las Arenas (Vizcaya).  
 SERVICIO MILITAR DE CONSTRUCCIONES.— Barcelona.  
 SIKA, S.A.— Madrid.  
 SOCIEDAD ANONIMA ESPAÑOLA TUBO FABREGA.—Madrid.  
 SOCIEDAD ANONIMA FERROVIAL.— Madrid.  
 SOCIEDAD ANONIMA MATERIALES Y OBRAS.— Valencia.  
 SPANDECK CATALANA, S.A.— Barcelona.  
 SUBDIRECCION GENERAL DE ESTUDIOS ECONOMICOS Y TECNOLOGIA (MOPU).—  
 Madrid-16.  
 SUBDIRECCION GENERAL DE TECNOLOGIA.— Sección de Documentación Normati-  
 va.— Ministerio de Obras Públicas y Urbanismo.— Madrid.  
 TEJERIAS "LA COVADONGA".— Muriedas de Camargo (Santander).  
 TEPSA.— Tarrasa (Barcelona).  
 TOSAM, S.L.— Segovia.  
 TUBERIAS Y PREFABRICADOS, S.A. (TYPESA).— Madrid.  
 TUBOS BORONDO.— Madrid.  
 VALLEHERMOSO, S.A.— Madrid.  
 VALLEHERMOSO, S.A.— San Juan de Aznalfarache (Sevilla).  
 VIAS Y OBRAS PROVINCIALES.— San Sebastián.  
 VIGAS REMARRO.— Motril (Granada).  
 VIGUETAS ASTURIAS, S.L.— Oviedo.  
 VIGUETAS ROSADO, S.A.— Cáceres.

#### EXTRANJERO

BIBLIOTECA DE LA FACULTAD DE INGENIERIA.—Universidad de Buenos Aires.  
 Buenos Aires. Argentina.  
 BIBLIOTECA-UNIVERSIDAD CATOLICA.—Quito (Ecuador).

CONSULAR.— Consultores Argentinos Asociados. Buenos Aires (Argentina).  
CONSULBAIRES.— Buenos Aires (Argentina).  
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS E INGENIERIA.— Rosario (Argentina).  
FACULTAD DE INGENIERIA. BIBLIOTECA.— Caracas (Venezuela).  
INSTITUTO DE PESQUISAS TECNOLOGICAS.— Sao Paulo (Brasil).  
LABORATORIO DE ENGENHARIA DE ANGOLA.—Luanda (Rep. P. de Angola).  
LABORATORIO DE ENGENHARIA DE MOÇAMBIQUE.—Maputo.—Moçambique (Africa Oriental).  
LIBRERIA LA PRENSA CATOLICA.—Quito (Ecuador).  
R.S.W. "PRASA-KSIAZKA-RUCH".—00-958. Warszawa (Polonia).  
SCIENCE REFERENCE LIBRARY.— Londres (Inglaterra).  
SOCIEDAD HORMIGON ARMADO PRETENSADO (S.H.A.P., S.A.).—Pilar (Provincia de Buenos Aires). Argentina.  
UNIVERSIDAD DE LOS ANDES. FACULTAD DE INGENIERIA.—Mérida (Venezuela).  
UNIVERSIDAD CATOLICA MADRE Y MAESTRA.—Santiago de los Caballeros (República Dominicana).  
UNIVERSIDAD DE CHILE. (Departamento de Tecnologías).—Valparaíso (Chile).  
UNIVERSIDAD DE PUERTO RICO.—(Biblioteca). Mayaguez (Puerto Rico).  
UNIVERSIDAD TECNICA FEDERICO SANTAMARIA.—Valparaíso (Chile).  
VIPRET, S.A.I.C.—Buenos Aires (República Argentina).

### AVISO IMPORTANTE

#### DISCUSION DE LOS ARTICULOS ORIGINALES PUBLICADOS EN LA REVISTA "HORMIGON Y ACERO"

Todos los artículos originales que se publican en "Hormigón y Acero", quedan sometidos a discusión y al comentario de nuestros lectores. La discusión debe limitarse al campo de aplicación del artículo, y ser breve (cuatro páginas mecanografiadas a doble espacio, como máximo, incluyendo figuras y tablas).

Debe tratarse de una verdadera discusión del trabajo publicado y no ser una ampliación o un nuevo artículo sobre el mismo tema; el cual será siempre aceptado para su publicación en nuestra Revista, pero con tal carácter.

Debe ofrecer un interés general para los lectores. De no ser así, se trasladará al autor del artículo al que se refiera, para que la conteste particularmente.

Los comentarios deben enviarse, por duplicado, a la Secretaría de la A.T.E.P., Apartado 19.002, Madrid-33, dentro del plazo de tres meses contados a partir de la fecha de distribución de la Revista.

El autor del artículo cerrará la discusión contestando todos y cada uno de los comentarios recibidos.

Los textos, tanto de las discusiones y comentarios como de las contestaciones de los autores de los correspondientes artículos, se publicarán conjuntamente en una Sección especial que aparecerá en las últimas páginas de la Revista.

# Modelo para el análisis no lineal de estructuras de hormigón por el método de los elementos finitos

Francisco Millanes Mato  
Dr. Ingeniero de Caminos

## 1. INTRODUCCION

La obtención analítica de la evolución del estado de tensiones y deformaciones en las estructuras de hormigón, a medida que aumentan las cargas hasta la rotura, es bastante compleja. Entre los aspectos propios de este tipo de estructuras que no pueden abordarse de forma inmediata por los métodos de cálculo tradicionales podemos citar:

1.—La no homogeneidad, puesto que contamos con dos materiales diferentes: acero y hormigón.

2.—La evolución de la estructura resistente como consecuencia de la progresiva fisuración del hormigón a medida que aumentan las cargas.

3.—El comportamiento no lineal de ambos materiales hasta la rotura. Si bien para el acero existen leyes  $\sigma$ - $\epsilon$  que permiten reflejar con suficiente precisión su respuesta frente a cargas crecientes, para el hormigón el problema se complica no sólo a causa de su conducta marcadamente no lineal bajo compresiones importantes, sino fundamentalmente como consecuencia del carácter biaxial de su estado tensional en gran parte de las estructuras. Las leyes de comportamiento y los criterios de rotura bajo esfuerzos combinados son complejos y función de numerosos parámetros cuya influencia no está todavía suficientemente determinada. Hasta el presente se dispone únicamente de resultados fiables para una aplicación proporcional de la carga:  $\alpha = \frac{\sigma_I}{\sigma_{II}}$  (fig. 1), que se mantiene constante a lo largo del ensayo.

4.—Las deformaciones del hormigón varían con el tiempo como consecuencia de fluencia y retracción.

5.—Existen además una serie de fenómenos todavía mal conocidos y cuya influencia no siempre es despreciable: deslizamientos relativos entre hormigón y acero como consecuencia de la pérdida progresiva de la adherencia entre ambos, fuerzas de rozamiento entre las dos caras de las fisuras, rigidez a la deformación transversal de las armaduras, colaboración del hormigón traccionado entre fisuras, etc. Todos estos factores son de difícil evaluación y su consideración sólo puede hacerse actualmente de forma aproximada.

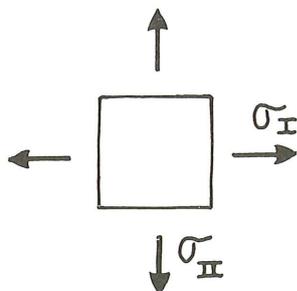


Fig. 1.

La primera aplicación del método de los elementos finitos al cálculo de estructuras de hormigón armado data de 1967 y es debida a NGO y SCORDELIS (ref. 1), siendo numerosos los trabajos publicados desde entonces. En la ref. 2, publicada por el autor, puede encontrarse una puesta al día del avance de las investigaciones sobre este tema.

## 2. APROXIMACION DEL CALCULO NO LINEAL MEDIANTE UNA SERIE DE ANALISIS LINEALES

En el modelo que pasamos a presentar nos limitaremos al estudio de los fenómenos de corta duración en los que la carga se aplica de forma monótona creciente, es decir, sin considerar ciclos de carga y descarga.

También supondremos que las deformaciones se mantienen dentro de los límites de la teoría de los pequeños desplazamientos, no tomando en cuenta los fenómenos de no linealidad geométrica.

Así pues, las principales causas de no linealidad que vamos a considerar son las siguientes:

- a) Fisuración del hormigón.
- b) Comportamiento no lineal del hormigón bajo cargas biaxiales.
- c) Plastificación del acero más allá de su límite elástico.

Supondremos perfectamente conocidos los fundamentos del método de cálculo por elementos finitos, cuya aplicación al análisis lineal de estructuras puede esquematizarse someramente como sigue (la nomenclatura y formulación son las utilizadas por ZIENKIEWICZ (ref. 3)):

1) Se adopta una función de desplazamiento continua en el interior de cada elemento:  $\{f\}^e = [N]^e \{\delta\}^e$ , que relaciona los desplazamientos de cualquier punto del elemento con los de los nudos del mismo. Esta función debe cumplir ciertas condiciones de convergencia.

2) Por derivación de las expresiones de los desplazamientos se obtiene una relación entre las deformaciones en el interior del elemento y los desplazamientos de los nudos:

$$\{\epsilon\}^e = [B]^e \{\delta\}^e \quad (1)$$

3) Las tensiones y las deformaciones en cada punto están relacionadas por una expresión lineal de la forma:

$$\{\sigma\}^e = \{\sigma_o\}^e + [D]^e \{\epsilon - \epsilon_o\}^e \quad (2)$$

donde  $\{\sigma_o\}^e$  y  $\{\epsilon_o\}^e$  son los valores de  $\{\sigma\}^e$  y  $\{\epsilon\}^e$  antes de aplicar la carga.

4) Por aplicación del teorema de los trabajos virtuales en todos los elementos, e imponiendo la igualdad de desplazamientos de los nudos comunes a varios elementos, se llega a una ecuación del tipo:

$$\{R\}^* = \{R\} - \{F_p\} - \{F_{\epsilon_0}\} - \{F_{\sigma_0}\} = [K] \{\delta\} \quad (3)$$

Donde:

$[K]$  es la matriz de rigidez de la estructura.

$\{R\}$  es el vector de las fuerzas exteriores que actúan sobre los nudos.

$\{F_p\}$  es el vector de las fuerzas nodales debidas a las cargas repartidas.

$\{F_{\epsilon_0}\}$  es el vector de las fuerzas nodales debidas a las deformaciones iniciales, y

$\{F_{\sigma_0}\}$  es el vector de las fuerzas nodales debidas a las tensiones iniciales, presentes al comienzo del análisis.

Estos vectores y matrices de la estructura se obtienen a partir de los correspondientes a cada elemento, cuyas expresiones son:

$$\{F_p\}^e = - \int_e [N]^e{}^T \{p\}^e d \text{Vol.}$$

$$\{F_{\epsilon_0}\}^e = - \int_e [B]^e{}^T [D]^e \{\epsilon_0\}^e d \text{Vol.}$$

$$\{F_{\sigma_0}\}^e = \int_e [B]^e{}^T \{\sigma_0\}^e d \text{Vol.}$$

$$[k]^e = \int_e [B]^e{}^T [D]^e [B]^e d \text{Vol.}$$

$\{p\}^e$  = Vector de las cargas repartidas sobre el elemento.

5) La resolución del sistema de ecuaciones (3) permite obtener los desplazamientos de los nudos  $\delta$ , los cuales, mediante las expresiones (1) y (2), nos proporcionan el estado de tensiones y deformaciones en cualquier punto de la estructura.

En nuestro caso, la no linealidad afecta únicamente al comportamiento de los materiales, que supondremos definido de forma explícita mediante una expresión del tipo:  $\{\sigma\} = g(\{\epsilon\})$ , siendo 'g' una función no lineal que será definida más adelante.

En consecuencia, la matriz  $[D]^e$  no es constante sino que varía, para cada elemento, en función de su estado tensional en cada instante.

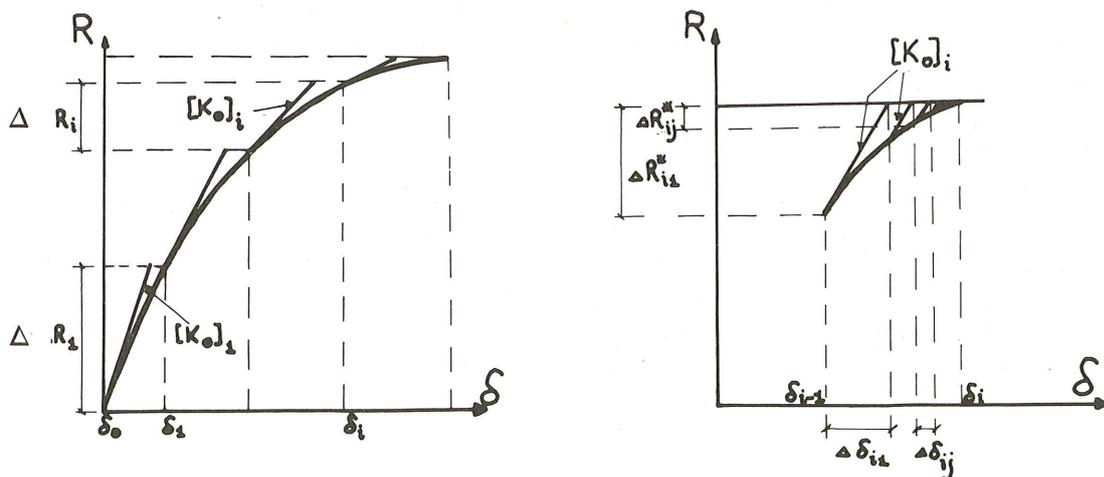


Fig. 2.

Supondremos la carga aplicada por etapas, en cada una de las cuales obtendremos los aumentos de desplazamientos, deformaciones y tensiones, debidos al incremento de carga aplicado.

Tratándose de un problema no lineal, la resolución de cada etapa deberá hacerse necesariamente de forma iterativa. Existen numerosos métodos de obtención de la solución no lineal a partir de una serie de cálculos lineales (consúltese por ejemplo la ref. 3). El modelo que proponemos utiliza el "método de la transferencia de tensiones" de ZIENKIEWICZ, VALLIAPAN y KING (ref. 4 y 5), pero es directamente aplicable a cualquier otro método de cálculo.

El proceso seguido es mostrado en la fig. 2. La carga se aplica por etapas, siendo necesarias varias iteraciones en cada una de ellas.

Las ecuaciones (1), (2) y (3), que permiten la resolución del problema lineal, toman para la etapa 'i' y la iteración 'j' la forma siguiente:

$$\{\Delta \epsilon\}_{ij}^e = [B]_i^e \{\Delta \delta\}_{ij}^e \quad (1')$$

$$\{\Delta \sigma\}_{ij}^e = [D]_{ij}^e \{\Delta \epsilon\}_{ij}^e \quad (2')$$

$$\{\Delta R^*\}_{ij} = [K]_{ij} \{\Delta \delta\}_{ij} \quad (3')$$

Las matrices  $[D]_{ij}^e$ , y por consiguiente también las  $[K]_{ij} = \sum_e \int_{Vol} [B]_i^{eT} [D]_{ij}^e [B]_i^e dVol$ , no se modifican en el curso de las iteraciones 'j' de cada etapa. Permanecen constantes y son obtenidas, a partir de las leyes de comportamiento de los materiales  $\{\sigma\} = g(\{\epsilon\})$ , para los valores finales  $\{\epsilon\}_{i-1}^e$  y  $\{\sigma\}_{i-1}^e$  obtenidos al final de la etapa precedente.

La disminución de la rapidez de convergencia que ello supone es netamente contrarrestada por la reducción del tiempo de cálculo que se obtiene al no definir las matrices  $[D]_i^e$  y  $[K]_i$  más que una sola vez por etapa. Tenemos pues:

$$\begin{aligned} [D]_{ij}^e &= [D_o]_i^e \\ [K]_{ij} &= [K_o]_i \end{aligned} \quad , \text{ para todo 'j'}$$

Con vistas a mejorar la convergencia, trabajaremos con las expresiones tangentes.

El proceso seguido para la resolución de una etapa 'i' puede esquematizarse como sigue:

a) Se resuelve primeramente el sistema de ecuaciones

$\{\Delta \delta\}_{i1} = [K_o]_i^{-1} \{\Delta R^*\}_{i1}$ , donde  $\{\Delta R^*\}_{i1}$  es igual a  $\{\Delta R\}_i$ , es decir, al vector de las fuerzas exteriores aplicadas en los nudos en la etapa 'i' (suponemos que las fuerzas exteriores actúan en los nudos de la malla).

b) Las ecuaciones (1') y (2') permiten obtener los  $\{\Delta \epsilon\}_{i1}^e$  y  $\{\Delta \sigma\}_{i1}^e$ , así como los valores finales:  $\{\epsilon\}_{i1}^e = \{\epsilon\}_{i0}^e + \{\Delta \epsilon\}_{i1}^e$

$$\{\sigma\}_{i1}^e = \{\sigma\}_{i0}^e + \{\Delta \sigma\}_{i1}^e$$

c) Pero según las leyes de comportamiento de los materiales  $\{\sigma\} = g(\{\epsilon\})$ , tenemos que para el campo de deformaciones alcanzado  $\{\epsilon\}_{i1}^e$ , a cada elemento le corresponde un estado tensional  $\{\sigma^*\}_{i1}^e = g(\{\epsilon\}_{i1}^e)$  diferente del calculado. La diferencia entre ambos  $\{\sigma'\}_{i1}^e = \{\sigma\}_{i1}^e - \{\sigma^*\}_{i1}^e$  representa las "tensiones no equilibradas" que no pueden ser resistidas por el material bajo el campo de deformaciones obtenido, y que deberán por tanto redistribuirse elásticamente sobre la estructura con vistas a restablecer el equilibrio.

d) Así pues, la siguiente iteración efectuará dicha redistribución:

$\{\Delta \delta\}_{i2} = [K_o]_i^{-1} \{\Delta R^*\}_{i2}$ , donde el vector  $\{\Delta R^*\}_{i2}$  representa las "fuerzas nodales no equilibradas" obtenidas a partir de las "tensiones no equilibradas" de la última iteración:

$$\{\Delta R^*\}_{i2} = \sum_e \int_e [B]^e T \{\sigma'\}_{i1}^e d \text{Vol.}$$

(expresión obtenida por aplicación del teorema de los trabajos virtuales).

e) Las iteraciones se prosiguen hasta que las tensiones no equilibradas en cada elemento supongan un porcentaje despreciable frente al valor final de las mismas.

En el caso de operar con elementos cuya función de desplazamiento  $[N]^e$  de lugar a un campo de deformaciones (y por tanto de tensiones) variable en el interior del mismo, la evaluación de las integrales que permiten obtener las fuerzas no equilibradas se complica enormemente. Dada la obligada imprecisión inherente al modelo propuesto para representar la conducta no lineal del hormigón, consideramos suficientemente apropiado el obtener las fuerzas no equilibradas a partir del estado de tensiones y deformaciones del centro de gravedad del elemento, supuesto asignado a todos los puntos del mismo. Una alternativa consistiría en suponer el elemento descompuesto en varios subelementos y operar dentro de cada uno de la forma ya indicada (ref. 6). Nosotros creemos no obstante que ello alarga sin demasiadas ventajas el tiempo de cálculo, siendo por tanto preferible reducir el tamaño de la malla en las zonas de fuerte variación de tensiones.

## I) ANALISIS BIDIMENSIONAL

Vamos a comenzar por el estudio de las estructuras bidimensionales trabajando en su plano. Tenemos por tanto dos grados de libertad por nudo: los corrimientos 'u' y 'v' en la dirección de los ejes 'x' e 'y', respectivamente. El convenio de signos para las tensiones y deformaciones es el indicado en la Fig. 3.

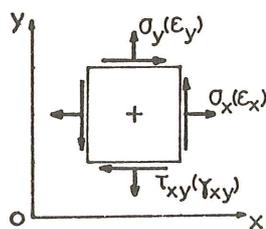


Fig. 3.

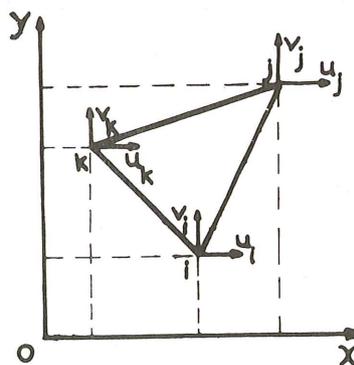


Fig. 4.

## 3. IDEALIZACION DE LA ESTRUCTURA EN ELEMENTOS FINITOS

3.1. Una primera posibilidad consiste en considerar tres tipos diferentes de elementos:

A) *Elementos de hormigón* (Fig. 4)

Por su simplicidad escogeremos el elemento triangular de espesor constante con función de desplazamiento lineal, lo que da lugar a un campo de tensiones y deformaciones constante en el interior del elemento. La aproximación obtenida con este tipo de elementos, puede ser

muy aceptable si se utiliza una malla suficientemente fina en las zonas de fuerte variación de tensiones.

En principio, despreciaremos la posible reducción de sección debida a la presencia de armaduras.

Tendremos los siguientes vectores:

$$- \text{ De desplazamientos: } \{\delta\}^e = \begin{matrix} [6 \times 1] \\ \left( \begin{matrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{matrix} \right)^e \end{matrix}$$

$$- \text{ De tensiones: } \{\sigma\}^e = \begin{matrix} [3 \times 1] \\ \left( \begin{matrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{matrix} \right)^e \end{matrix}$$

$$- \text{ De deformaciones: } \{\epsilon\}^e = \begin{matrix} [3 \times 1] \\ \left( \begin{matrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{matrix} \right)^e \end{matrix}$$

$$- \text{ De fuerzas nodales: } \{F\}^e = \begin{matrix} [6 \times 1] \\ \left( \begin{matrix} F_{xi} \\ F_{yi} \\ F_{xj} \\ F_{yj} \\ F_{xk} \\ F_{yk} \end{matrix} \right)^e \end{matrix}$$

Eligiendo una función de desplazamiento lineal en el interior de elemento:

$$u(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y$$

$v(x, y) = \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y$ , donde los 6 coeficientes son obtenidos por las condiciones:

$$u_1 = u(x_1, y_1)$$

$v_1 = v(x_1, y_1)$ ,  $1 = i, j, k$ , obtenemos las siguientes expresiones de las matrices  $[B]^e$  y  $[k]^e$  (ref. 3):

$$[B]^e = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_K & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_K \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_K & b_K \end{bmatrix}$$

$$\text{Siendo: } 2\Delta = 2 \cdot \text{Area elemento} = \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_K & y_K \end{vmatrix}, y:$$

$$a_i = x_j y_K - x_K y_j$$

$$b_i = y_j - y_K$$

$$c_i = x_K - x_j$$

$$a_j = x_K y_i - x_i y_K$$

$$b_j = y_K - y_i$$

$$c_j = x_i - x_K$$

$$a_K = x_i y_j - x_j y_i$$

$$b_K = y_i - y_j$$

$$c_K = x_j - x_i$$

$$[k]^e = \int_e [B]^e T [D]^e h dx dy = [B]^e T [D]^e [B]^e h \Delta$$

'h' es el espesor del elemento y 'Δ' su área.

Sólo nos resta definir la matriz  $[D]^e$ , cosa que haremos en el siguiente apartado.

B) Elementos de acero (Fig. 5)

Los consideraremos filiformes y trabajando únicamente en el sentido de su longitud.

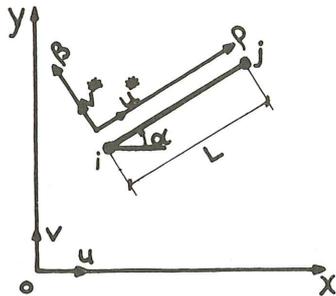


Fig. 5.

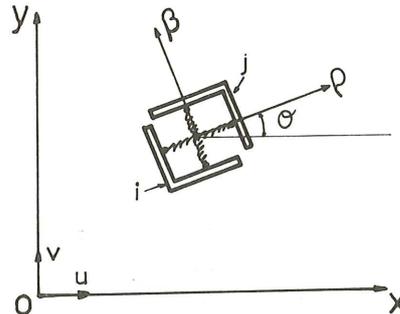


Fig. 6.

Como el estudio es plano, serán afectados de una sección que es suma de las de las armaduras situadas sobre las caras superior e inferior.

Tendremos los siguientes vectores:

$$\begin{aligned}
 \text{-- De desplazamientos: } \{\delta\}^e &= \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix} & \text{y } \{\delta^*\}^e &= \begin{Bmatrix} u_i^* \\ v_i^* \\ u_j^* \\ v_j^* \end{Bmatrix} \\
 [4 \times 1] & & [4 \times 1] & \\
 \text{(c. globales)} & & \text{(c. locales)} &
 \end{aligned}$$

-- De tensiones:  $\{\sigma^*\}^e$  (dimensión 1 x 1) (c. locales).

-- De deformaciones:  $\{\epsilon^*\}^e$  (dimensión 1 x 1) (c. locales).

$$\begin{aligned}
 \text{-- De fuerzas nodales: } \{F\}^e &= \begin{Bmatrix} F_{xi} \\ F_{yi} \\ F_{xj} \\ F_{yj} \end{Bmatrix} & \text{y } \{F^*\}^e &= \begin{Bmatrix} F_{\rho i}^* \\ F_{\beta i}^* \\ F_{\rho j}^* \\ F_{\beta j}^* \end{Bmatrix} \\
 [4 \times 1] & & [4 \times 1] & \\
 \text{(c. globales)} & & \text{(c. locales)} &
 \end{aligned}$$

Eligiendo una función desplazamiento lineal en el interior del elemento, que expresada en coordenadas locales tendrá la forma:

$$u^*(\rho) = \gamma_1 + \gamma_2 \rho, \text{ con las condiciones límites } \begin{cases} \rho = 0 \rightarrow u^* = u_i^* \\ \rho = L \rightarrow u^* = u_j^* \end{cases}$$

se obtienen las siguientes expresiones de las matrices  $[B]^e$  y  $[k]^e$ :

$$[B^*]^e = \frac{1}{L} [-1, 0, 1, 0]$$

(coordenadas locales)

$$[k^*]^e = \int_e [B^*]^e{}^T [D^*]^e [B^*]^e d \text{Vol} = [B^*]^e{}^T [D^*]^e [B^*]^e S_\phi L$$

(coordenadas locales)<sup>e</sup>

siendo 'S<sub>φ</sub>' el área de las armaduras y 'L' la longitud del elemento.

En coordenadas globales las expresiones son:

$$[B]^e = \frac{1}{L} [-c, -s, c, s]$$

$$[k]^e = \frac{S_\phi [D^*]^e}{L} \begin{bmatrix} c^2 & sc & -c^2 & -sc \\ sc & s^2 & -sc & -s^2 \\ -c^2 & -sc & c^2 & sc \\ -sc & -s^2 & sc & s^2 \end{bmatrix}; \quad \begin{array}{l} c = \cos \alpha \\ s = \sin \alpha \end{array}$$

La matriz  $[D^*]^e$  será estudiada más adelante.

### C) Elementos de conexión entre hormigón y acero (Fig. 6)

La utilización de tales elementos sólo tiene sentido cuando se quiere estudiar el efecto de la pérdida de adherencia entre el hormigón y las armaduras. En caso contrario, es decir, si no se admiten desplazamientos relativos entre ambos materiales, basta con asignar nudos comunes a los elementos de acero y hormigón en aquellos puntos que tengan idénticas coordenadas geométricas.

Los elementos de conexión consisten en dos muelles ortogonales que enlazan los nudos de acero, 'j', y hormigón, 'i', situados en el mismo punto geométrico. El eje ' $\rho$ ' de la figura 6 corresponde a la dirección de las armaduras. Estos muelles no tienen dimensiones físicas y sus características mecánicas deben reproducir el mecanismo de transferencia de esfuerzos por adherencia correspondiente a la zona a ellos asignada.

Tendremos los siguientes vectores:

$$\begin{array}{l} \text{-- De desplazamientos: } \{\delta\}^e = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix}^e \quad [4 \times 1] \quad \text{y} \quad \{\delta^*\}^e = \begin{Bmatrix} u_i^* \\ v_i^* \\ u_j^* \\ v_j^* \end{Bmatrix}^e \quad [4 \times 1] \\ \text{(c. globales)} \qquad \qquad \qquad \text{(c. locales)} \end{array}$$

$$\text{-- De esfuerzos transmitidos: } \{\sigma^*\}^e = \begin{Bmatrix} \sigma_\rho \\ \sigma_\beta \end{Bmatrix}^e \quad [2 \times 1] \quad \text{(c. locales)}$$

$$\text{-- De deslizamientos relativos: } \{\epsilon^*\}^e = \begin{Bmatrix} \epsilon_\rho \\ \epsilon_\beta \end{Bmatrix}^e \quad [2 \times 1] \quad \text{(c. locales)}$$

$$\text{-- De fuerzas nodales: } \{F\}^e = \begin{Bmatrix} F_{xi} \\ F_{yi} \\ F_{xj} \\ F_{yj} \end{Bmatrix}^e \quad [4 \times 1] \quad \text{y} \quad \{F^*\}^e = \begin{Bmatrix} F_{\rho i}^* \\ F_{\beta i}^* \\ F_{\rho j}^* \\ F_{\beta j}^* \end{Bmatrix}^e \quad [4 \times 1]$$

$$\text{(c. globales)} \qquad \qquad \qquad \text{(c. locales)}$$

La matriz  $[B^*]^e$ , que relaciona los vectores  $\{\delta^*\}^e$  y  $\{\epsilon^*\}^e$ , tiene la forma:

$$[B^*]^e = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

, y en coordenadas globales:

$$[B]^e = \begin{bmatrix} -c & -s & c & s \\ s & -c & -s & c \end{bmatrix}, \quad \text{siendo} \quad \begin{array}{l} c = \cos \theta \\ s = \sin \theta \end{array}$$

y la matriz de rigidez  $[k]^e$ , que relaciona  $\{F\}^e$  y  $\{\delta\}^e$ :

$$[k]^e = \begin{bmatrix} -c & s \\ -s & -c \\ c & -s \\ s & c \end{bmatrix} \quad [D^*]^e = \begin{bmatrix} -c & -s & c & s \\ s & -c & -s & c \end{bmatrix}$$

(c. globales)

La matriz  $[D^*]^e$  será definida más adelante.

3.2) La utilización de los tres tipos de elementos que acabamos de describir puede ser interesante cuando la armadura esté muy localizada o cuando se deseen estudiar los efectos de la pérdida de adherencia perfecta entre hormigón y acero. Un modelo alternativo, que supone la compatibilidad perfecta entre los desplazamientos de ambos materiales y que permite una sustancial reducción del número total de elementos, consiste en utilizar un tipo único de elemento mixto constituido por el hormigón más los refuerzos. Estos se suponen uniformemente distribuidos dentro del elemento, asignándoles un espesor ficticio " $h_a$ " (fig. 7), que puede ser diferente para las dos direcciones de refuerzo.

La relación entre las tensiones y deformaciones del elemento será:

$$\{\sigma_h\}^e = [D_h]^e \{\epsilon\}^e$$

$$\{\sigma_a\}^e = [D_a]^e \{\epsilon\}^e$$

La matriz  $[D_h]^e$  será idéntica a la que luego describiremos para los elementos de hormigón y la matriz  $[D_a]^e$  será indicada en el apartado 4.1.

Dado que el vector  $\{\epsilon\}$  es común a ambos materiales, la matriz de rigidez del elemento se obtiene por simple adición, trabajando, claro está, en el sistema de referencia global:

$$[k]^e = [k_h]^e + [k_a]^e, \text{ siendo}$$

$$[k_h]^e = [B]^e{}^T [D_h]^e [B]^e h_h \Delta, \quad \text{y}$$

$$[k_a]^e = [B]^e{}^T [D_a]^e [B]^e h_a \Delta$$

Si la cuantía de armaduras es diferente en las dos direcciones de refuerzo, bastaría con obtener  $[k_a]^e$  como suma de las  $[k_{a,i}]^e$  ( $i = 1, 2$ ) de las dos direcciones, calculando cada una con el  $h_{a,i}$  correspondiente.

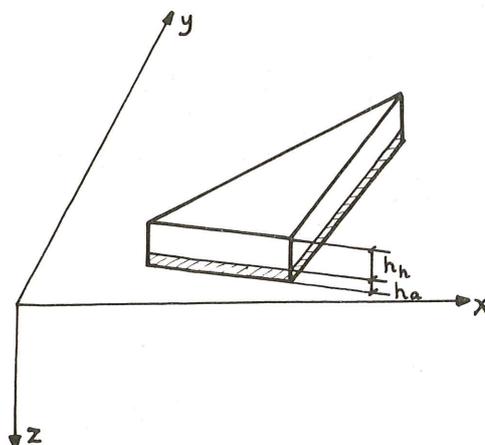


Fig. 7.

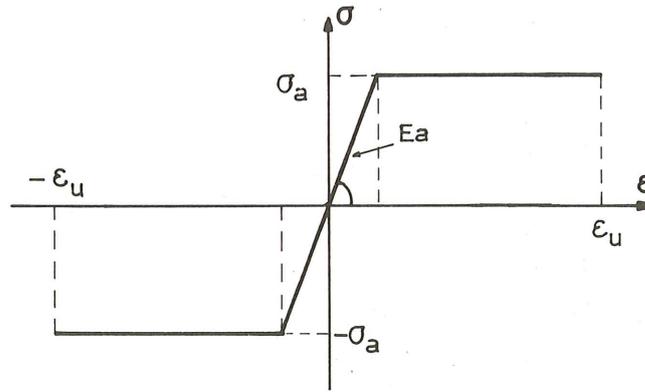


Fig. 8.

#### 4. LEYES DE COMPORTAMIENTO DE LOS MATERIALES

En el apartado anterior hemos dejado sin definir las matrices  $[D]^e$  de los diferentes elementos, ya que son función del modelo de comportamiento que adoptemos para representar la respuesta no lineal bajo carga creciente de los materiales que los componen. Vamos a pasar ahora a discutir dichos modelos de comportamiento.

##### 4.1. Acero

Se puede suponer que el mismo sigue una ley  $\sigma - \epsilon$  elastoplástica (fig. 8), con comportamiento idéntico a tracción y compresión.

Tenemos pues:

$$\sigma = g(\epsilon) = \begin{cases} E_a \epsilon & \text{si } |\epsilon| < \sigma_a/E_a \\ \sigma_a & \text{si } |\epsilon| \geq \sigma_a/E_a \end{cases}$$

La matriz  $[D]$  tangente, que nos relaciona los incrementos de tensiones y deformaciones en cada etapa, tiene la forma siguiente:

a) En los elementos de acero filiformes:

$\{\Delta \sigma^*\}^e = [D^*]_t^e \{\Delta \epsilon^*\}^e$ , siendo  $[D^*]_t^e$  una matriz de dimensión (1 x 1) que vale:

$$\begin{cases} E_a & \text{si } |\epsilon| < \sigma_a/E_a \\ 0 & \text{si } |\epsilon| \geq \sigma_a/E_a \end{cases}$$

b) Cuando se trabaje con elementos mixtos acero-hormigón, la matriz  $[D^*]_t^e$ , referida al sistema local de ejes " $\rho$ " y " $\beta$ " (Fig. 7), es:

$$[D^*]_t^e = \begin{bmatrix} E_\rho & 0 & 0 \\ 0 & E_\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ siendo}$$

$$E_\rho = E_a, \quad \text{si } |\epsilon_\rho| < \sigma_a/E_a$$

$$E_\rho = 0, \quad \text{si } |\epsilon_\rho| \geq \sigma_a/E_a$$

$$E_\beta = E_a, \quad \text{si } |\epsilon_\beta| < \sigma_a/E_a$$

$$E_\beta = 0, \quad \text{si } |\epsilon_\beta| \geq \sigma_a/E_a$$

Como vemos, la matriz  $[D^*]_t^e$  confiere una rigidez transversal nula a la capa de acero, que trabaja únicamente en el sentido de los refuerzos.

c) Cuando las direcciones de armado no sean ortogonales o cuando las cuantías de refuerzo en ambas direcciones sean diferentes, la matriz  $[D^*]_t^e$  para cada dirección de armado  $\alpha$  es:

$$[D^*]_t^e = \begin{bmatrix} E_\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ siendo } \begin{cases} E_\alpha = E_a, & \text{si } |\epsilon_\alpha| < \sigma_a/E_a \\ E_\alpha = 0, & \text{si } |\epsilon_\alpha| \geq \sigma_a/E_a \end{cases}$$

#### 4.2. Interacción acero-armaduras a través del mecanismo de adherencia

Como se sabe, la adherencia perfecta no existe más que para bajos niveles de transmisión de esfuerzos. Más allá, se produce un deslizamiento relativo entre ambos materiales que se ve progresivamente menos coaccionado por el rozamiento hasta llegar a un punto a partir del cual se produce libremente.

La cuantificación precisa de este fenómeno no es posible, pues es función de gran número de factores, tales como el nivel de esfuerzos transmitidos, la calidad del hormigón, el diámetro y tipo de armaduras, el nivel de tensiones en el acero, la longitud de embebido medida desde la superficie libre o la fisura más próxima, etc. No obstante, podemos aproximar el fenómeno suponiendo que el deslizamiento relativo entre ambos materiales es función únicamente del nivel de esfuerzos transmitido.

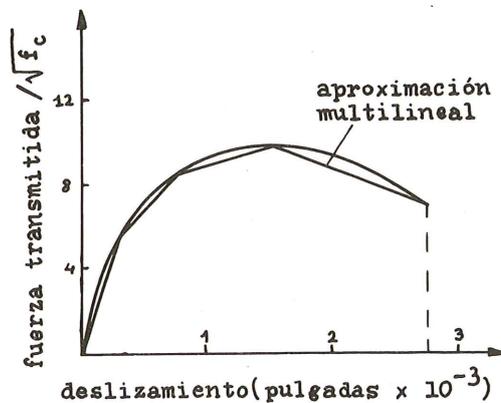


Fig. 9 (tomada de la ref. 7).

Adoptaremos pues una ley de tipo no lineal de la forma:  $\sigma_\rho = g(\epsilon_\rho)$ , cuya expresión puede fijarse acudiendo a la bibliografía especializada. En la Figura 9 mostramos una curva empírica tomada de la ref. 7, que con vistas a su aplicación práctica puede aproximarse de forma multilineal.

En cuanto a la relación  $\sigma_\beta = g'(\epsilon_\beta)$ , no existen datos experimentales suficientes, siendo además poco importante su influencia. Asumiremos por tanto una compatibilidad casi absoluta entre las deformaciones del acero y hormigón en dirección normal a los refuerzos.

Para ello basta con tomar:

$\sigma_\beta = K_\beta \epsilon_\beta$ , siendo  $K_\beta$  una cantidad suficientemente grande, pero que no plantee problemas a la hora de la resolución del sistema de ecuaciones.

Así pues, la matriz  $[D^*]_t^e$  es:

$[D^*]_t^e = \begin{bmatrix} K_\rho & 0 \\ 0 & K_\beta \end{bmatrix}$ , siendo  $K_\rho = \frac{d g}{d e} \ll 0$ , tomada a partir del diagrama experimental elegido.

### 4.3. Hormigón

Es precisamente en la adopción del modelo más apropiado para reproducir el comportamiento no lineal del hormigón bajo solicitaciones biaxiales, así como los criterios de rotura y fisuración, donde reside el mayor problema del análisis de estructuras de hormigón por el método de los elementos finitos.

Los primeros trabajos sobre este tema (NGO y SCORDELIS, ref. 1) abordaron la cuestión de forma simplificada suponiendo un comportamiento lineal para el hormigón a compresión y predefiniendo las fisuras en posición y longitud. La malla las incorporaba desde el principio del análisis, considerando nudos diferentes en las dos caras de las mismas.

Con posterioridad, numerosos autores propusieron nuevos modelos en los que la respuesta del hormigón se abordaba de forma más compleja (véase ref. 2).

Nosotros vamos a tomar como base de nuestro trabajo los resultados experimentales de KUPFER (ref. 8 y 9). Los ensayos han sido realizados sobre probetas cuadradas en forma de placa delgada, sometidas a solicitaciones en su plano. Las dimensiones de las probetas eran 20 cm. x 20 cm. x 5 cm. La carga era aplicada en las dos direcciones ortogonales por medio de cepillos de acero, constituidos por un gran número de barritas individuales, unidas en sus bases formando un paquete. Las barritas son suficientemente ligeras para poder seguir las deformaciones de la pieza de forma independiente, evitando así la aparición de tensiones tangenciales en la superficie de aplicación de la carga, poseyendo al mismo tiempo una resistencia al pandeo suficiente. Gracias al empleo de colas sintéticas, es posible asimismo la aplicación de esfuerzos de tracción.

La investigación de KUPFER ha suministrado resultados sobre la conducta de las probetas bajo cualquier combinación posible de solicitaciones biaxiales: bicompresión (C-C), compresión-tracción (C-T) y bitracción (T-T). Investigaciones posteriores (ref. 10, 11, 12 y 13), han confirmado los resultados obtenidos.

Todos estos ensayos han sido realizados aplicando la carga de forma proporcional, es decir, manteniendo constante a lo largo del ensayo la relación entre el valor de las tensiones aplicadas en las dos direcciones ortogonales.

Aunque numerosos autores han confirmado la relativa independencia de los valores de las tensiones de rotura frente a la manera de aplicar la carga, no sucede lo mismo en lo que concierne a los valores de las deformaciones últimas, que son muy sensibles a la calidad del hormigón, velocidad de aplicación de la carga y al proceso de carga seguido (proporcional o no), como puede apreciarse en los trabajos de NELISSEN (ref. 10).

Se comete pues una cierta imprecisión cuando se adopta como base del modelo unos diagramas  $\sigma$ - $\epsilon$  obtenidos con carga proporcional, para representar la conducta real del hormigón en zonas donde, como consecuencia de los fenómenos no lineales, se producen variaciones importantes, tanto en las relaciones entre tensiones principales como en las direcciones de las mismas.

Los ensayos de KUPFER se hicieron sobre tres hormigones de calidad diferente. En lo que sigue, vamos a limitarnos a los resultados obtenidos con el hormigón de calidad media ( $f_c \simeq 300 \text{ kg/cm}^2$ ).

#### 4.3.1. Resistencia última del hormigón

En la Figura 10 se muestran las curvas experimentales obtenidas por KUPFER para cual-

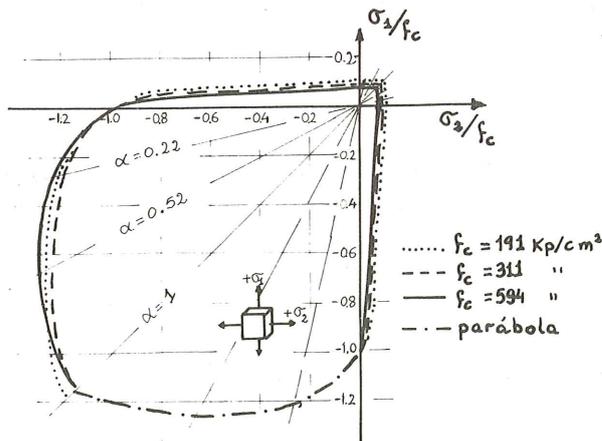


Fig. 10 (tomada de la ref. 8).

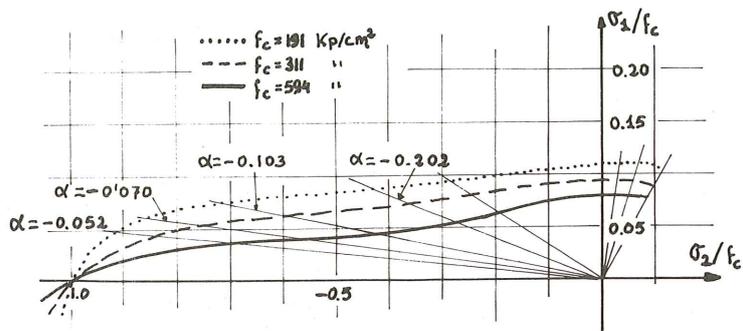


Fig. 11 (tomada de la ref. 9).

quier combinación de tensiones principales. Dichas curvas están presentadas de forma adimensional, con las resistencias referidas a la resistencia  $f_c$  sobre prisma.

En la Fig. 11 se muestran de forma más detallada los dominios C-T y T-T.

En el dominio T-T las resistencias son prácticamente independientes de la relación de tensiones, y casi iguales a los valores uniaxiales. Queremos sin embargo señalar que recientes investigaciones (ref. 13) han obtenido un ligero aumento de la resistencia a bitracción con relación al valor uniaxial.

Nosotros supondremos una resistencia a tracción constante en todo el dominio T-T, que puede evaluarse por la expresión (ref. 8):

$$\sigma_{Tu} = 0,64 \sqrt[3]{f_c^2}$$

En el dominio C-C la parábola propuesta por KUPFER aproxima bastante bien los resultados experimentales:

$$\left( \frac{|\sigma_1|}{f_c} + \frac{|\sigma_2|}{f_c} \right)^2 - \frac{|\sigma_1|}{f_c} - 3,65 \frac{|\sigma_2|}{f_c} = 0$$

(siendo  $|\sigma_1| > |\sigma_2|$ )

Con vistas a nuestro modelo, interesa expresar esta ecuación en función de la relación  $\alpha$  entre las tensiones principales:

$$\sigma_2 = \sigma_1 \alpha$$

$$\sigma_{1u} = - \frac{(1 + 3,65 \alpha)}{(1 + \alpha)^2} f_c$$

$$\sigma_{2u} = \sigma_{1u} \alpha$$

En el dominio C-T existen dos zonas claramente diferenciadas, según que las tracciones o compresiones sean dominantes. La separación entre ambas puede fijarse para un valor de

$$\alpha = \frac{\text{tracción}}{\text{compresión}} = -\frac{1}{15} \text{ (véase ref. 2)}$$

Así pues, para  $|\alpha| > 1/15$  tomaremos una recta que pase por el punto correspondiente al ensayo uniaxial:

$$\alpha = \frac{\sigma_2 \text{ (tracción)}}{\sigma_1 \text{ (compresión)}} ; -\frac{1}{15} > \alpha > -\infty$$

$$\sigma_{1u} = \frac{0,64}{\alpha \sqrt[3]{f_c} - 0,366} > 0 ; \sigma_{2u} = \sigma_{1u} \alpha > 0$$

Para  $|\alpha| < 1/15$  usaremos una parábola análoga a la del dominio C-C, pero fijando el coeficiente "m"  $\neq 3,65$ , que se ajusta imponiendo, para  $|\alpha| = 1/15$ , el acuerdo con la zona precedente:

$$\sigma_{1u} = -\frac{(1 + m \alpha)}{(1 + \alpha)^2} f_c < 0$$

$$\sigma_{2u} = \sigma_{1u} \alpha > 0 ; 1/15 < \alpha < 0$$

$$m = \frac{15 \sqrt[3]{f_c} - 43,055}{\sqrt[3]{f_c} + 5,492}$$

#### 4.3.2. Valores de las deformaciones últimas

Los valores de dichas deformaciones en las tres direcciones principales  $\epsilon_{1u}$ ,  $\epsilon_{2u}$  y  $\epsilon_{3u}$ , obtenidos por KUPFER, son mostrados en la Figura 12 en función de  $\gamma = \text{arc. tg}(1/\alpha)$ , siendo  $\alpha = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$ . Estas curvas pueden introducirse en el modelo mediante aproximaciones multilineales.

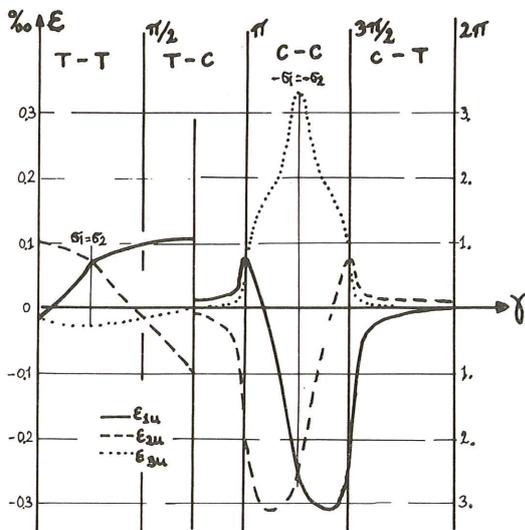


Fig. 12 (tomada de la ref. 9).

### 4.3.3. Leyes tensiones-deformaciones

Las Figuras 13, 14 y 15 muestran las curvas experimentales de KUPFER que van a servir de base a nuestro modelo. Este consiste en una formulación analítica de las leyes  $\sigma$ - $\epsilon$ , comprendiendo todas las combinaciones posibles de tensiones biaxiales: C-C, C-T y T-T a través del coeficiente  $\alpha$  que interviene de forma paramétrica.

Dicha formulación queda completamente determinada en función de ciertos parámetros cuya definición es sencilla, a saber:

- Los módulos  $E_0$  y  $\nu_0$ , obtenidos en los ensayos de compresión uniaxial del hormigón.
- Las tensiones de rotura  $\sigma_{iu}$ , cuya expresión analítica ha sido presentada en el apartado 4.3.1, en función de la resistencia a compresión uniaxial del hormigón  $f_c$  y de la relación  $\alpha$  entre las tensiones principales.
- Las deformaciones últimas, indicadas en el apartado 4.3.2 en función de  $\alpha$ .

En las Figuras 13, 14 y 15 se presentan las curvas experimentales obtenidas por KUPFER (en fino), acompañadas por aquéllos correspondientes al modelo analítico que pasamos a presentar (en grueso), que está basado en los trabajos de LIU (ref. 14) y CEDOLIN (ref. 15).

#### A) Dominio T-T (Fig. 13)

En esta zona el hormigón presenta un comportamiento casi lineal, con una ligera curvatura poco antes de la rotura. Los ensayos de KUPFER mostraron asimismo una reducción de aproximadamente el 10% en el valor del coeficiente de Poisson con respecto al valor obtenido en los ensayos de compresión uniaxial ( $\nu_0$ ). En cambio, los valores del módulo de elasticidad se mantienen prácticamente idénticos.

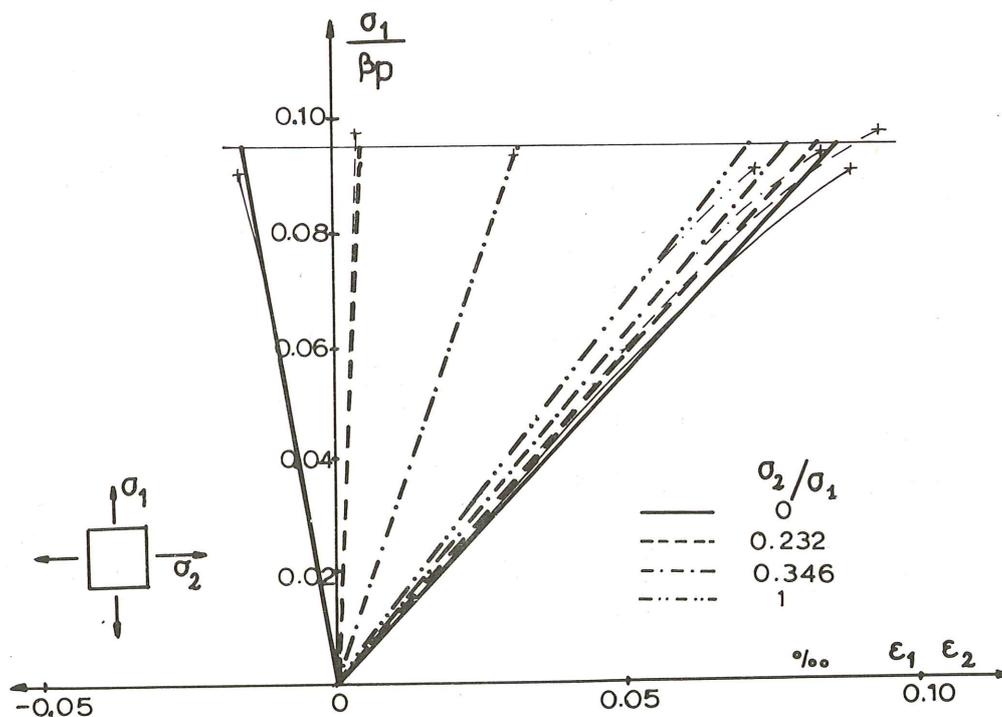


Fig. 13.

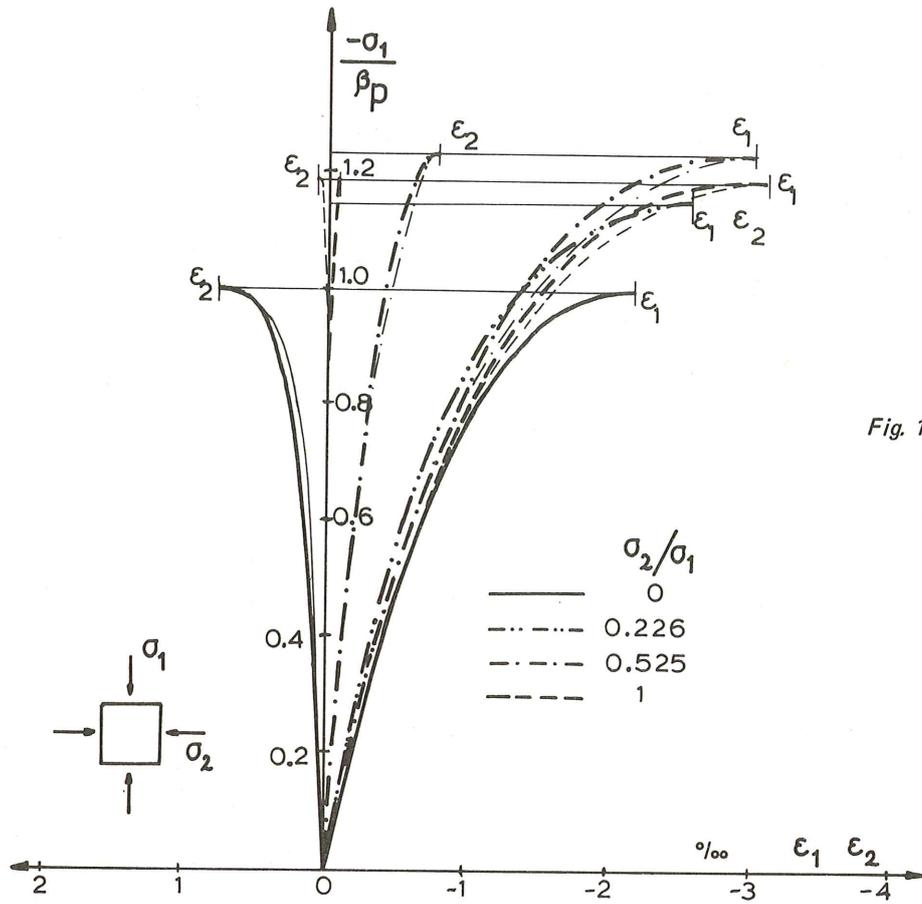


Fig. 14.

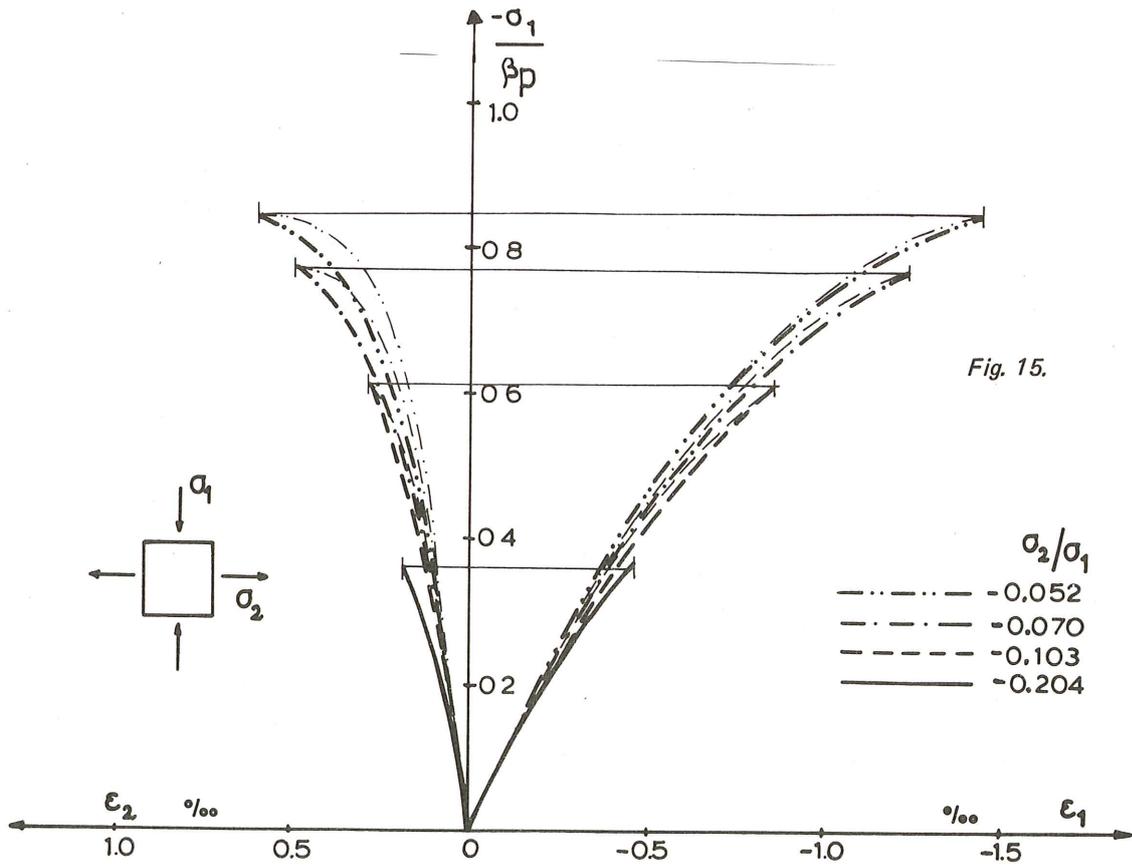


Fig. 15.

Utilizaremos por tanto un modelo elástico e isotrópico, definido por las leyes clásicas de elasticidad, que referido a las direcciones principales toma la forma:

$$\sigma_1 = \frac{E_o}{1 - (\nu_o^T)^2} [\epsilon_1 + \nu_o^T \epsilon_2] \quad (I)$$

$$\sigma_2 = \frac{E_o}{1 - (\nu_o^T)^2} [\epsilon_2 + \nu_o^T \epsilon_1] , \text{ siendo } \nu_o^T = 0,9 \nu_o$$

### B) Dominio C-C (Fig. 14)

En esta zona, la forma de las curvas experimentales es parecida a la obtenida en los ensayos de compresión uniaxial: fuerte curvatura con respecto a la tangente en el origen y tangente prácticamente nula en el punto de rotura.

Utilizaremos expresiones analíticas análogas a las propuestas por SAENZ (ref. 16) para el caso uniaxial:

$\sigma_1 = \frac{A + B \epsilon_1}{1 + C \epsilon_1 + D \epsilon_1^2}$ , donde los parámetros A, B, C y D son obtenidos a partir de las condiciones siguientes:

- a) para  $\epsilon_1 = 0$ ,  $\sigma_1 = 0$ ;
- b) para  $\epsilon_1 = \epsilon_{1u}$ ,  $\sigma_1 = \sigma_{1u}$ ;
- c) para  $\epsilon_1 = 0$ ,  $d\sigma_1/d\epsilon_1 = E_{01}^*$ ;
- d) para  $\epsilon_1 = \epsilon_{1u}$ ,  $d\sigma_1/d\epsilon_1 = 0$ , y análogamente obtendríamos las expresiones de las curvas

$$\sigma_1 = \frac{A' + B' \epsilon_2}{1 + C' \epsilon_2 + D' \epsilon_2^2}$$

El valor  $E_{0i}^*$  es la pendiente en el origen de la curva y su valor puede obtenerse a partir de las leyes elásticas, teniendo en cuenta que  $\sigma_2 = \sigma_1 \alpha$ . Así pues, y tomando  $\sigma_1 < \sigma_2 < 0$ , o sea  $|\sigma_1| > |\sigma_2|$  y por tanto  $0 < \alpha < 1$ , obtenemos para la curva  $\sigma_1 - \epsilon_1$ :  $E_{01}^* = \frac{E_o}{1 - \nu_o \alpha}$  y para la curva  $\sigma_1 - \epsilon_2$ :  $E_{02}^* = \frac{E_o}{\alpha - \nu_o}$

Una vez obtenidos los valores de los parámetros A, B, C, D, A', B', C' y D', se llega a unas expresiones finales:

$$\sigma_1 = \frac{E_{0i}^* \epsilon_i}{\left[ 1 + \left( \frac{E_{0i}^* \epsilon_{iu}}{\sigma_{1u}} - 2 \right) \left( \frac{\epsilon_i}{\epsilon_{iu}} \right) + \left( \frac{\epsilon_i}{\epsilon_{iu}} \right)^2 \right]} \quad (II)$$

para  $i = 1, 2$ .

Esta expresión presenta una singularidad matemática para el caso  $i = 2$  y  $\alpha = \nu_o$ . Tomaremos entonces la ley  $\epsilon_2 = 0$ , que corresponde bastante bien a la curva experimental obtenida para  $\alpha \simeq 0,2$  (ver Fig. 14).

### C) Dominio C-T (Fig. 15)

En esta zona, las curvas experimentales muestran una transición gradual entre la lineali-

dad del dominio T-T y la acusada curvatura del dominio C-C, transición que tiene lugar en función de la relación  $\alpha$  entre las tracciones y las compresiones.

Las curvas muestran una no linealidad todavía acusada, pero la condición de pendiente nula en el punto de rotura no se verifica. Utilizaremos por tanto la expresión de SAENZ, pero prescindiendo del parámetro D y no impondremos la condición d) antes indicada.

Las expresiones finales así obtenidas serán:

$$\sigma_1 = \frac{E_{oi}^* \epsilon_i}{\left[ 1 + \left( \frac{E_{oi}^* \epsilon_{iu}}{\sigma_{1u}} - 1 \right) \left( \frac{\epsilon_i}{\epsilon_{iu}} \right) \right]} \quad (III)$$

siendo  $\sigma_1 < 0 < \sigma_2$  ;  $\sigma_2 = \sigma_1 \alpha$  y  $-\infty < \alpha < 0$   
(compresión) (tracción) (tracción simple) (compresión simple)

Estas expresiones, válidas para la zona intermedia del dominio C-T, deben acordarse de forma gradual a aquéllas propuestas para los dominios C-C y T-T, de manera que se garantice una suave transición en la formulación, necesaria para asegurar una buena convergencia durante el proceso de resolución numérica. Comparando las expresiones (II) y (III) observamos que esto se puede conseguir fácilmente mediante un parámetro  $\gamma$  ( $\alpha$ ) que varíe linealmente entre  $\alpha = 0$  (compresión uniaxial) y un valor de  $\alpha$  para el cual se pueda considerar que el comportamiento se aleja ya claramente del propio de las compresiones. Valor que hemos fijado en  $\alpha = -1/15$  (ver apartado 4.3.1 y ref. 2).

La formulación para la zona  $-1/15 < \alpha < 0$  queda pues:

$$\sigma_1 = \frac{E_{oi}^* \epsilon_i}{\left[ 1 + \left( \frac{E_{oi}^* \epsilon_{iu}}{\sigma_{1u}} - 1 - \gamma(\alpha) \right) \left( \frac{\epsilon_i}{\epsilon_{iu}} \right) + \gamma(\alpha) \left( \frac{\epsilon_i}{\epsilon_{iu}} \right)^2 \right]} \quad (IV)$$

siendo  $\gamma(\alpha) = 1 + 15 \alpha$

Esta expresión (IV) puede englobar las (II) y (III) si definimos  $\gamma(\alpha)$  como sigue:

$\gamma(\alpha) = 1$  en C-C.

$\gamma(\alpha) = 1 + 15 \alpha$  en C-T, con  $0 > \alpha > -1/15$

$\gamma(\alpha) = 0$  en C-T, con  $-1/15 > \alpha$

En cuanto al acuerdo con la zona T-T, es preciso observar que la expresión (III) conduce a la ley elástica (I) cuando  $\frac{E_{oi}^* \epsilon_{iu}}{\sigma_{1u}} = 1$ .

Para valores de  $\alpha$  menores que aquél para el que se produce esta igualdad, la expresión (III) puede contener valores negativos del coeficiente  $\left( \frac{E_{oi}^* \epsilon_{iu}}{\sigma_{1u}} - 1 \right)$ , situación sin ningún sentido físico que es preciso evitar. Todo este problema aparece únicamente como consecuencia del carácter aproximado de las expresiones analíticas adoptadas para representar  $\epsilon_{iu}(\alpha)$ ,  $\sigma_{iu}(\alpha)$  y  $\sigma_1 = g(\epsilon_i)$ . Para el hormigón que estamos considerando, los valores de KUPFER nos proporcionan para  $\alpha = -0,5$ ,  $\frac{E_{oi}^* \epsilon_{iu}}{\sigma_{1u}} \simeq 1,25$ , lo que implica la casi linealidad de la curva analítica.

Nosotros proponemos el detenernos ahí y suponer que las expresiones (IV) sólo son aplicables para  $\alpha > -0,5$ , más allá de lo cual (tracciones más fuertes), el comportamiento del hormigón puede suponerse lineal y elástico, regido por las expresiones (I), propias del dominio T-T, y tomando  $\nu_o^{CT} = \nu_o (0,9 - 0,05/\alpha)$ .

#### 4.3.4. Obtención de la matriz $[D]_t^e$ para el hormigón no fisurado

Una vez establecidas las expresiones de las leyes de comportamiento del hormigón, es posible obtener la matriz  $[D]_t^e$  que relaciona los aumentos de tensiones y deformaciones de cada elemento para cada etapa del proceso de carga.

Como ya hemos visto, se aproxima la conducta no lineal del hormigón mediante una serie de iteraciones lineales en el interior de cada etapa. La ley de deformación incremental utilizada es obtenida tangencialmente a partir del estado  $\sigma$ - $\epsilon$  previo en cada elemento, suponiendo que las características del hormigón permanecen constantes en cada intervalo.

De acuerdo con la mayor parte de los autores, supondremos que la conducta no lineal del hormigón, bajo un estado determinado de sollicitaciones biaxiales, genera una anisotropía de la respuesta del mismo frente a una nueva sollicitación, anisotropía que varía a lo largo del proceso de carga y cuyas direcciones principales corresponden a las tensiones principales en cada instante.

Supondremos además que las deformaciones tangenciales son independientes de las tensiones principales y viceversa, y que existe un comportamiento isótropo normalmente al plano de las tensiones principales, de idéntica forma a como en el caso uniaxial se supone isotropía en relación a las direcciones no sollicitadas.

El problema se reduce a la obtención, para un estado de tensiones y deformaciones dado en cada elemento, de una relación incremental entre  $\sigma$  y  $\epsilon$  que sea lineal, elástica y anisótropa según las dos direcciones principales y que represente aproximadamente el comportamiento del hormigón durante el incremento de carga de la siguiente etapa, que suponemos definido por las leyes experimentales de KUPFER.

Con las hipótesis ya expuestas podremos adoptar la relación incremental propia de los materiales ortótropos (ref. 17):

$$\begin{Bmatrix} d\epsilon_1 \\ d\epsilon_2 \\ d\gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_1^T & -\nu_{21}^T/E_2^T & 0 \\ -\nu_{12}^T/E_1^T & 1/E_2^T & 0 \\ 0 & 0 & 1/G_{12}^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\sigma_1 \\ d\sigma_2 \\ d\tau_{12} \end{Bmatrix} \quad (V)$$

verificándose además:  $E_2^T \nu_{12}^T = E_1^T \nu_{21}^T$

Tendremos asimismo:  $d\epsilon_3 = -\frac{\nu_{13}^T}{E_1^T} d\sigma_1 - \frac{\nu_{23}^T}{E_2^T} d\sigma_2 \simeq -\frac{\nu_{12}^T}{E_1^T} d\sigma_1 - \frac{\nu_{21}^T}{E_2^T} d\sigma_2$  Los ensayos de KUPFER nos permitirán evaluar, como luego veremos, los valores de  $\nu_{ij}^T$  y  $E_i^T$ , pero no suministran ninguna información sobre la evolución en fase no lineal del módulo  $G_{12}^T$ . A falta de investigaciones experimentales concluyentes sobre este punto, suele acudir a admitir que  $G_{12}^T$  puede ponerse en función de los demás coeficientes del material, si se supone que el comportamiento bajo un esfuerzo de cizallamiento puro puede ser extendido a cualquier otro estado de sollicitación. Así pues, adoptaremos la relación (ref. 17):

$$G_{12}^T = \frac{E_1^T E_2^T}{E_1^T + E_2^T + 2\nu_{12}^T E_2^T} = \frac{E_1^T}{(\nu_{12}^T/\nu_{21}^T) + 1 + 2\nu_{12}^T}$$

Queremos sin embargo señalar que recientes investigaciones realizadas en el C.E.B.T.P. francés parecen indicar que la evolución de  $G_{12}^T$  en la fase no lineal próxima a la rotura es claramente diferente de la que se obtiene con la expresión anterior.

En nuestro modelo adoptaremos, no obstante, una expresión de la matriz  $[D^*]_t^e$  de la forma:

$$[D^*]_t^e = \frac{E_1^T}{1 - \nu_{12}^T \nu_{21}^T} \begin{bmatrix} 1 & \nu_{21}^T & 0 \\ \nu_{21}^T & \nu_{21}^T/\nu_{12}^T & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu_{12}^T \nu_{21}^T}{1 + \frac{\nu_{12}^T}{\nu_{21}^T} + 2 \nu_{12}^T} \end{bmatrix}$$

En la zona de comportamiento lineal, esta expresión conduce a la ya conocida para los materiales elásticos e isotrópicos:

$$[D^*]_t^e = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu^2}{2(1 + \nu)} \end{bmatrix}$$

siendo  $E = E_0$  y  $\nu = \begin{cases} 0,9 \nu_0 & \text{en bitracción} \\ \nu_0 (0,9 - 0,05 \alpha) & \text{en C-T, con } -\infty < \alpha < -0,5 \end{cases}$

En la zona de comportamiento no lineal, los módulos  $E_i^T$  y  $\nu_{ij}^T$  pueden obtenerse a partir de las expresiones de las leyes  $\sigma_1 - \epsilon_1$ , ya mostradas en el apartado anterior (fórmula (IV)).

Hay que determinar 4 coeficientes:  $E_1^T, E_2^T, \nu_{12}^T$  y  $\nu_{21}^T$ , de los cuales sólo 3 son independientes.

Suponiendo un aumento proporcional de la carga:

$\sigma_2 = \sigma_1 \alpha$ , o sea,  $d\sigma_2 = \alpha d\sigma_1$ , podemos plantear las tres condiciones:

$$d\epsilon_1 = \frac{d\sigma_1 - \nu_{12}^T d\sigma_2}{E_1^T} = \frac{(1 - \nu_{12}^T \alpha) d\sigma_1}{E_1^T}$$

$$d\epsilon_2 = \frac{d\sigma_2 - \nu_{21}^T d\sigma_1}{E_2^T} = \frac{(\alpha - \nu_{21}^T) d\sigma_1}{E_2^T}$$

$$d\epsilon_3 = \frac{-\nu_{12}^T (d\sigma_1 + d\sigma_2)}{E_1^T} = -\frac{\nu_{12}^T (1 + \alpha) d\sigma_1}{E_1^T} = -\frac{\nu_{21}^T (1 + \alpha) d\sigma_1}{E_2^T}$$

y resolviendo el sistema de ecuaciones, llegamos a:

$$E_1^T = -\frac{C_1 C_3 (1 + \alpha)}{C_1 \alpha - C_3 (1 + \alpha)} \quad E_2^T = -\frac{\alpha C_2 C_3 (1 + \alpha)}{C_2 - C_3 (1 + \alpha)}$$

$$\nu_{12}^T = \frac{C_1}{C_1 \alpha - C_3 (1 + \alpha)} \quad \nu_{21}^T = \frac{C_2 \alpha}{C_2 - C_3 (1 + \alpha)}$$

siendo:  $C_i = \frac{d\sigma_1}{d\epsilon_i}$ ,  $i = 1, 2, 3$

La ley  $\sigma_1 - \epsilon_3$  es aproximada mediante una expresión análoga a la (IV), siendo en este caso  $E_{03}^* = \frac{E_0}{\nu_0 (1 + \alpha)}$  (véase Fig. 16).

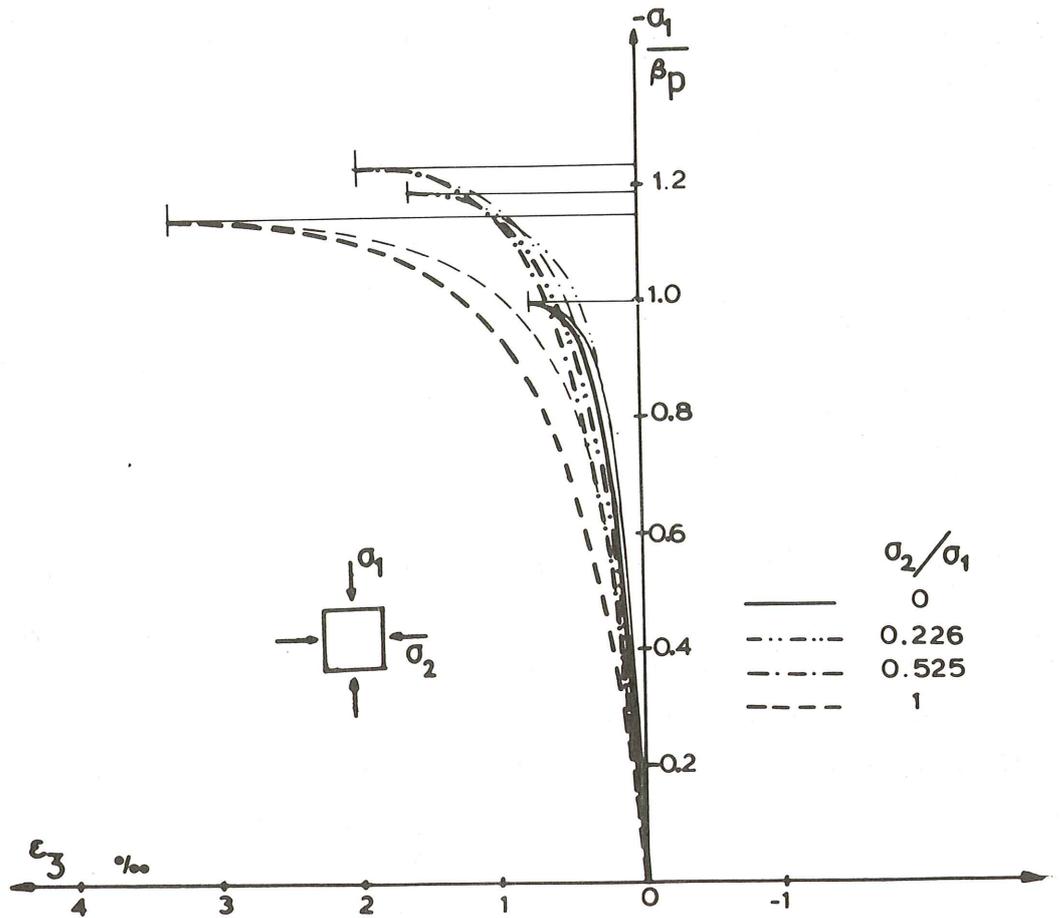


Fig. 16.

Los coeficientes  $C_1$ ,  $C_2$  y  $C_3$  son función de la relación  $\alpha$  entre tensiones principales y del estado de sollicitación del elemento (definido por los valores de las deformaciones  $\epsilon_i$ ), y son obtenidos por derivación de las expresiones analíticas (IV):

$$C_i = \frac{d \sigma_1}{d \epsilon_i} = \frac{E_{0i}^* (1 - (\frac{\epsilon_i}{\epsilon_{iu}})^2 \gamma(\alpha))}{\left[ 1 + \left( \frac{E_{0i}^* \epsilon_{iu}}{\sigma_{1u}} - 1 - \gamma(\alpha) \right) \left( \frac{\epsilon_i}{\epsilon_{iu}} \right) + \gamma(\alpha) \left( \frac{\epsilon_i}{\epsilon_{iu}} \right)^2 \right]^2} \quad i = 1, 2, 3$$

siendo:  $E_{01}^* = \frac{E_o}{1 - \nu_o \alpha}$ ;  $E_{02}^* = \frac{E_o}{\alpha - \nu_o}$  y  $E_{03}^* = - \frac{E_o}{\nu_o (1 + \alpha)}$ .

Para el caso  $\alpha = 0$ , para el cálculo de  $\nu_{21}^T$  y  $E_2^T$  tomaremos  $\alpha = 0,01$ , lo que evitará problemas numéricos.

En el caso  $\alpha = \nu_o$ , donde se obtendría  $C_2 = \infty$ , los valores de  $\nu_{21}^T$  y  $E_2^T$  pueden ser calculados como sigue:

$$\nu_{21}^T = \alpha = \nu_o \quad \text{y} \quad E_2^T = \frac{E_1^T \alpha}{\nu_{12}^T} = \frac{E_1^T \nu_o}{\nu_{12}^T}$$

La otra posible singularidad numérica,  $\alpha = -1$ , no se produce pues para  $\alpha < -0,5$  adoptaremos, como se vió, la expresión elástica de  $[D^*]_t^e$ .

Los valores de  $E_i^T$  y  $\nu_{ij}^T$  así obtenidos son introducidos en el modelo incremental (V), el cual representará por tanto perfectamente "el comportamiento tangente del hormigón en su

plano para un aumento proporcional de la sollicitación biaxial”, comportamiento que suponemos definido por los ensayos de KUPFER.

La expresión que acabamos de obtener nos relaciona los incrementos de tensiones y deformaciones principales, siendo por ello preciso pasar la matriz  $[D^*]_t^e$  al sistema de referencia global:

$$[D]_t^e = [T]^e [D^*]_t^e [T]^e{}^T, \text{ siendo}$$

$$[T]^e = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & -2sc \\ s^2 & c^2 & 2sc \\ sc & -sc & c^2 - s^2 \end{bmatrix}, \text{ con } c = \cos \alpha' \quad s = \sin \alpha' \text{ y } \alpha' \text{ la inclinación de las tensiones principales del elemento, variables con el proceso de carga:}$$

$$\alpha' = \frac{1}{2} \text{arc. tg} (2 \tau_{xy} / (\sigma_x - \sigma_y))$$

#### 4.3.5. Obtención de la matriz $[D]_t^e$ para el hormigón fisurado

A partir del momento en el que la tensión en un elemento supere los valores últimos antes indicados, el elemento será considerado como:

- En rotura a compresión, si el hormigón se halla en C-C o en C-T con  $-1/15 < \alpha < 0$
- Fisurado en dirección normal a la mayor tracción principal, si el hormigón está en T-T o en C-T con  $-\infty < \alpha < -1/15$ .

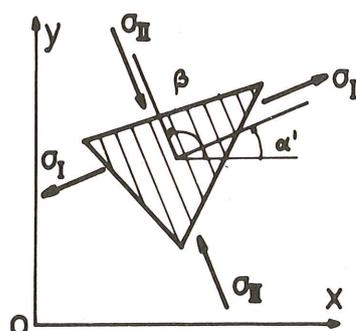


Fig. 17.

Un estudio detallado de los diferentes modelos utilizados para reproducir la conducta del hormigón fisurado puede seguirse en la ref. 2. El modelo que aquí proponemos consiste en lo siguiente:

A partir del momento en que aparecen tracciones inadmisibles en el interior de un elemento, éste se supone atravesado por una serie de fisuras paralelas en dirección normal a la de mayor tracción principal en el momento preciso de la fisuración (Fig. 17).

La aplicación adecuada de este modelo exige dos condiciones:

- Establecer una malla suficientemente fina en la zona susceptible de fisurarse, no sólo porque las fisuras se suponen extendidas a todo el elemento, sino también como consecuencia de las fuertes redistribuciones de tensiones que se producen en los alrededores de las zonas fisuradas.

b) Proceder por pequeños incrementos de carga en el momento de la fisuración. Dado que la dirección de las fisuras es determinada por las direcciones de las tensiones principales en el elemento en el momento en que la fisura es detectada (al final de una etapa de carga), si se procede por fuertes incrementos de carga nos arriesgamos a obtener direcciones de fisuración alejadas de aquéllas que se obtendrían para la carga para la que realmente aparecen, arrastrando al mismo tiempo fuertes errores en la dirección de las tensiones no equilibradas, que es preciso redistribuir.

Así pues, una vez que aparecen fisuras en dirección normal a la máxima tracción principal  $\sigma_I$  (Fig. 17), el elemento se supondrá con rigidez nula frente a nuevos incrementos de deformación en la dirección  $\alpha'$  normal a las fisuras. En dirección de éstas,  $\beta$ , el hormigón se supone trabajando uniaxialmente.

La matriz  $[D^*]_t^e$ , referida al sistema local de la figura, tiene la forma:

$$\begin{Bmatrix} d \sigma_I \\ d \sigma_{II} \\ d \tau \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_t & 0 \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d \epsilon_I \\ d \epsilon_{II} \\ d \gamma \end{Bmatrix}$$

El paso al sistema global se hace de forma análoga al hormigón no fisurado, siendo ahora  $\alpha'$  la dirección normal a las fisuras.

“ $E_t$ ” es el módulo tangente de elasticidad en compresión uniaxial, si  $\epsilon_{II} < 0$ , o en tracción si  $\epsilon_{II} > 0$ .

Si en el curso de un posterior aumento de la carga,  $\epsilon_{II}$  sobrepasa el límite a tracción del hormigón, el elemento se considerará fisurado en dos direcciones, con una matriz  $[D^*]_t^e = 0$ .

El coeficiente “A” de  $[D^*]_t^e$  intenta tener en cuenta la existencia de una cierta rigidez a la deformación transversal como consecuencia de la existencia de rozamiento entre las caras de las fisuras. A falta de datos concluyentes sobre este punto, la dispersión de los valores utilizados por los distintos autores es muy grande (véase ref. 2). Nosotros hemos utilizado la expresión propuesta por CEDOLIN (ref. 18), que permite tener en cuenta la reducción progresiva de este efecto a medida que crece la deformación del elemento en dirección normal a las fisuras:

$$A = 0,15 E_0 [1 - \epsilon_I/0,004] \leq 0$$

Para representar de forma adecuada la deformabilidad real del elemento fisurado, es preciso tener en cuenta de alguna forma la colaboración del hormigón traccionado entre fisuras. Esta colaboración disminuye progresivamente a medida que aumenta la deformación  $\epsilon_I$  y se multiplica el número de fisuras. El comportamiento medio del elemento fisurado puede, por tanto, aproximarse mediante una curva de descarga progresiva de su ley  $\sigma_I - \epsilon_I$ , a partir del momento de la fisuración, que tiende hacia cero para la plastificación de las armaduras traccionadas (Fig. 18-a):

$$\sigma_I = \sigma_{IR} \frac{(\epsilon_f - \epsilon_I)^2}{(\epsilon_f - \epsilon_{IR})^2}$$
, donde  $\sigma_{IR}$ ,  $\epsilon_{IR}$  son los valores en el momento de la fisuración y  $\epsilon_f$  el límite elástico del acero.

Algunos autores (ref. 19), consideran que se obtiene una mejor aproximación suponiendo que se produce una brusca discontinuidad inicial (del 20% aproximadamente), que se continúa con una descarga progresiva según el modelo anterior (Fig. 18-b).

Es preciso señalar que la toma en consideración de la colaboración del hormigón entre fisuras no afecta a la matriz  $[D^*]_t^e$  fisurada, que sigue presentando una rigidez nula frente a las

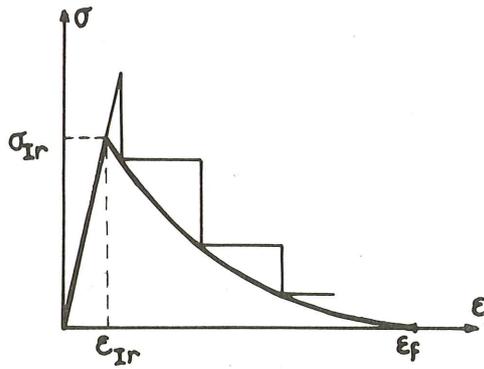


Fig. 18-a.

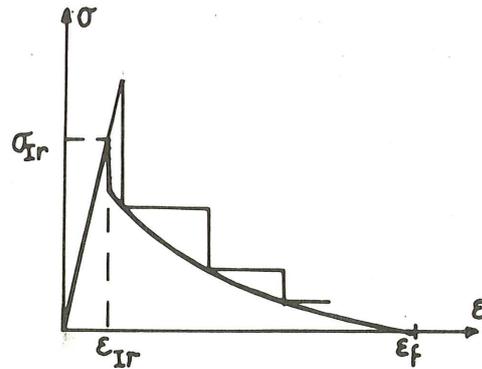


Fig. 18-b.

deformaciones:  $\frac{d\sigma_1}{d\epsilon_1} = 0$ , sino que interviene únicamente en el momento de evaluar las "tensiones no equilibradas" que es preciso redistribuir.

Aunque el modelo no considera la posibilidad de descargas, las fuertes redistribuciones tensionales que se producen en las proximidades de los elementos fisurados pueden producir cierres ocasionales de algunas fisuras ya abiertas. Dado que el modelo utiliza en estos casos la misma ley  $\sigma_1 - \epsilon_1$  para carga y descarga, es preciso que el programa tenga controladas estas situaciones para asegurar que no dan lugar a imprecisiones importantes.

## II) ANALISIS DE ESTRUCTURAS DE HORMIGON TRABAJANDO DE FORMA COMBINADA EN MEMBRANA Y A FLEXION

El modelo bidimensional que acabamos de presentar puede adaptarse fácilmente al análisis de estructuras de hormigón trabajando conjuntamente en membrana y a flexión, es decir con 5 grados de libertad por nudo. Para ello basta con suponer cada elemento dividido en varias capas, las cuales deben verificar una cierta condición de compatibilidad de deformación. Esto permite por un lado la consideración separada del hormigón y las armaduras y, por otra parte, la toma en cuenta de la variación del comportamiento de los materiales a lo largo del espesor de la placa, en función del estado de deformaciones en cada punto y en cada instante del proceso de carga.

Un procedimiento alternativo, válido únicamente para el estudio a flexión, puede seguirse en la ref. 2.

### 5. HIPOTESIS ADOPTADAS

Podemos resumirlas como sigue:

a) El espesor de la placa se supone dividido en capas (Fig. 19). Cada una de ellas puede tener propiedades diferentes, pero éstas se suponen constantes en todo el espesor.

b) Se adoptan las hipótesis de Kirchhoff para la flexión de placas delgadas:

– Los puntos situados inicialmente sobre una normal al plano medio de la placa permanecen después de la aplicación de la carga sobre una normal a la superficie media de la placa deformada.

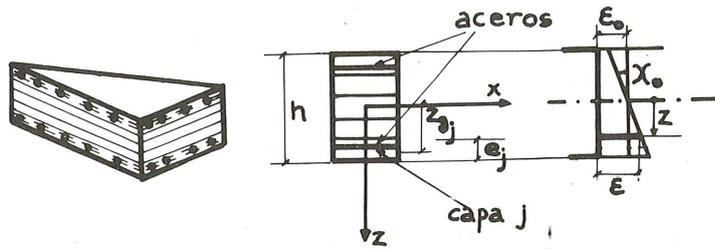


Fig. 19.

– Las tensiones normales al plano medio de la placa se consideran despreciables ( $\sigma_z = 0$ ).

La primera hipótesis nos permite obtener las deformaciones al nivel del centro de gravedad de cada capa en función de las deformaciones en el plano de referencia (que puede escogerse arbitrariamente):

$$\{\epsilon_j\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}_j = \{\epsilon_o\} + \begin{bmatrix} z_{gj} & 0 & 0 \\ 0 & z_{gj} & 0 \\ 0 & 0 & -z_{gj} \end{bmatrix} \{\chi_o\}$$

, siendo  $z_{gj}$  la coordenada del centro de gravedad de la capa "j", y

$$\{\epsilon_o\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}_o \quad \text{y} \quad \{\chi_o\} = \begin{Bmatrix} -w''_{xx} \\ -w''_{yy} \\ 2w''_{xy} \end{Bmatrix}$$

, respectivamente las deformaciones plana

y de flexión al nivel del plano de referencia.

La segunda hipótesis permite considerar cada capa trabajando bajo un estado de tensiones plano, definido por el vector:

$$\{\sigma_j\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_j$$

c) Las capas de hormigón trabajan bajo un estado bidimensional de tensiones cuyas leyes de comportamiento, criterios de rotura y fisuración son los adoptados en el modelo bidimensional ya presentado.

d) Los aceros pasivos se suponen situados sobre dos capas próximas a las caras superior e inferior de la placa, cuyos centros de gravedad coinciden con los de las armaduras correspondientes. Estas capas son afectadas de un espesor ficticio en las dos direcciones de refuerzo (que se suponen ortogonales y coincidentes con los ejes globales "x" e "y"), de forma que se obtenga una cuantía de acero, uniformemente distribuida en el espesor de la capa, equivalente a la que existe realmente.

Cada una de las direcciones de refuerzo trabaja únicamente en sentido longitudinal, presentando por tanto la capa de acero una rigidez nula en sentido transversal:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_j = \begin{bmatrix} E_x & 0 & 0 \\ 0 & E_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_j \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}_j$$

e) No se consideran deslizamientos relativos entre acero y hormigón.

f) La rigidez del elemento se obtiene por simple adición de las de las diferentes capas que lo componen.





Recordando que hemos adoptado una ley de deformaciones plana dada por:

$$\{\Delta \epsilon\}^e = \{\Delta \epsilon_o\}^e + [\bar{Z}] \{\Delta \chi_o\}^e$$

llegamos a:

$$\{\Delta \bar{\sigma}\}^e = \begin{Bmatrix} \Delta \bar{N} \\ \Delta \bar{M} \end{Bmatrix}^e = [D]_t^e \begin{Bmatrix} \Delta \epsilon_o \\ \Delta \chi_o \end{Bmatrix}^e, \text{ siendo } [D]_t^e \text{ de la forma:}$$

$$[D]_t^e = \sum_j \begin{bmatrix} e_j [C_j]_t^e & | & 1/2 (t_{j+1}^2 - t_j^2) [C_j]_t^e \\ \hline 1/2 (t_{j+1}^2 - t_j^2) [C_j]_t^e & | & 1/3 (t_{j+1}^3 - t_j^3) [C_j]_t^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1 & | & D_2 \\ \hline D_2 & | & D_3 \end{bmatrix}^e$$

con  $t_j = z_{gj} - e_j/2$  y  $t_{j+1} = z_{gj} + e_j/2$  y "e<sub>j</sub>" el espesor de la capa "j".

La matriz de rigidez del elemento se obtiene por la expresión:

$$[k]_t^e = \int_e \begin{bmatrix} [B_p]_t^T & 0 \\ 0 & [B_f]_t^T \end{bmatrix}^e [D]_t^e \begin{bmatrix} [B_p]_t \\ 0 \\ [B_f]_t \end{bmatrix}^e d \text{ Sup.}$$

Ahora bien, con la función de desplazamiento escogida, la matriz no es constante en el interior del elemento, siendo por tanto preciso calcular la integral. Dada la complejidad de las leyes de comportamiento del hormigón bajo cargas biaxiales, sería preciso acudir a procedimientos de resolución numérica que alargarían enormemente el cálculo. Nosotros supondremos de forma aproximada que el comportamiento medio del elemento puede ser reemplazado por el de su centro de gravedad, teniendo entonces:

$$[k]_t^e \simeq \Delta \begin{bmatrix} [B_p]_t^T [D_1]_t [B_p]_t & [B_p]_t^T [D_2]_t [B_f]_t \\ [B_f]_t^T [D_2]_t [B_p]_t & [B_f]_t^T [D_3]_t [B_f]_t \end{bmatrix}^e = \Delta \begin{bmatrix} k_{pp} & k_{pf} \\ k_{fp} & k_{ff} \end{bmatrix}^e \begin{matrix} 6 \\ 8 \\ 9 \end{matrix}$$

Las matrices  $[k_{pp}]_t^e$  y  $[k_{ff}]_t^e$  son aquéllas que corresponden a un estudio plano y de flexión, respectivamente. Las matrices  $[k_{fp}]_t^e$  y  $[k_{pf}]_t^e$  establecen el acoplamiento de ambos tipos de trabajo. Estas matrices son nulas cuando existe simetría geométrica y mecánica total de la sección con respecto al plano de referencia. Este no es el caso a partir del momento en que el comportamiento no lineal de los materiales, principalmente la fisuración, desplaza el centro mecánico de la sección con respecto al geométrico. La inclusión de estas rigideces de acoplamiento permite la utilización de un plano de referencia constante y arbitrario hasta la rotura, así como la posibilidad de establecer zonas con espesor variable (representadas adecuadamente mediante un aumento gradual del número de capas de los elementos).

## 8. RESOLUCION DEL PROBLEMA

Una vez obtenidas las matrices  $[k]_t^e$  de los diferentes elementos, se sigue el procedimiento ya conocido:

- Unión de las  $[k]_t^e$  de los diferentes elementos para obtener la matriz de rigidez global de la estructura  $[K]_t$ .
- Introducción de las coacciones de movimientos en los nudos afectados.
- Resolución del sistema de ecuaciones  $\{\Delta R^*\} = [K]_t \{\Delta \delta\}$ , y obtención de los incrementos de desplazamientos en los nudos.

d) Obtención de los incrementos de deformaciones en el plano de referencia para cada elemento:

$$\begin{Bmatrix} \Delta \epsilon_o \\ \dots \\ \Delta \chi_o \end{Bmatrix}^e = \begin{bmatrix} [B_p] & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & [B_f] \end{bmatrix}^e \begin{Bmatrix} \Delta \delta_p \\ \dots \\ \Delta \delta_f \end{Bmatrix}^e$$

e) Obtención de los incrementos de tensiones al nivel del centro de gravedad de cada capa:

$$\{\Delta \sigma_j\}^e = [C_j]_t^e [\{\Delta \epsilon_o\}^e + [\bar{Z}_{gj}] \{\Delta \chi_o\}^e], \text{ así como de las tensiones finales: } \{\sigma_j\}^e = \{\sigma_j\}^e + \{\Delta \sigma_j\}^e.$$

f) Suponiendo cada capa sometida a un estado plano y uniforme de tensiones, cuyos valores coinciden con los del centro de gravedad de la misma, se procede de la forma ya descrita en el apartado 2:

1.-Obtención de las deformaciones finales de la capa:

$$\{\epsilon_j\}^e = \{\epsilon_o\}^e + [\bar{Z}_{gj}] \{\chi_o\}^e, \text{ donde}$$

$$\{\epsilon_o\}^e = \{\epsilon_o\}^e + \{\Delta \epsilon_o\}^e$$

$$\{\chi_o\}^e = \{\chi_o\}^e + \{\Delta \chi_o\}^e$$

2.-Obtención de las tensiones teóricas  $\{\sigma_j^*\}^e$  resistidas por el material, según las leyes de comportamiento ya descritas:

$$\{\sigma_j^*\}^e = g(\{\epsilon_j\}^e)$$

3.-Por diferencia se obtienen las tensiones no equilibradas en la capa:

$$\{\sigma'_j\}^e = \{\sigma_j\}^e - \{\sigma_j^*\}^e$$

Integrando estas tensiones sobre el volumen de la capa, se obtienen las fuerzas nodales no equilibradas, que es preciso redistribuir en la siguiente iteración:

$$\{F^*\}_j^e = \int_{\text{capa } j} [B_p]^e{}^T \{\sigma'_j\}^e d \text{Vol} \simeq [B_p]^e{}^T \{\sigma'_j\}^e e_j \Delta = \begin{Bmatrix} F_1^* \\ F_2^* \\ F_3^* \end{Bmatrix}_j^e$$

$$\text{donde: } \{F^*\}_j^e = \begin{Bmatrix} X_\ell \\ Y_\ell \end{Bmatrix}_j^e; \ell = 1, 2, 3$$

4.-Por adición de las fuerzas nodales no equilibradas que aparecen en cada capa, se obtienen las fuerzas totales en los tres nudos del elemento, referidas al plano de referencia elegido:

Así para el nudo "ℓ",

$$\{F_\ell\}^e = \begin{Bmatrix} F_{x\ell} \\ F_{y\ell} \\ F_{z\ell} \\ T_{x\ell} \\ T_{y\ell} \end{Bmatrix}^e = \begin{Bmatrix} \sum_j X_{\ell j} \\ \sum_j Y_{\ell j} \\ 0 \\ \sum_j z_{gj} Y_{\ell j} \\ - \sum_j z_{gj} X_{\ell j} \end{Bmatrix}^e$$

## 9. CONSIDERACIONES FINALES

Los modelos que acabamos de presentar han sido programados por el autor sobre un sistema HP-2100 y utilizados para el análisis hasta la rotura de los esfuerzos de difusión de la fuerza de pretensado en dos tipos de anclajes:

a) Anclajes pasivos situados en el interior de una losa de hormigón (estudio bidimensional);

b) Anclajes de los cables de continuidad de los puentes construídos por avance en voladizo mediante nervios o resaltes en la losa inferior del cajón. En este tipo de anclajes, la aplicación excéntrica de la fuerza de pretensado a través de un elemento de gran rigidez respecto a la losa, exige la consideración conjunta de los esfuerzos membrana y de flexión, ya que estos últimos alcanzan valores locales muy importantes (ref. 22 y 23).

El acuerdo obtenido, tanto en la propagación y dirección de las fisuras como en la carga de rotura, con los resultados de los ensayos efectuados ha sido satisfactorio.

No obstante, consideramos necesario llamar la atención sobre algunas de las limitaciones más importantes del modelo propuesto que aconsejan una continuidad de las investigaciones sobre estos puntos, acompañada de la debida confrontación con resultados experimentales:

a) Las leyes biaxiales adoptadas para reproducir la conducta del hormigón han sido obtenidas a partir de los resultados obtenidos en ensayos realizados manteniendo constante la relación de tensiones principales en las dos direcciones de carga. Sin embargo, los efectos no lineales (la fisuración principalmente) pueden producir variaciones importantes de las tensiones principales, tanto en dirección como en magnitud. Desgraciadamente, en el momento actual no se dispone de resultados concluyentes bajo aplicación no proporcional de la carga.

b) Es preciso un mejor conocimiento de la evolución del módulo G de deformación transversal en la zona no lineal próxima a la rotura, pues la expresión adoptada en función de 'E' y 'ν' parece poco correcta.

c) Existen algunos coeficientes, tales como aquéllos que aproximan la colaboración del hormigón traccionado entre fisuras, la resistencia a la deformación transversal del hormigón fisurado o la pérdida progresiva de adherencia entre hormigón y acero, cuya influencia no ha podido ser perfectamente evaluada y cuya introducción en el modelo sólo se ha hecho de forma simplificada, siendo por ello preciso un mejor conocimiento de los mismos.

d) La adaptación del método de forma que se pueda tener en cuenta la posibilidad de ciclos de carga y descarga, de cierres de fisuras ya abiertas, o la consideración de los fenómenos diferidos del hormigón (ref. 24), no presenta excesiva dificultad siempre que se disponga de modelos suficientemente representativos de dichos fenómenos.

## REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- 1.— D. NGO y A.C. SCORDELIS.—“Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Beams”. ACI Journal. Marzo 1967.
- 2.— F. MILLANES MATO.—“Aplicación del método de los elementos finitos al cálculo de estructuras de hormigón. Resumen de los diferentes modelos propuestos”. Boletín n° 2 de Estructuras de la ETSICCP de Valencia. 1980.
- 3.— O.C. ZIENKIEWICZ.—“La méthode des éléments finis”. Ediscience. París 1973.
- 4.— O. C. ZIENKIEWICZ, S. VALLIAPAN y I.P. KING.—“Stress Analysis of Rock as a ‘no tension’ Material”. Geotechnique. V 18. Marzo 1968.
- 5.— O.C. ZIENKIEWICZ, S. VALLIAPAN y I.P. KING.—“Elastoplastic Solutions of Engineering Problems ‘Initial Stress’ Finite Element Approach”. International Journal for Numerical Methods in Engineering. Enero 1969.
- 6.— J. COLVILLE y J. ABBASI.—“Plane Stress Reinforced Concrete Finite Elements”. Journal of the Structural Division. ASCE. Mayo 1974.
- 7.— A.H. NILSON.—“Internal Measurement of Bond—Slip”. ACI Journal. Julio 1972.
- 8.— H. KUPFER, H.K. HILSDORF y H. RUSCH.—“Behavior of Concrete under Biaxial Stresses”. ACI Journal. Agosto 1969.
- 9.— H. KUPFER.—“Das Verhalten der Betons unter mehrachsiger Kurzzeit belastung unter besonderer Beanspruchung”. Deutscher Ausschuss für Stahlbeton. Heft 229. Berlin 1973.
- 10.— L.J.M. NELISSEN.—“Biaxial Testing of Normal Concrete”. Heron. V 18 1972 (n° 1).
- 11.— T.C.Y. LIU, A.H. NILSON y F.O. SLATE.—“Stress-Strain Response and Fracture of Concrete in Uniaxial and Biaxial Compression”. ACI Journal. Mayo 1972.
- 12.— N.J. CARINO y F.O. SLATE.—“Limiting Tensile Strain Criterion for Failure of Concrete”. ACI Journal. Marzo 1976.
- 13.— M.E. TASUJI, F.O. SLATE y A.H. NILSON.—“Stress-Strain Response and Fracture of Concrete in Biaxial Loading”. ACI Journal. Julio 1978.
- 14.— T.C.Y. LIU, A.H. NILSON y F.O. SLATE.—“Biaxial Stress-Strain Relations for the Concrete”. Journal of the Structural Division. ASCE. Mayo 1972.
- 15.— L. CEDOLIN y S. DEI POLI.—“Finite Element Non Linear Analysis of Reinforced Concrete Bidimensional Structures”. Technical Report n° 40. ISTC. Politecnico Milano. Dep. of Structural Engineering. 1974.
- 16.— L.P. SAENZ.—“Equation for Stress-Strain Curve of Concrete”. ACI Journal. Septiembre 1974.
- 17.— S.G. LEKHNITSKII.—“Theory of elasticity of an anisotropic elastic body”. Holden-Day Inc. San Francisco 1963.
- 18.— L. CEDOLIN y S. DEI POLI.—“Finite Element Studies of Shear Critical R/C Beams”. Journal of Engineering Mechanics Division. ASCE. Junio 1977.
- 19.— I. GILBERT y R.F. WARNER.—“Tensión Stiffening in Reinforced Concrete Slabs”. Journal of Structural Division. ASCE. Diciembre 1978.
- 20.— G.P. BAZELEY, Y.K. CHEUNG, B.M. IRONS y O.C. ZIENKIEWICZ.—“Triangular Elements in Plate Bending — Conforming and Non Conforming Solutions”. Matrix Methods in Structural Mechanics. Proceedings of the Conference held at Wright Patterson Air Force base. Ohio. Octubre 1965.
- 21.— Y.K. CHEUNG, I.P. KING y O.C. ZIENKIEWICZ.—“Slab Bridges with Arbitrary Shape and Support Conditions: A General Method of Analysis Based on Finite Elements”. Proceedings of the ICE. V. 40. Pág. 9—36. 1968.
- 22.— F. MILLANES MATO.—“Ancrages par bossage dans les hourdis des ponts: étude théorique et expérimentale”. Tesis defendida en la Ecole Nationale des Ponts et Chaussées de París. Septiembre 1979.
- 23.— F. MILLANES MATO.—“Comportamiento de los anclajes de los cables de continuidad en los puentes construídos por voladizos sucesivos”. Hormigón y Acero n° 134. Enero 1980.
- 24.— A.C. SCORDELIS.—“Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Structures”. Proceedings of the Specialty Conference on Finite Element Methods in Civil Engineering. Mc. Gill University. Montreal. Junio 1972.

## NOTA DEL COMITE EURO-INTERNACIONAL DEL HORMIGON (CEB)

Normas para inscribirse como Miembro Correspondiente Colectivo del CEB.

### 1º DERECHOS

Aparte de los Delegados Nacionales, solamente los Miembros Correspondientes reciben las Comunicaciones oficiales del CEB que consisten en:

- Seis o más Boletines de Información al año, conteniendo el estado de avance de los trabajos de las distintas Comisiones; y
- Todas las Noticias del CEB (CEB News) y la Información de carácter general.

A título de ejemplo, indicamos a continuación los Boletines aparecidos en 1980:

Nº 127 – Manual “Seguridad de Estructuras”, 1ª parte, 316 páginas.

Nº 128 – Idem – 2ª parte, 342 páginas.

Nº 133 – Diseño Sísmico de Estructuras de Hormigón. Propuesta Preliminar, 136 páginas.

Nº 135 – Manual de Cálculo Flexión-Compresión. Versión final, 144 páginas.

Nº 136 – Efectos estructurales de la fluencia y otras deformaciones diferidas. Versión final, 474 páginas.

Nº 137 – Complementos al Código Modelo FIP-CEB 1978 – Segunda versión, 342 páginas.

Nº 138 – Comportamiento en servicio, conservación y reparaciones – Informe preliminar de la Comisión IX, 436 páginas.

### 2º MIEMBROS CORRESPONDIENTES COLECTIVOS

Esta figura está reservada a Laboratorios, Centros de Investigación, Estudios de Ingeniería o Arquitectura, Empresas Constructoras, Asociaciones relacionadas con la construcción y casos similares.

La cotización anual es de 650 francos suizos.

### 3º INSCRIPCIONES

Basta con escribir al Secretariado Permanente del CEB, 6 rue Lauriston, F-75116, París-XVI<sup>ème</sup>.

La cotización debe pagarse en:

CEB Cuenta número 255 269 00P

Unión de Bancos Suizos

8 rue du Rhône

CH1211 Ginebra, Suiza

# Análisis de la flexión de placas mediante hiperelementos finitos de orden elevado

A. Samartín y J. Díaz del Valle  
Departamento de Análisis de Estructuras  
E.T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos. Santander

## 1. Introducción

Hasta fecha relativamente reciente, el cálculo estructural de placas con geometría y condiciones de borde arbitrarias ha constituido un problema complejo, frecuentemente inabordable sin el recurso de importantes y drásticas simplificaciones. Los métodos entonces existentes, —analíticos, semianalíticos (desarrollos en series) o numéricos (diferencias finitas)— eran incapaces o exigían un elevado grado de laboriosidad en su resolución.

Con la aparición del método de los elementos finitos (1), (MEF), la situación se modificó de un modo considerable, al existir la posibilidad de un tratamiento unificado dentro de la teoría general del análisis matricial de estructuras —del cálculo de placas— con un mínimo de aproximaciones. No obstante se comprobó que la versión en movimientos del MEF encontraba mayores dificultades en su aplicación a problemas de la clase  $C^1$  —como son los de la flexión de placas delgadas— en comparación con los problemas  $C^0$  —correspondientes a casos de elasticidad (tensión y deformación plana por ejemplo). Puede consultarse a este respecto al excelente libro de Zienkiewicz (2). La razón de esta dificultad hay que buscarla en el hecho de que el MEF representa un caso particular del procedimiento de Rayleigh-Ritz de minimización directa de funcionales, con funciones coordinadas constituidas por funciones —en general polinómicas— definidas en un soporte compacto (3).

Como es bien conocido, las exigencias de continuidad de estas funciones se elevan con el grado  $k$  de la clase  $C^k$  del problema funcional. Los tipos de elementos que satisfacen estas condiciones de continuidad se denominan, en la literatura, elementos conformes. Se ha comprobado (4) sin embargo, que es posible obtener, a veces de un modo muy eficiente, resultados convergentes (en el sentido de la energía) con elementos no conformes. Esta con-

vergencia, que no puede asegurarse que en estos casos sea monotónica, depende de la configuración de la malla en elementos finitos, es decir, en algunos ejemplos puede no existir convergencia. Irons (5) propuso con este objeto su bien conocida prueba del parche (patch test).

Así pues, entre los numerosos elementos finitos de flexión desarrollados hasta ahora, destacan por su interés práctico y teórico los elementos conformes, para los que importantes aspectos de la convergencia (monotonía, independencia de la malla, etc.) pueden ser asegurados sin necesidad de comprobaciones adicionales. No obstante, la tarea de construir elementos conformes de flexión no es trivial. En efecto, no es posible (6) alcanzar la conformidad en elementos mediante desarrollos polinómicos con expresión única en su interior. Existen actualmente varias técnicas de obtención de elementos conformes de flexión —utilizando sólo derivadas primeras como grados de libertad básicos (elementos simples)— entre las que merecen citarse (7): a) División del elemento en áreas o subelementos en cada uno de los cuales se define una función polinómica distinta. b) Introducción de funciones racionales correctoras. c) Reducción del orden  $k = 1$  del problema  $C^k$ , mediante la relajación de la hipótesis de Kirchoff, a  $k = 0$ . Esto implica la consideración de la deformación por cortante y la utilización de la integración reducida y selectiva, o bien de la hipótesis directa de Kirchoff entre otras posibilidades. d) La consideración de hiperelementos.

Este último procedimiento de construcción de elementos finitos conformes ha sido uno de los primeros en utilizarse y, en principio, es muy simple su consideración. En esencia consiste en introducir un número mayor de incógnitas básicas por nudo que el estricto correspondiente a la función y sus primeras derivadas. El objetivo de este artículo es indicar las posibilidades prácticas que surgen del uso de una familia jerarquizada de este tipo de elementos. La discusión se restringe a los elementos triangulares, que representan formas simples y suficientemente versátiles para su aplicación a las situaciones de máxima generalidad de flexión de placas.

## 2. Hiperelementos triangulares

Las dos primeras técnicas —empleo de polinomios a trozos o uso de funciones racionales correctoras— citadas anteriormente para la obtención de elementos que aseguren la continuidad de la flecha ( $w$ ) y de la derivada normal ( $\partial w/\partial n$ ) a los lados entre elementos, (elementos de clase  $C^1$ ), implican una discontinuidad de las curvaturas en los vértices del elemento. Por otra parte, en el caso de elementos triangulares, si se adopta como vector de incógnitas en los vértices  $\left( w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)$ , cuyas componentes son la flecha y sus primeras y segundas derivadas, se deducen los siguientes resultados que se refieren a la expresión de la flecha  $w$ , supuesto un polinomio de grado  $N$  en el dominio del elemento:

El número de incógnitas básicas o parámetros disponibles es igual al número de coeficientes del polinomio completo de grado  $N$  con dos variables independientes, es decir a:

$$\frac{(N + 1)(N + 2)}{2}$$

Si el elemento es conforme, a lo largo de cada lado del elemento triangular debe existir continuidad de la flecha,  $w$ , y de su derivada normal al lado,  $\partial w/\partial n$ . En este caso, la expresión

polinómica de  $w$  a lo largo del lado es de grado  $N$  y estará determinada por  $N + 1$  coeficientes. Análogamente,  $\partial w / \partial n$  constituye un polinomio de grado  $N - 1$  que exige para su completa especificación  $N$  coeficientes. Estas determinaciones implican que de la igualdad de las incógnitas básicas de cálculo existentes en los nudos situados en el lado común a dos triángulos contiguos, se deduce una expresión única e idéntica de la variación de  $w$  o  $\partial w / \partial n$  según el caso.

Con respecto a la flecha, se dispone inicialmente de los tres grados de libertad  $\left( w, \frac{\partial w}{\partial t}, \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right)$  flecha, pendiente y curvatura en la dirección del lado común, que existen en cada vértice del lado. Por lo tanto el número de parámetros adicionales necesarios por lado son  $N + 1 - 6 = N - 5$ .

Por otra parte, con relación a la derivada normal de la flecha, se dispone, análogamente al caso anterior, en cada uno de los vértices del lado común, de los dos grados de libertad  $\left( \frac{\partial w}{\partial n}, \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right) \right)$  pendiente normal y la derivada de ésta respecto a la dirección del lado. Al ser un polinomio de grado  $N - 1$ , el número de parámetros extra necesarios por lado es  $N - 6$ .

Así pues, el número de parámetros o grados de libertad precisos para la construcción de hiperelementos conformes, teniendo en cuenta los 18 situados en los vértices, (\*) es:

$$3(N - 5 + N - 6) + 18 = 3(2N - 3)$$

Se obtiene así como resumen la tabla 1. De una inspección se deduce que no es posible formular con polinomios de grado menor que 5 estos hiperelementos, pues son necesarios 18 parámetros como mínimo (seis grados de libertad por vértice) y el polinomio cuártico completo sólo dispone de 15 coeficientes.

TABLA 1

| Polinomio | N | Parámetros necesarios | Parámetros disponibles |
|-----------|---|-----------------------|------------------------|
| Quíntico  | 5 | 21                    | 21                     |
| Séxtico   | 6 | 27                    | 28                     |
| Séptimo   | 7 | 33                    | 36                     |
| Octavo    | 8 | 39                    | 45                     |
| Noveno    | 9 | 45                    | 55                     |

Se comprueba asimismo que el hiperelemento más sencillo corresponde a la variación de la flecha como un polinomio quíntico completo (figura 1-a). La expresión de las funciones de forma ha sido obtenida en (8).

Para los restantes elementos de orden superior a éste, es necesario introducir grados de

Nota (\*) Se supone que no existe dirección ni lado preferente en el triángulo siendo iguales los grados de libertad situados en cada lado del triángulo.

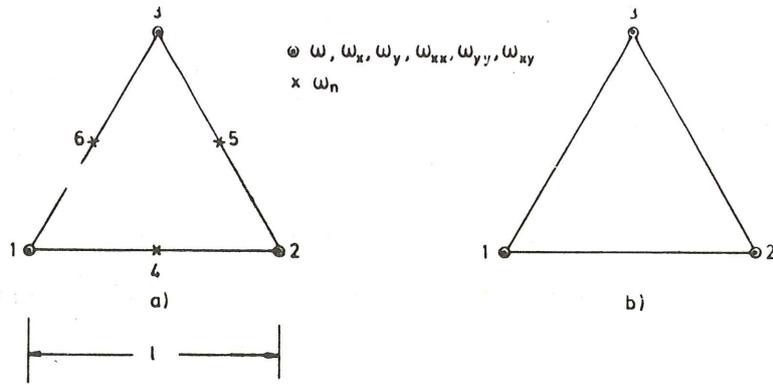


Fig. 1. Hiper elementos con aproximación polinómica de 5º grado.

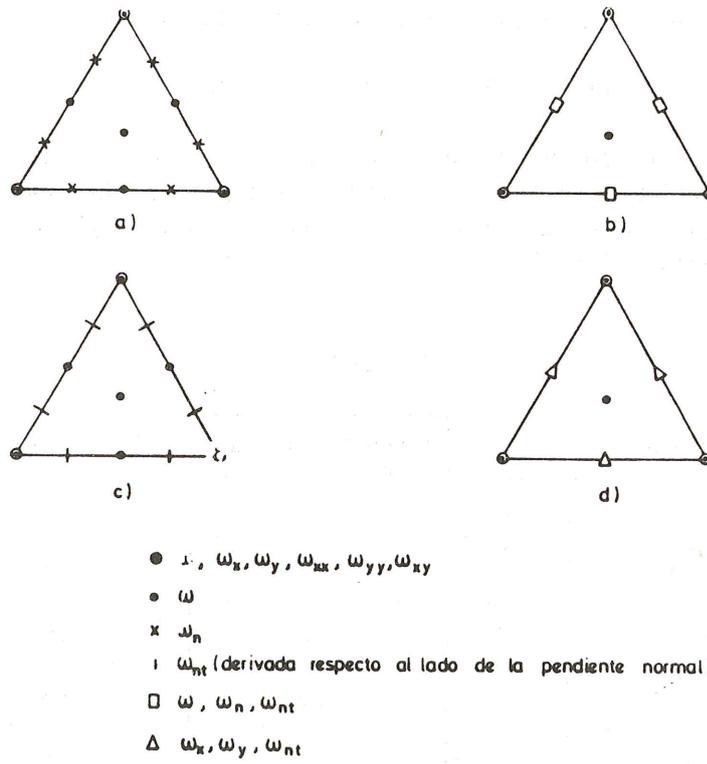
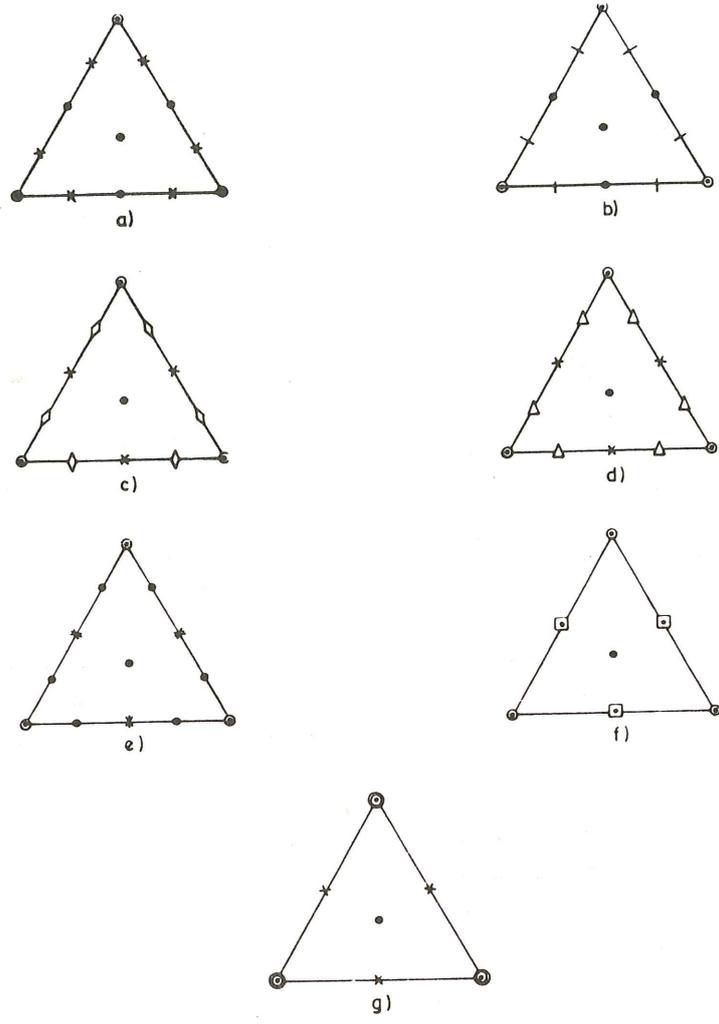
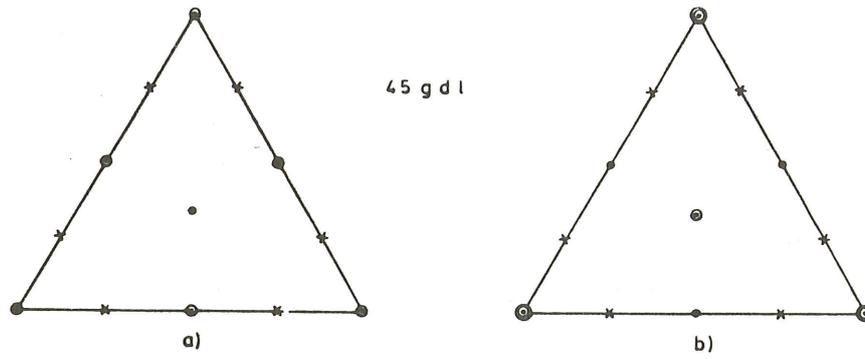


Fig. 2. Hiper elementos con aproximación polinómica de 6º grado.



- $\omega$
- ×  $\omega_n$
- $\omega, \omega_x, \omega_y$
- ◊  $\omega_x, \omega_y$
- |  $\omega_{nt}$
- △  $\omega_n, \omega_{nt}$
- ⊗  $\omega_n, \omega_{nt}, \omega_{ntt}$
- ◻  $\omega, \omega_x, \omega_y, \omega_{nt}, \omega_{ntt}$
- ⊙  $\omega, \omega_x, \omega_y, \omega_{xx}, \omega_{yy}, \omega_{xy}, \omega_{xxx}, \omega_{yyy}, \omega_{xxy}, \omega_{yyx}$
- ⊖  $\omega, \omega_x, \omega_y, \omega_{xx}, \omega_{yy}, \omega_{xy}$

Fig. 3. Hiper elementos de 7<sup>o</sup> orden.

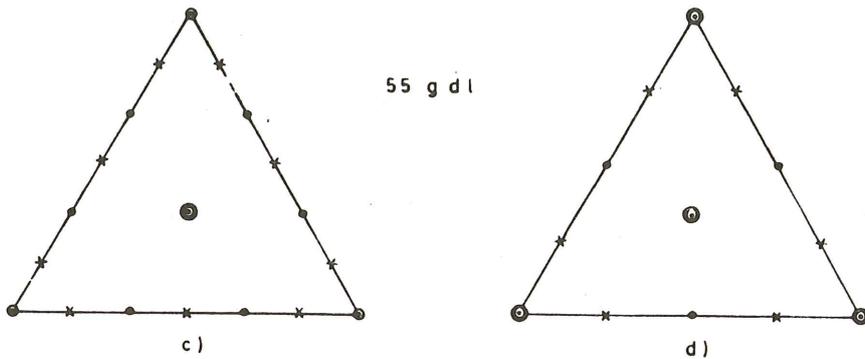


45 g d l

a)

b)

Hiperelementos de orden 8



55 g d l

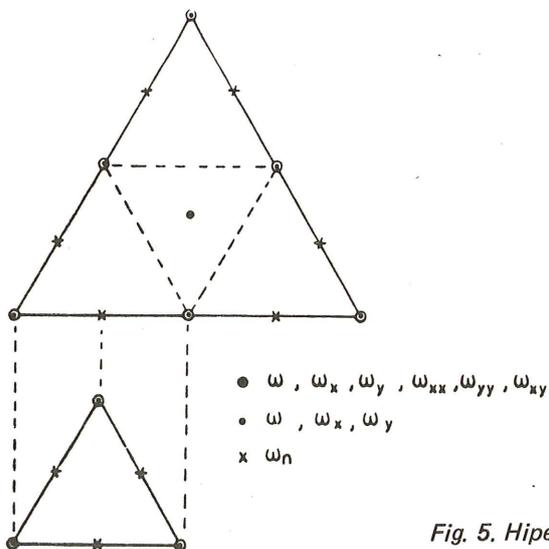
c)

d)

Hiperelementos de orden 9

- ⊙  $\omega, \omega_x, \omega_y, \omega_{xx}, \omega_{yy}, \omega_{xy}, \omega_{xxx}, \omega_{yyy}, \omega_{xxy}, \omega_{yyx}$
- ⊖  $\omega, \omega_x, \omega_y, \omega_{xx}, \omega_{yy}, \omega_{xy}$
- $\omega, \omega_x, \omega_y$
- x  $\omega_n$
- $\omega$

Fig. 4. Hiperelementos de orden superior.



- $\omega, \omega_x, \omega_y, \omega_{xx}, \omega_{yy}, \omega_{xy}$
- $\omega, \omega_x, \omega_y$
- x  $\omega_n$

Fig. 5. Hiperelemento compuesto.

libertad interiores, ya que se dispone de más parámetros de los precisos. En las figs. 2, 3, 4, 5 se representan algunos de los posibles hiperelementos, correspondientes a variaciones de la flecha según polinomios de grado 6, 7, 8 y 9 respectivamente. Es interesante observar el elemento de grado 8 de la figura 5, que equivale a cuatro quinticos (figura 1) y que por otra parte, se estima conducirá a mejores resultados, al ser capaz de aproximar la función exacta de interpolación del elemento por un polinomio de grado octavo, en lugar de por cuatro polinomios (a trozos) de quinto grado.

### 3. Familia jerárquica de hiperelementos

Los hiperelementos triangulares comentados pueden representarse de un modo conveniente para su identificación en una librería de elementos finitos, mediante una matriz  $\underline{A}$  cuyos elementos indican el número de veces que aparece un grado de libertad, es decir:

$$\underline{A} = \{a_{ij}\}$$

de dimensión  $3 \times (S(M+1) - 1)$ . En donde  $S(M) = 1 + \frac{M(M+1)}{2}$  y  $M$  el orden máximo de la derivada utilizada como parámetro básico en el elemento. Las columnas de la matriz representan los grados de libertad sucesivos:

$$(w, w_t, w_n, w_{tt}, w_{tn}, w_{nn}, w_{ttt}, w_{ttn}, w_{tnn}, w_{nnn}, \dots)$$

En general la columna "j" representa una derivada de orden  $k$ , siendo  $k$  el mayor número que satisface  $m = M - S(k+1) \geq 0$ , más concretamente, corresponde al término:

$$\frac{\partial^k w}{\partial t^{k-m} \partial n^m} \quad (*)$$

La primera y última fila de la matriz se refieren respectivamente a los vértices y nudos interiores del triángulo respectivamente. En general se supone que solo existe un nudo interior situado en el centro de gravedad del triángulo.

La fila intermedia corresponde a los nudos situados a lo largo del lado. Cada término de la fila indica el número de veces que un grado de libertad aparece en un lado.

Se comprende que se puedan generar distintos hiperelementos trasladando grados de libertad de la columna  $w_n$  a otra columna cualquiera correspondiente a sus derivadas respecto de  $t$  ( $w_{nt}, w_{ntt}, \dots$ ) o viceversa. Por otra parte es posible considerar los grados de libertad interiores en cualquier columna. Todos los elementos así obtenidos se suponen equivalentes a efectos de su comportamiento numérico.

El número de nudos realmente distintos, es decir, con grados de libertad no exactamente iguales, no está en principio, mediante esta representación, unívocamente definido. Se podrían disponer varias filas en la matriz —una por cada conjunto de nudos idénticos— con

(\*) Nota: En los vértices y nudo interior,  $t$  y  $n$  representan los dos ejes  $x$  e  $y$  generales. En los restantes nudos constituyen la dirección del lado y su normal. En general, si en un nudo existen todas las derivadas de un cierto orden  $k$  de la flecha  $w$ , éstas pueden sustituirse por las derivadas del mismo orden pero referidas a los ejes generales  $x$  e  $y$  que normalmente son más cómodos para el cálculo.

objeto de obtener una definición completa, pero se ha conservado la indicada por considerar que los posibles distintos elementos que genera una matriz son equivalentes a efectos numéricos.

En la disposición de los nudos en cada lado se conserva la simetría. A estos efectos si existen  $\bar{N}$  nudos agrupados en las distintas clases según los grados de libertad y es  $N_k$  el número de nudos pertenecientes a la clase  $k$ , se puede escribir:

$$\bar{N} = \sum_{k=1}^K N_k$$

Se divide el lado en  $\bar{N} + 1$  partes iguales y se disponen los  $N_k$  nudos simétricamente respecto al punto medio del lado. Si existen dos clases con un número impar de nudos cada una, se procurará, al menos, guardar la simetría general, para que no existan lados preferentes. Si ello no es posible, se intentará conservar la simetría rotativa, según se indican en la figura 6.

En la figura 7 se indican las representaciones matriciales de los hiperelementos de orden 5, 6, 7, 8 y 9 de las figuras 2 a 5.

Es fácil mostrar que los elementos de cada matriz, representando un hiperelemento conforme de orden  $N$  (grado del polinomio de desarrollo de la flecha), satisfacen las siguientes condiciones:

$$\sum_{i=1}^{S(M+1)-1} (3 a_{1i} + 3 a_{2i} + a_{3i}) = S(N+1) - 1 \quad (1)$$

$$\sum_{i=0}^M [2 a_{1S(i)} + a_{2S(i)}] = N + 1 \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^M [2 a_{1(S(i)+1)} + a_{2(S(i)+1)}] = N \quad (3)$$

$$\text{Si } a_{1i} = 1, \text{ entonces } a_{1m} = 1, \text{ con } (s(i) + 1) < i < S(j) - 1, \\ (s(j) + 1) < m < S(j) - 1. \quad (4)$$

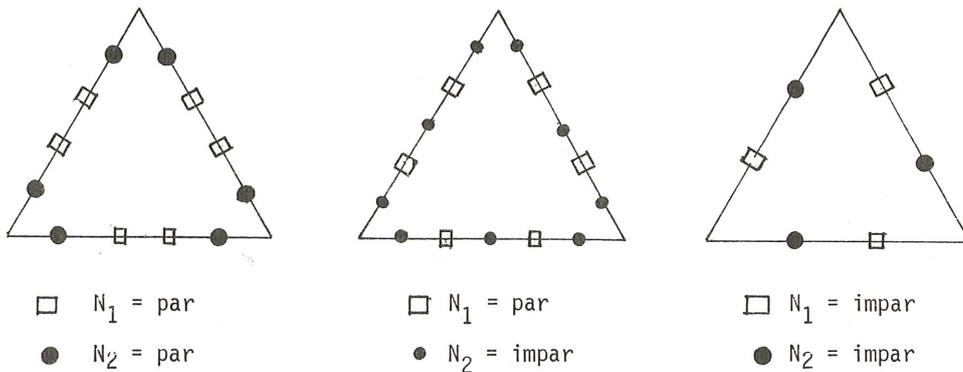


Fig. 6. Disposición de los nudos en un lado.



La extensión de estas fórmulas a triángulos con lados preferentes, es decir, con grados de libertad distintos en sus lados, es inmediata. Bastaría incrementar el número de filas intermedias a tres. El uso de este tipo de triángulos puede ser interesante en el estudio de elementos de transición, como se indicará más adelante.

#### 4. Obtención de la familia de hiper-elementos

Si se adopta como aproximación de la flecha  $w$  un polinomio completo de grado  $N$ , en el interior del elemento se tiene, en coordenadas triangulares ( $L_1, L_2, L_3$ ) o naturales del triángulo:

$$w = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \sum_{k=0}^N \alpha_{ijk} L_1^i L_2^j L_3^k \quad \text{con } i + j + k = N \quad (5)$$

El número de coeficientes  $\alpha_{ijk}$  es  $S(N+1) - 1 = \frac{(N+1)(N+2)}{2}$

A partir de la matriz  $\underline{A}$  de definición del elemento, se pueden numerar los grados de libertad considerados. Los nudos situados en cada lado se dispondrán en número mínimo y de un modo simétrico como se ha comentado.

Sea  $\underline{U}$  el vector cuyas componentes representan los valores de los  $S(N+1) - 1$  grados de libertad básicos del elemento. Si se considera la fórmula (5) se puede expresar este vector de incógnitas básicas  $\underline{U}$  en función de los coeficientes  $\alpha_{ijk}$ , en la forma compacta:

$$\underline{U} = \underline{C} \underline{\alpha} \quad (6)$$

con:

$\underline{\alpha}$  vector que contiene todos los  $\alpha_{ijk}$  anteriores

$\underline{U}$  vector de grados de libertad en desplazamientos

$\underline{C}$  matriz cuadrada de dimensiones  $(S(N+1) - 1) \times (S(N+1) - 1)$  cuyos coeficientes son expresiones algebraicas de las características geométricas del triángulo:  $a_i, b_i, c_i, h_i, L_i, \lambda_i$  y  $\mu_i$  (figuras 8 y 9).

Las funciones de forma se obtienen según el proceso "standard" siguiente:

La ecuación (5) puede escribirse en la forma:

$$w = \underline{L} \underline{\alpha} \quad (7)$$

con:

$\underline{L}$  vector cuyas componentes son los  $S(N+1) - 1$  términos potenciales del polinomio completo de grado  $N$  expresado en coordenadas triangulares.

Por otra parte de la ecuación (6) se deduce:

$$\underline{\alpha} = \underline{C}^{-1} \underline{U}$$

y por lo tanto (7) se convierte en:

$$w = \underline{L} \underline{C}^{-1} \underline{U} = \underline{N} \underline{U}$$

$$L_1 = \frac{\text{Area (P23)}}{\text{Area (123)}} = \frac{A_1}{A}$$

$$a_i = x_k - x_j$$

$$b_i = y_j - y_k$$

$$c_i = y_k x_j - x_k y_j$$

$$l_i = \sqrt{a_i^2 + b_i^2}$$

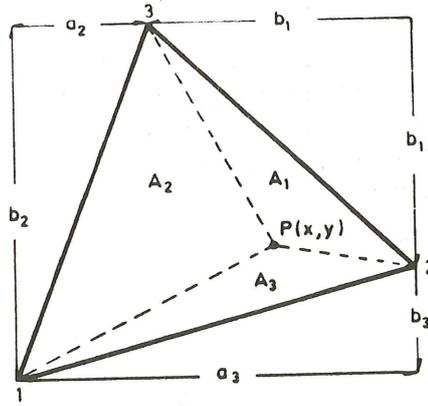
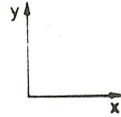


Fig. 8.

$$h_i = \frac{2A}{l_i}$$

$$s_i = a_j b_k + a_k b_j$$

$$r_i = -(a_j a_k + b_j b_k) / l_i$$

$$\lambda_i = r_i / l_i$$

$$\mu_i = 1 - \lambda_i$$

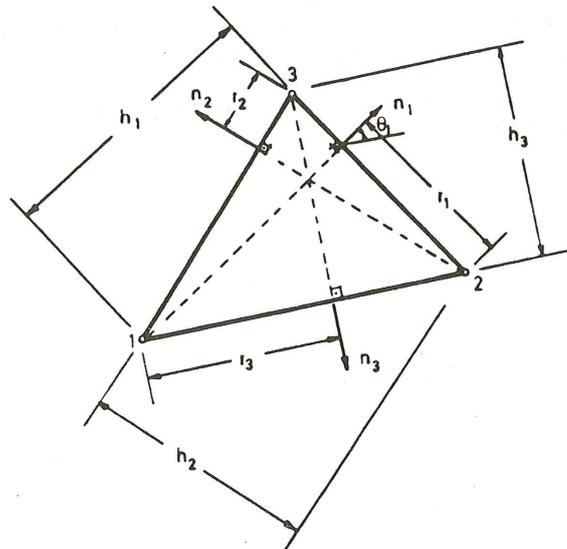


Fig. 9.

Las funciones  $\underline{N} = \{N_1, N_2, \dots, N_{S(N+1)-1}\}$  se obtienen simplemente de la igualdad:

$$\underline{N} = \underline{L} \underline{C}^{-1} \quad (8)$$

La dificultad máxima que aparece en la obtención de las funciones de forma, reside en la inversión de la matriz  $\underline{C}^{-1}$ . Esta puede realizarse numéricamente, de un modo simple, para un triángulo de dimensiones específicas, o bien, en un caso genérico, es preciso llevar a cabo esta inversión algebraicamente, lo que representa una formidable tarea. En este caso, tal vez sea útil considerar la posibilidad de utilizar programas de computador que efectúen operaciones algebraicas (entre expresiones literales), lo que puede suponer una considerable ayuda en el cálculo e incluso la automatización de la matriz  $\underline{C}^{-1}$ .

Una vez deducidas las funciones de forma, la determinación de la matriz de rigidez del elemento y de las cargas equivalentes en los nudos es una tarea totalmente automática y puede ser llevada a cabo con el computador. No obstante puede representar un tiempo de cálculo importante si se evalúan las integrales exactamente. Por ello, es conveniente utilizar una integración numérica de Gauss, que permite reducir el tiempo de computación en más de un orden decimal.

Como ejemplo de aplicación de la familia de hiperelementos, se estudia en (8) el definido por la matriz:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

que se muestra en la figura 3-a con los grados de libertad ordenados.

Algunas de las funciones de forma de este elemento se representan en las figuras 10 a 18. Las restantes funciones de interpolación se deducen de las anteriores por simetría circular. En la figura 19 se muestran los autovalores y autovectores propios de la matriz de rigidez obtenida mediante integración exacta. Se comprueban los tres movimientos de sólido rígido correspondientes a los autovalores nulos.

De forma semejante se ha procedido en (8) con el hiperelemento de la figura (3-g) cuya matriz de definición es:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Algunas de las funciones de forma de este elemento se muestran en las figuras 20-26, siendo inmediata la deducción de las restantes, como se indicó anteriormente. El análisis espectral de su matriz de rigidez, calculada mediante integración exacta, se indica en la figura 27.

## 5. Familias derivadas de hiperelementos

Como es conocido, los grados de libertad interiores se pueden eliminar, previamente al ensamblaje de la matriz de rigidez del elemento, mediante la técnica de condensación estática. De esta forma, se obtienen hiperelementos con grados de libertad únicamente en su contorno.

Existe otra posibilidad de eliminación de grados de libertad, consistente en la reducción del orden de la curva de contacto entre elementos.

Se consigue esta reducción del grado imponiendo condiciones entre los diferentes grados de libertad, que permiten expresar unos g.d.l. subordinados en función de otros principales. Estas condiciones posteriormente pueden ser utilizadas para obtener unas nuevas funciones de forma, correspondientes a los g.d.l. principales.

Por ejemplo, el hiperelemento quíntico de la figura 1-a puede reducirse al hiperelemento quíntico más sencillo de la figura 1-b, si se fuerza a que la derivada normal ( $\partial w / \partial n$ )

varíe a lo largo de cada lado según una cúbica, en lugar de una cuártica. De este modo, se pueden expresar los g.d.l. en los puntos medios de los lados como combinación lineal de los restantes g.d.l.

Así, se escribe:

$$(w_n)_4 = \frac{1}{2} \{(w_n)_1 + (w_n)_2\} + \frac{\ell_1}{8} \{(w_{tn})_1 - (w_{tn})_2\} \quad (9)$$

y análogamente con  $(w_n)_5$  y  $(w_n)_6$ .

Si se procede con el hiperelemento de 7° orden ya comentado de la figura 3-a se puede reducir a la situación de la figura 28; basta imponer la condición de que la pendiente normal se reduzca de una curva de 6° grado a otra de cuarto. Para ello se debe cumplir, para los grados de libertad de los nudos 7 y 8:

$$(w_n)_7 = \frac{1}{128} \{72 (w_n)_1 - 16 (w_n)_2 + 72 (w_n)_4 + 9\ell_3 (w_{nt})_1 + 3\ell_3 (w_{nt})_2\} \quad (10)$$

$$(w_n)_8 = \frac{1}{128} \{-16 (w_n)_1 + 72 (w_n)_2 + 72 (w_n)_4 - 3\ell_3 (w_{nt})_1 - 9\ell_3 (w_{nt})_2\}$$

y análogas relaciones para los nudos 9, 10, 11 y 12.

El hiperelemento de la figura 3-g puede ser transformado en el más simple de la figura 29, mediante la utilización de las relaciones:

$$(w_n)_4 = \frac{(w_n)_1 + (w_n)_2}{2} + \frac{5}{32} \ell_3 \{(w_{nt})_1 - (w_{nt})_2\} + \frac{\ell_3^2}{64} \{(w_{ntt})_1 + (w_{ntt})_2\} \quad (11)$$

y análogas para los nudos 5 y 6. Estas ecuaciones se deducen al imponer variación quintica para la derivada normal de la flecha a lo largo de los lados.

Las matrices de rigidez de los hiperelementos derivados, obtenidos mediante esta reducción, se deducen a partir de las nuevas funciones de forma, según el procedimiento "standard". Se comprende ahora que el desarrollo supuesto para la flecha ya no constituye un polinomio completo de orden N (5 y 7 en los ejemplos), ya que existe entre sus coeficientes un conjunto de relaciones lineales. Por lo tanto, si bien el elemento continúa siendo conforme, su orden de convergencia disminuye de N al orden máximo del polinomio completo contenido en el desarrollo de la flecha.

## 6. Resultados numéricos

Si bien no existe una importante experiencia en el uso sistemático de la familia de hiperelementos descritos, sí se conoce en detalle el comportamiento numérico de los dos hiperelementos de orden séptimo que se han comentado. Se han estudiado ambos elementos en numerosos casos, con objeto de comprobar la bondad de su actuación con relación a distintas variables: integración exacta y numérica (\*) (número de puntos de integración), influencia de las condiciones de contorno, relación entre lados y oblicuidad de los elementos, tipos de cargas, etc. La extensiva experimentación numérica llevada a cabo permite asegurar

(\*) Como las fórmulas existentes de integración numérica de Gauss, referidas a triángulos, se encuentran limitadas a órdenes bajos O ( $h^7$ ), se ha ensayado la técnica de subdivisión del triángulo en cuatro de igual área y extender la integración numérica a cada uno de los subtriángulos.

que con estos hiperelementos se alcanza una exactitud de todos los resultados del cálculo de placas, excelente incluso con discretizaciones muy groseras.

A efectos ilustrativos se comentan los resultados obtenidos en el cálculo, mediante la utilización del elemento de la figura 3-a, en un ejemplo típico: placa cuadrada de lado  $a$ , simplemente apoyada en su contorno, bajo la actuación de una carga uniforme de intensidad  $q$ . (Se supone un coeficiente de Poisson  $\nu = 0,3$ ). Se consideran las tres discretizaciones de la figura 30.

Los resultados obtenidos se comparan con los exactos dados por Timoshenko (4) en la tabla 2.

TABLA 2

|   | Malla mínima | Malla 1 x 1 | Malla 2 x 2 | Exacto   |                     |
|---|--------------|-------------|-------------|----------|---------------------|
| Flecha en el centro                             | 0,0040705    | 0,0040624   | 0,0040624   | 0,004062 | $x \frac{q a^4}{D}$ |
| Momentos centrales<br>$M_x = M_y$               | —            | 0,048329    | 0,047901    | 0,0479   | $x q a^2$           |
| Reacciones de esquina                           | 0,064        | 0,06484     | 0,06493     | 0,065    | $x q a^2$           |
| Cortantes en el centro<br>del lado              | —            | -0,34377    | -0,3388     | -0,338   | $x q a$             |
| Reacciones de Kirchoff<br>en el centro del lado | —            | -0,42548    | -0,4228     | -0,420   | $x q a$             |

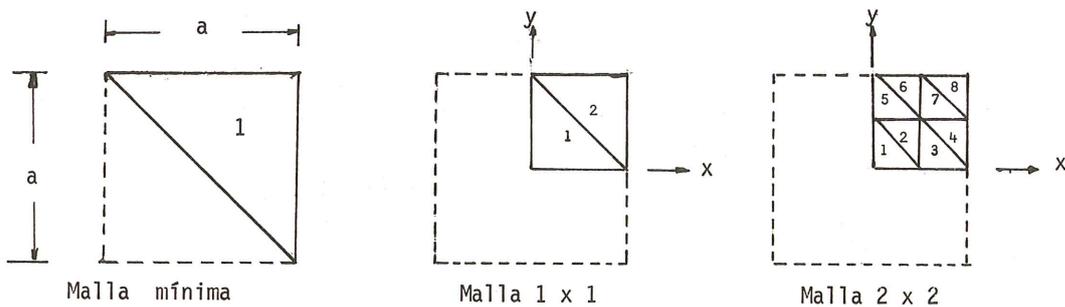


Fig. 30.

Se observará que para la discretización de la malla 2 x 2 se obtiene un ajuste absoluto con los valores exactos, siendo de destacar la aproximación obtenida para los esfuerzos cortantes, difícil de lograr utilizando otros tipos de elementos. Como se comprende, no existe en los resultados dispersión alrededor de un nudo a excepción de los cortantes, si bien, entonces, la dispersión es pequeña, lo que indica la bondad del elemento. Se ha procedido en este caso a la técnica de promedio alrededor de cada nudo.

Los resultados anteriores se han obtenido con la matriz de rigidez evaluada mediante integración exacta. La influencia del número de puntos de Gauss en la integración numérica se resume en la tabla 3. La integración ampliada se refiere en dicha tabla a la subdivisión del elemento en cuatro triángulos de igual área, uniendo los puntos medios de sus lados.

Por último, y con objeto de comprobar no sólo la velocidad de convergencia del hiper-elemento, sino su eficacia computacional, se representa en las figuras 31 y 32 un análisis comparativo del error que se obtiene en función del número de grados de libertad utilizados en el cálculo, con respecto a otros elementos finitos. Los resultados comparados son en desplazamientos y momentos flectores. Los valores de esfuerzos cortantes no suelen ser representados en la literatura, ya que normalmente se obtienen errores muy elevados, por ello en la figura 33 sólo se representa el porcentaje de error y la dispersión de éstos y los valores de las reacciones.

## 7. Aplicación de las familias de hiper-elementos

En el cálculo mediante el MEF existen dos posibilidades de refinamiento: a) una mayor discretización de la malla. b) Incremento del orden del polinomio de interpolación del elemento.

Esta segunda posibilidad todavía no ha sido, en nuestra opinión, totalmente explotada en la práctica y presenta indudables ventajas computacionales. En efecto, es posible, conservando una configuración inicial de la malla en elementos finitos, utilizar polinomios de interpolación de órdenes sucesivamente crecientes, bien en toda o parte de la estructura. De esta forma, si los elementos son conformes —como las familias aquí comentadas—, los resultados que se obtienen son monotónicamente convergentes. Por otra parte, en comparación con el refinamiento de la malla, que implica saltos importantes del número de grados de libertad, el uso de familias jerárquicas presenta la ventaja de un más suave incremento de este número de g.d.l.

Del estudio comparativo con otros elementos, se ha constatado, en el apartado anterior, que el incremento del orden del polinomio de interpolación es computacionalmente más eficiente —medido en exactitud de todos los resultados— que el mero refinamiento de la malla de elementos simples. Evidentemente, en las situaciones de estructuras con contorno irregular, se hace preciso captar estas características geométricas mediante un número elevado de elementos. A este respecto, la conjunción de elementos simples —como el LCCT-12— situados en el contorno con pocos hiper-elementos en la zona central de la estructura parece constituir una disposición ideal. Naturalmente, en este caso la librería de hiper-elementos jerarquizados debería incluir elementos de transición, que pueden ser obtenidos directamente o bien de los existentes mediante reducción de g.d.l. en uno o dos de los lados del hiper-elemento triangular.

Finalmente, existen situaciones en donde el conocimiento adecuado de resultados que implican un elevado orden de derivación de la flecha —como los esfuerzos cortantes— exigen necesariamente el uso de hiper-elementos de orden superior.

La contrapartida a la utilización de hiper-elementos reside en el elevado grado de continuidad que exige a la solución, particularmente en estructuras con saltos bruscos de sus características elásticas o espesor. Existen varias técnicas para obviar estos inconvenientes (8) por lo que no se repiten aquí. Conviene, para terminar, tener presente la importancia que en la bondad de los resultados tiene el modo de introducción de las condiciones de contorno (g.d.l. esenciales y naturales), siendo preciso adquirir un cierto grado de conocimiento con este tipo de familias de hiper-elementos.

**TABLA 3**  
**Placa apoyada sometida a carga uniforme q**  
**Influencia de los puntos de integración numérica**

| Precisión                       | Puntos de integr. | $x qa^4/D$<br>Flecha en centro $\omega_1$ | $x qa^2$<br>Momentos centrales<br>$(M_x)_1 = (M_y)_1$ | $x qa^2$<br>Reacción de esquina<br>$R = 2 (M_{xy})_9$ | $x qa$<br>Cortante en el punto medio del lado $(Q_x)_3$ | $x qa$<br>Reacción en el punto medio del lado $(V_x)_3$ |
|---------------------------------|-------------------|---|---|---|---|---|
| 0 (h <sup>5</sup> )             | 9                 | 0,004280                                  | 0,01829   | 0,0796  | -4,3292*  | -4,7307*  |
| 0 (h <sup>6</sup> )             | 12                | 0,004062                                  | 0,04607   | 0,0654  | -0,3298*  | -0,4039*  |
| 0 (h <sup>7</sup> )             | 13                | 0,004062                                  | 0,04537   | 0,0634  | -0,1864*  | -0,2538*  |
| 0 (h <sup>5</sup> )<br>ampliada | 36                | 0,004062                                  | 0,04769   | 0,0653  | -0,3707   | -0,4575   |
| 0 (h <sup>6</sup> )<br>ampliada | 48                | 0,004062                                  | 0,04790   | 0,0649  | -0,3406   | -0,4228   |
| 0 (h <sup>7</sup> )<br>ampliada | 52                | 0,004062                                  | 0,04790   | 0,0649  | -0,3407   | -0,4228   |
| Rutina EXACT                    | Integr. exac.     | 0,004062                                  | 0,04790   | 0,0649  | -0,3406   | -0,4228   |
|                                 | Timoshenko        | 0,004062                                  | 0,0479  | 0,065   | -0,338  | -0,420  |

## 8. Conclusiones

La importancia del refinamiento en el MEF mediante el incremento de los órdenes de los polinomios que constituyen las funciones de forma, se resalta en comparación con el procedimiento habitual de subdivisión de la malla conservando el tipo de elementos. De esta forma, familias de superelementos pueden ser generadas con elementos de transición y conservadas en una librería de elementos de un programa general de elementos finitos. Se indican aquí, por su facilidad de obtención, algunos hiperelementos insertos en una posible familia jerárquica. Se comprueba, de la extensa experimentación numérica, la bondad y eficacia computacional que se consigue. En particular, los resultados que exigen un elevado grado de derivación, con sus inherentes ruidos numéricos, deben ser obtenidos mediante este tipo de superelementos si un cierto grado de exactitud se exige en el cálculo.

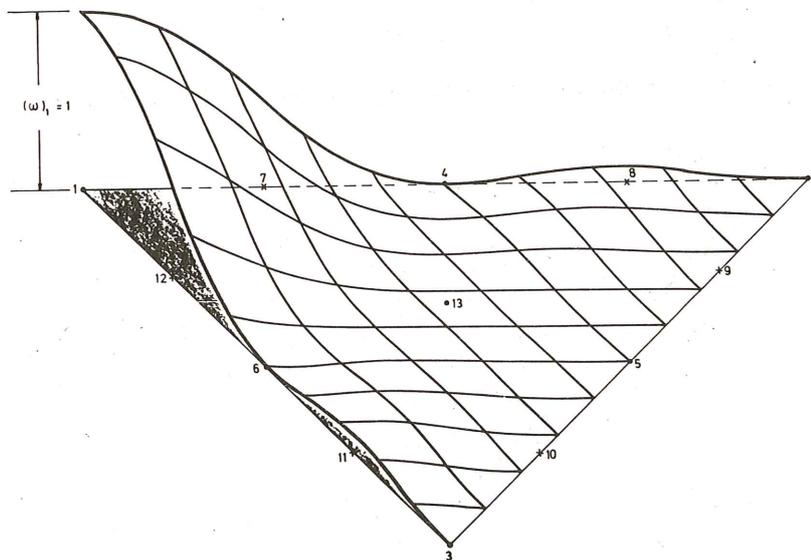
La influencia del número de puntos de integración numérica de la matriz de rigidez del elemento en el tiempo de ordenador es extraordinaria. De ahí se hace preciso obtener una extensión de las fórmulas actualmente publicadas. De esta forma se podría evaluar la integral directamente, sin necesidad de requerir una subdivisión del dominio triangular de integración, lo que, si bien eleva la exactitud, no incrementa el grado de aproximación, exigiendo un número menor de puntos.

Finalmente, las zonas regulares de la estructura —o repetitivas— podrían ser modeladas con un elemento único, idéntico en geometría, lo que permitiría una reducción adicional del cálculo, al no exigir más que la evaluación de la matriz de rigidez de este elemento único.

Las ideas anteriores son aplicables en principio a todo tipo de superelementos —elementos con funciones de interpolación de la flecha, polinomios completos de orden elevado— y no necesariamente a los hiper-elementos. Por lo tanto cabe esperar la extensión de las anteriores conclusiones a estos superelementos.

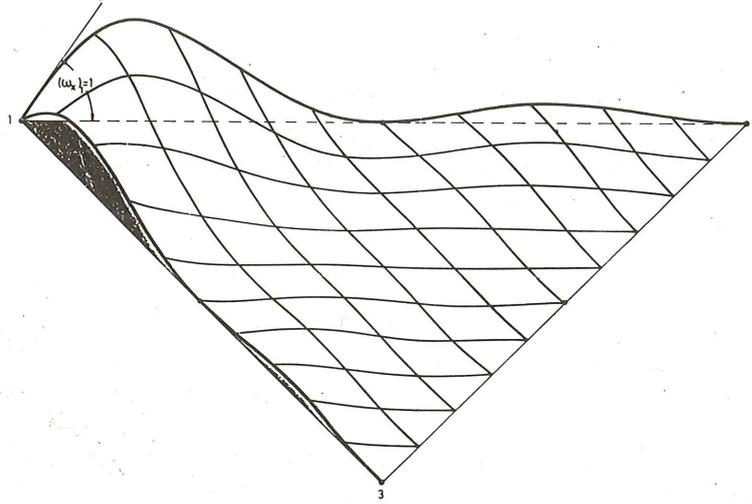
## 9. Referencias

1. M.J. Turner, R.W. Clough, H.C. Martin and L.J. Topp, "Stiffness and deflection analysis of complex structures". J. Aero. Sci. 23,805-24, 1956.
2. O.C. Zienkiewicz, "The Finite Element Method in Engineering Science, McGraw Hill C., Londres 1979.
3. T.H.H. Pian and P. Tong "Basis of finite element methods for solid continua" Int. J. Num. Meth. Eng. 1,3-28, 1969.
4. S. Timoshenko and S. Woinowsky-Krieger, Theory of Plates and Shells, McGraw-Hill 2nd.ed.1959.
5. B.M. Irons, "The patch test for engineers", Conf. Atlas Computing Center, March 1974, Harwell U. J.
6. B.M. Irons and J.K. Draper, "Inadequacy of nodal connections in a stiffness solution for plate bending" J.A.I.A.A., 3, 5, 1965.
7. A. Samartín, "Aplicación del Método de los Elementos Finitos al Análisis Estructural de Tableros de Puentes", Discurso de Inauguración del curso académico 1979-80, Universidad de Santander.
8. J. Díaz del Valle y A. Samartín, "Una contribución al estudio de hiper-elementos finitos en flexión de placas". Departamento de Análisis de Estructuras de la E.T.S. de Ingenieros de Caminos de Santander, 1980.



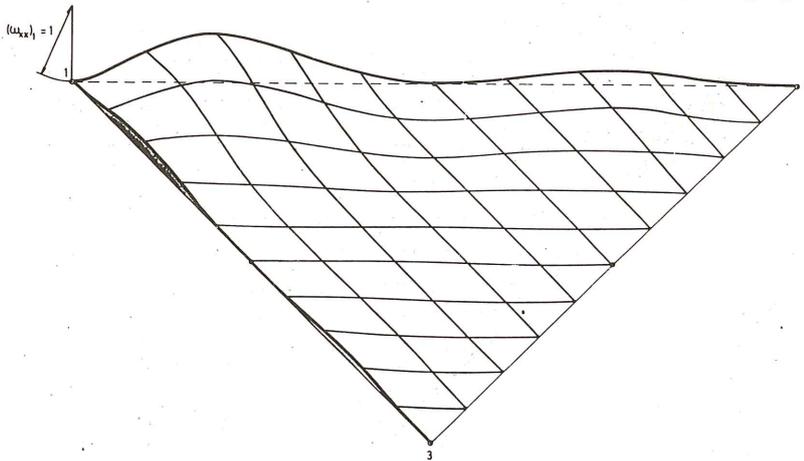
$$\begin{aligned}
 N_1 = & L_1^7 + 7L_1^6(L_2 + L_3) + 21(L_2 + L_3)^2 + 114(\lambda_2 L_3^3 + \mu_3 L_2^3)L_1^2 L_2 L_3 - \\
 & - L_1^4(67(L_2^3 + L_3^3) + L_2 L_3[201(\mu_2 L_3 + \lambda_3 L_2) - 105(\lambda_2 L_3 + \mu_3 L_2)]) + \\
 & + L_1^3\{38(L_2^4 + L_3^4) + L_2 L_3[152(\mu_2 L_3^2 + \lambda_3 L_2^2) - 268(\lambda_2 L_3^2 + \mu_3 L_2^2)]\} + \\
 & + L_1^2 L_2^2 L_3^2\{[192(\mu_2 + \lambda_3) - 5]L_1 + (192\mu_3 - 161)L_2 + (192\lambda_2 - 161)L_3\}
 \end{aligned}$$

Fig. 10. Función de forma asociada al grado de libertad  $U_1 \equiv (\omega)_1$



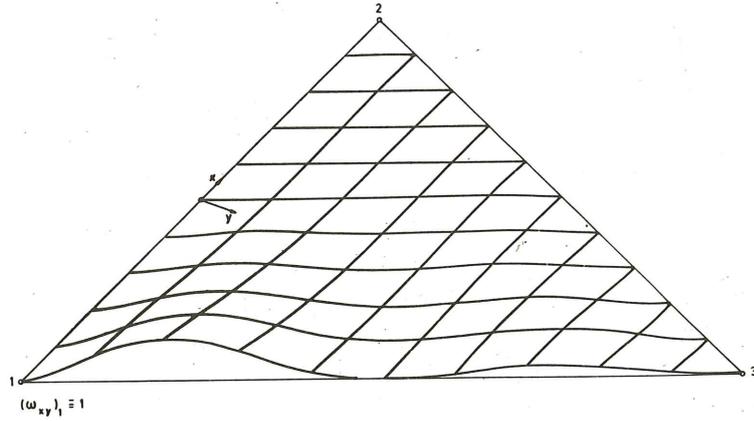
$$\begin{aligned}
 N_2 = & L_1^5 (a_3 L_2 - a_2 L_3) [L_1 + 6(L_2 + L_3)] + 15L_1^4 (a_2 L_3^3 - a_3 L_2^3) + 8L_1^3 (a_3 L_2^4 - a_2 L_3^4) + \\
 & + \frac{1}{9} L_1^4 L_2 L_3 [(364a_2 + 270a_3 - 311\lambda_3 a_3)L_2 - (364a_3 + 270a_2 - 311\mu_2 a_2)L_3] - \\
 & - \frac{1}{9} L_1^3 L_2 L_3 [(394a_2 + 540a_3 - 434\lambda_3 a_3)L_2^2 - (394a_3 + 540a_2 - 434\mu_2 a_2)L_3^2] + \\
 & + \frac{1}{9} L_1^2 L_2 L_3 [(216a_3 + 93a_2 - 123\lambda_3 a_3)L_2^3 - (216a_2 + 93a_3 - 123\mu_2 a_2)L_3^3] + \\
 & + \frac{1}{9} L_1^2 L_2^2 L_3^2 [172(a_3 - a_2)L_1 + (208a_2 + 99a_3)L_2 - (208a_3 + 99a_2)L_3 + \\
 & + 188[\lambda_3 a_3(L_1 - L_2) - \mu_2 a_2(L_1 - L_3)]]
 \end{aligned}$$

Fig. 11. Función de forma asociada al grado de libertad  $U_2 \equiv (\omega_x)_1$



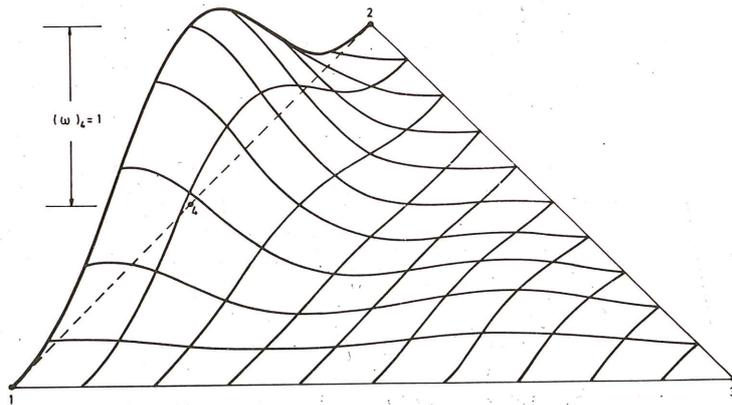
$$\begin{aligned}
 N_4 = & \frac{1}{2} L_1^5 (a_3 L_2 - a_2 L_3)^2 - L_1^4 (a_2^2 L_3^3 + a_3^2 L_2^3) + \frac{1}{2} L_1^3 (a_2^2 L_3^4 + a_3^2 L_2^4) + \\
 & + \frac{1}{6} L_1^4 L_2 L_3 [a_3 (15a_3 + 26a_2 - 7\lambda_3 a_3)L_2 + a_2 (15a_2 + 26a_3 - 7\mu_2 a_2)L_3] + \\
 & - \frac{1}{3} L_1^3 L_2 L_3 [a_3 (12a_3 + 13a_2 - 5\lambda_3 a_3)L_2^2 + a_2 (12a_2 + 13a_3 - 5\mu_2 a_2)L_3^2] - \\
 & - \frac{1}{3} L_1^2 L_2^2 L_3^2 [a_3^2 (3 - 2\lambda_3)(L_1 - L_2) + a_2^2 (3 - 2\mu_2)(L_1 - L_3) + a_2 a_3 (17L_1 - 7L_2 - 7L_3)] + \\
 & + \frac{1}{2} L_1^2 L_2 L_3 [a_3^2 (3 - \lambda_3)L_2^3 + a_2^2 (3 - \mu_2)L_3^3 + 2a_2 a_3 (L_2^2 + L_3^2)]
 \end{aligned}$$

Fig. 12. Función de forma asociada al grado de libertad  $U_4 \equiv (\omega_{xx})_1$



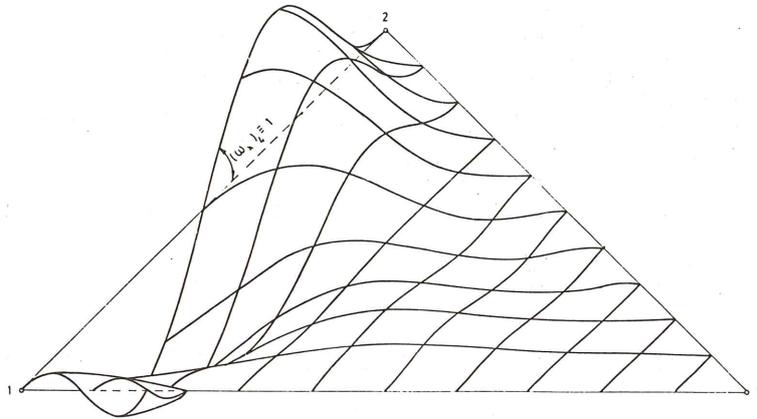
$$\begin{aligned}
 N_6 = & - L_1^5 (a_1 b_1 L_2^2 - s_1 L_2 L_3 + a_2 b_2 L_3^2) + 2L_1^4 (a_3 b_3 L_2^3 + a_2 b_2 L_3^3) - L_1^3 (a_3 b_3 L_2^4 + a_2 b_2 L_3^4) - \\
 & - \frac{1}{3} L_1^4 L_2 L_3 [(15a_3 b_3 + 13s_1 - 7\lambda_3 a_3 b_3)L_2 + (15a_2 b_2 + 13s_1 - 7\mu_2 a_2 b_2)L_3] + \\
 & + \frac{1}{3} L_1^3 L_2 L_3 [(24a_3 b_3 + 13s_1 - 10\lambda_3 a_3 b_3)L_2^2 + (24a_2 b_2 + 13s_1 - 10\mu_2 a_2 b_2)L_3^2] + \\
 & + \frac{1}{3} L_1^2 L_2^2 L_3^2 [2a_3 b_3 (3 - 2\lambda_3)(L_1 - L_2) + 2a_2 b_2 (3 - 2\mu_2)(L_1 - L_3) + s_1 (17L_1 - 7L_2 - 7L_3)] - \\
 & - L_1^2 L_2 L_3 [a_3 b_3 (3 - \lambda_3)L_2^3 + a_2 b_2 (3 - \mu_2)L_3^3 + s_1 (L_2^3 + L_3^3)]
 \end{aligned}$$

Fig. 13. Función de forma asociada al grado de libertad  $U_6 \equiv (\omega_{xy})_1$



$$\begin{aligned}
 N_{19} = & 64L_1^2 L_2^2 \{ (L_1 + L_2)L_1 L_2 + (3\mu_3 L_2^2 + 4L_1 L_2 + 3\lambda_3 L_1^2)L_3 - \\
 & - [ (7 + 6\lambda_3)L_1 + (7 + 6\mu_3)L_2 - 11L_3 ] L_3^2 \}
 \end{aligned}$$

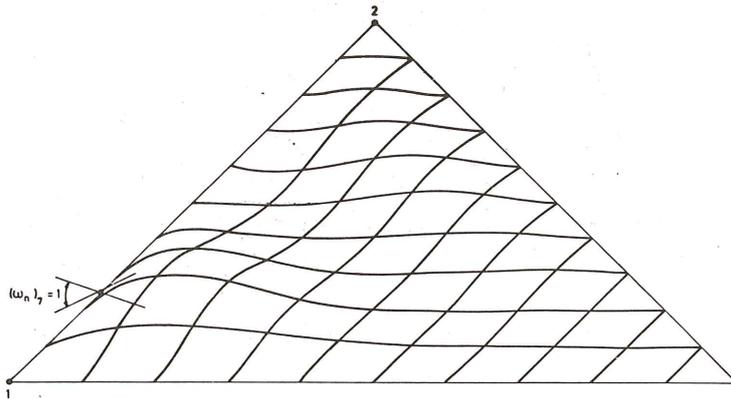
Fig. 14. Función de forma asociada al grado de libertad  $U_{19} \equiv (\omega)_4$



$$N_{20} = 16L_1^2 L_2^2 \{ 2a_3(L_2 - L_1)L_1L_2 + L_3^2 [ (4a_2 + 10a_3)L_1 + (4a_2 - 6a_3)L_2 - (4a_2 + 2a_3)L_3 ] +$$

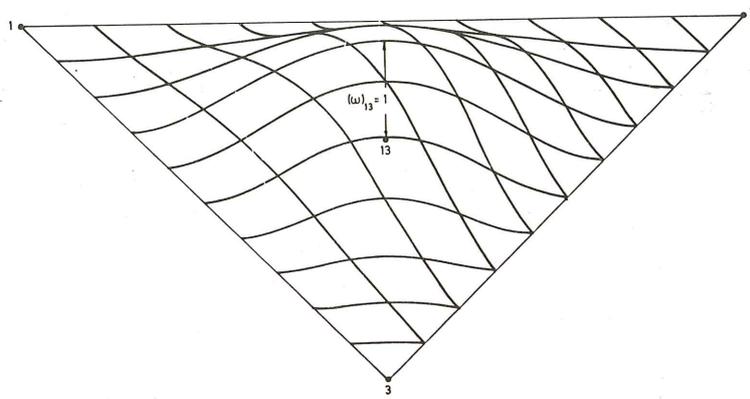
$$+ L_3 [ 3(a_3 + a_2 - \mu_3 a_3)L_2^2 - 2(a_3 + 3\mu_3 a_3 + 5a_2)L_1L_2 + 3(a_2 + \mu_3 a_3 - a_3)L_1^2 ] \}$$

Fig. 15. Función de forma asociada al grado de libertad  $U_{20} \equiv (\omega_x)_4$



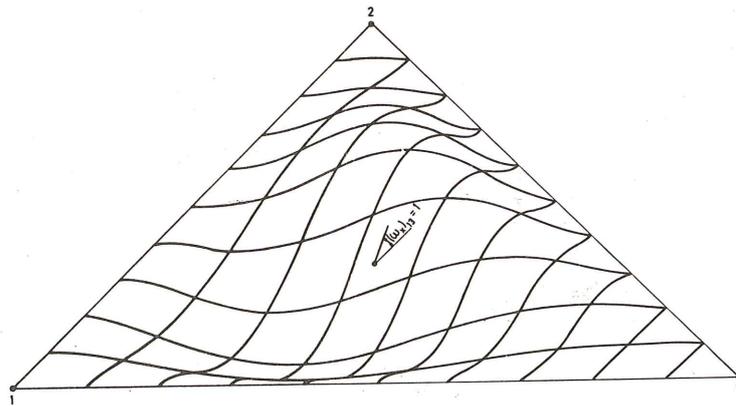
$$N_{28} = \frac{256}{9} h_3 \cdot L_1^2 L_2^2 L_3 [ (3L_1^2 - 4L_1L_2 + L_2^2) + 2L_3(L_2 - L_1) ]$$

Fig. 16. Función de forma asociada al grado de libertad  $U_{28} \equiv (\omega_n)_7$



$$N_{34} = 3^6 L_1^2 L_2^2 L_3^2$$

Fig. 17. Función de forma asociada al grado de libertad  $U_{34} \equiv (\omega)_{13}$



$$N_{35} = 3^5 L_1^2 L_2^2 L_3^2 [ (a_2 - a_3)L_1 + (a_3 - a_1)L_2 + (a_1 - a_2)L_3 ]$$

Fig. 18. Función de forma asociada al grado de libertad  $U_{35} = (\omega_x)_{13}$

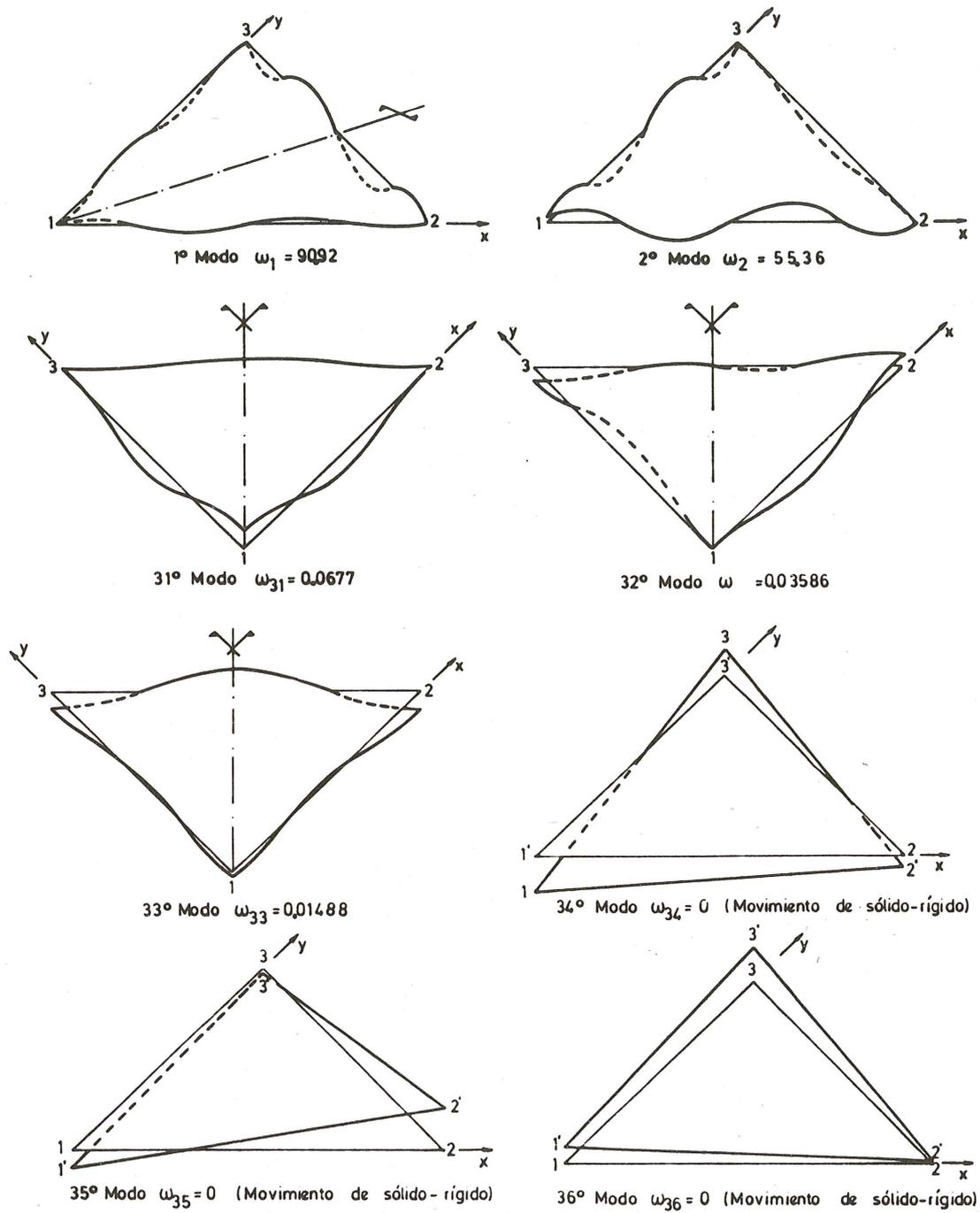
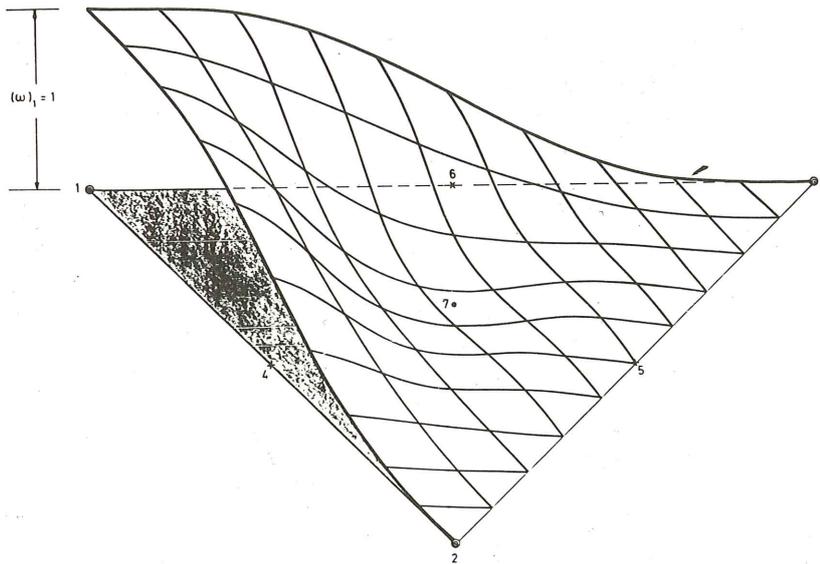
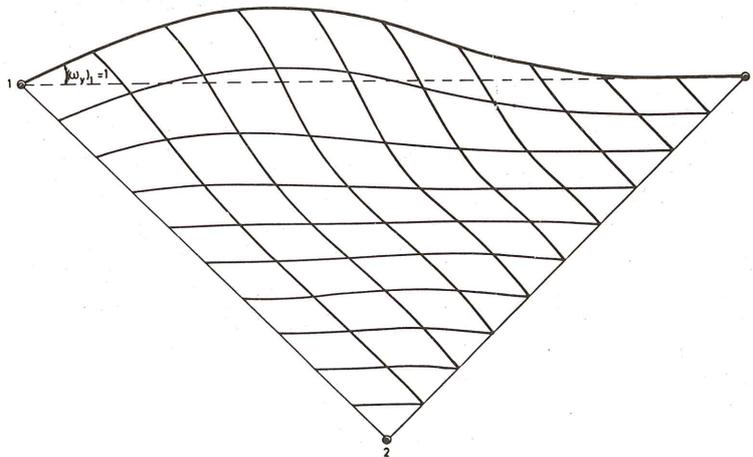


Fig. 19. Vectores propios de la matriz de rigidez del Hiper elemento tipo I.



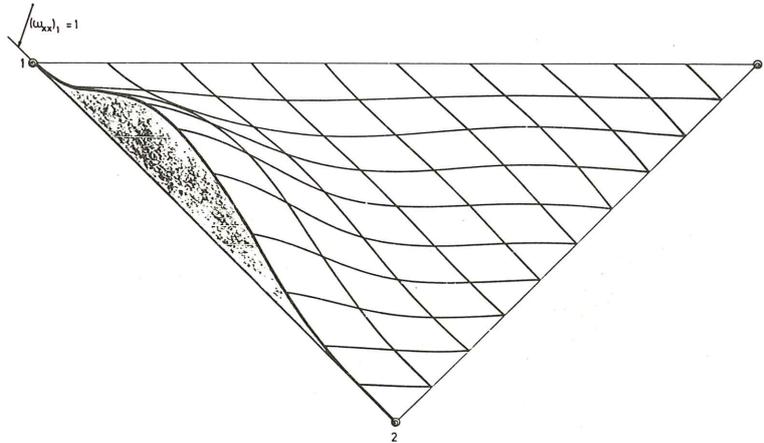
$$N_1 = L_1^3 \left[ L_1^4 + 7L_1^3(L_2 + L_3) + 21L_1^2(L_2 + L_3)^2 + 35L_1(L_2 + L_3)^3 + 140L_2L_3(\mu_3L_2^2 + \lambda_2L_3^2) \right] - \\ - L_1^2L_2^2L_3^2 \{ [873 + 140(\lambda_2 + \mu_3)] L_1 + [140(\mu_3 - \lambda_2) - 247] L_2 + [140(\lambda_2 - \mu_3) - 247] L_3 \}$$

Fig. 20. Función de forma asociada al grado de libertad  $U_1 = (\omega)_1$



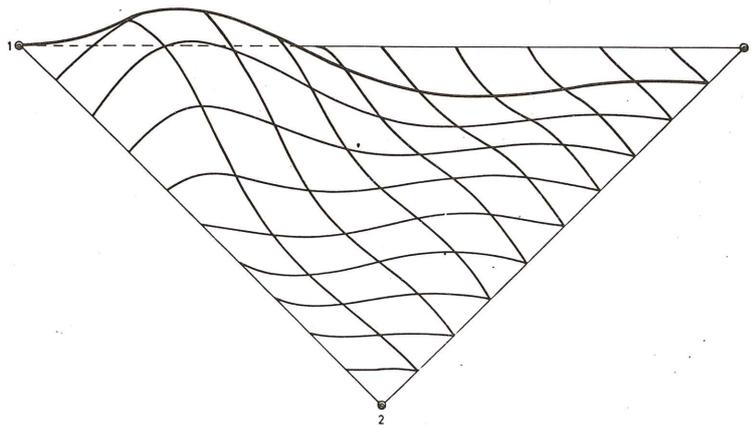
$$N_3 = L_1^6 (b_2L_1 - b_3L_2) + 6L_1^5 [ b_2L_3^2 + (b_3 - b_2)L_2L_3 - b_3L_2^2 ] + \\ + 15L_1^4 \{ L_2L_3 [ (2b_2 - b_3)L_3 - (2b_3 - b_2)L_2 ] + (b_2L_3^3 - b_3L_2^3) \} + \\ + L_1^3L_2L_3 [ (22b_1 - 38\mu_3b_3)L_2^2 - (22b_1 - 38\lambda_2b_2)L_3^2 ] - \\ - L_1^2L_2^2L_3^2 \{ [160(b_2 - b_3) + 38(\lambda_2b_2 - \mu_3b_3)] L_1 + 124(b_3L_3 - b_2L_2) + \\ + 37(b_2L_3 - b_3L_2) + 38(\lambda_2b_2 + \mu_3b_3)(L_3 - L_2) \}$$

Fig. 21. Función de forma asociada al grado de libertad  $U_3 = (\omega_y)_1$



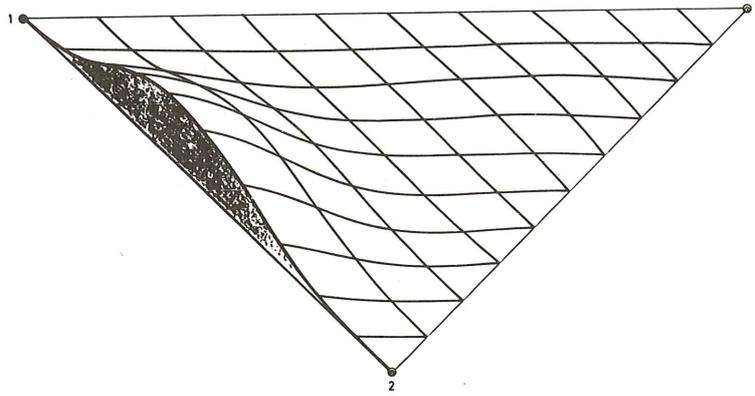
$$\begin{aligned}
 N_u = & \frac{1}{2} L_1^5 (a_3 L_2 - a_2 L_3)^2 + \frac{5}{2} L_1^4 (a_3^2 L_2^3 + a_2^2 L_3^3) + \\
 & + \frac{5}{2} L_1^4 L_2 L_3 [ a_3 (a_3 - 2a_2) L_2 + a_2 (a_2 - 2a_3) L_3 ] + \\
 & + 2L_1^3 L_2 L_3 [ a_3 (3a_2 + 3a_3 + 2\mu_3 a_3) L_2^2 + a_2 (3a_3 + 3a_2 + 2\lambda_2 a_2) L_3^2 ] - \\
 & - \frac{1}{2} L_1^2 L_2^2 L_3^2 \{ [35(a_2^2 + a_3^2) - 22a_2 a_3 + 8(\mu_3 a_3^2 + \lambda_2 a_2^2)] L_1 + \\
 & + 8(\lambda_2 a_2^2 - \mu_3 a_3^2)(L_3 - L_2) + (17a_3^2 - 29a_2^2 + 12a_2 a_3) L_2 + (17a_2^2 - 29a_3^2 + 12a_2 a_3) L_3 \}
 \end{aligned}$$

Fig. 22. Función de forma asociada al grado de libertad  $U_4 = (\omega_{xx})_1$



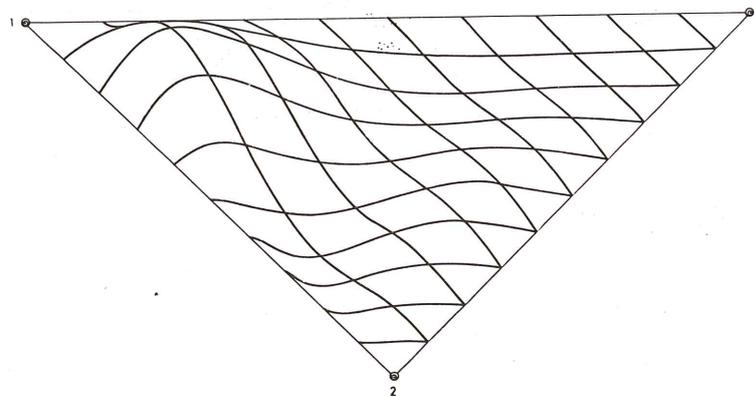
$$\begin{aligned}
 N_u = & - L_1^5 (a_3 b_3 L_2^2 - s_1 L_2 L_3 + a_2 b_2 L_3^2) - 5L_1^4 (a_3 b_3 L_2^3 + a_2 b_2 L_3^3) - \\
 & - 5L_1^4 L_2 L_3 [ (a_3 b_3 - s_1) L_2 + (a_2 b_2 - s_1) L_3 ] - \\
 & - 2L_1^3 L_2 L_3 [ (3s_1 + 6a_3 b_3 + 4\mu_3 a_3 b_3) L_2^2 + (3s_1 + 6a_2 b_2 + 4\lambda_2 a_2 b_2) L_3^2 ] + \\
 & + L_1^2 L_2^2 L_3^2 \{ [35(a_2 b_2 + a_3 b_3) - 11s_1 + 8(\mu_3 a_3 b_3 + \lambda_2 a_2 b_2)] L_1 + \\
 & + 8(\lambda_2 a_2 b_2 - \mu_3 a_3 b_3)(L_3 - L_2) + (17a_3 b_3 - 29a_2 b_2 + 6s_1) L_2 + (17a_2 b_2 - 29a_3 b_3 + 6s_1) L_3 \}
 \end{aligned}$$

Fig. 23. Función de forma asociada al grado de libertad  $U_6 = (\omega_{xy})_1$



$$\begin{aligned}
 N_7 = & \frac{1}{6} L_1^4 (a_3 L_2 - a_2 L_3)^3 + \frac{1}{6} L_1^3 L_2 L_3 [ a_2^2 (3a_1 - \lambda_2 a_2) L_2^2 - a_3^2 (3a_1 - \mu_3 a_3) L_3^2 ] + \\
 & + \frac{1}{6} L_1^3 L_2^2 L_3 [ 5(a_2^3 - a_3^3) + 4a_2 a_3 (a_3 - a_2) + (\lambda_2 a_2^3 - \mu_3 a_3^3) ] - \\
 & - \frac{1}{6} L_1^2 L_2^3 L_3 [ 4a_3^3 + 5a_2^3 + a_2 a_3 (5a_3 + a_2) + (\mu_3 a_3^3 + \lambda_2 a_2^3) ] + \\
 & + \frac{1}{6} L_1^2 L_2 L_3^3 [ 4a_2^3 + 5a_3^3 + a_2 a_3 (5a_2 + a_3) + (\mu_3 a_3^3 + \lambda_2 a_2^3) ]
 \end{aligned}$$

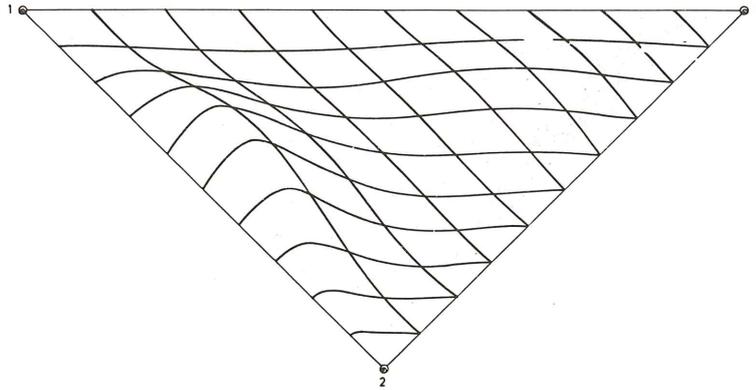
Fig. 24. Función de forma asociada al grado de libertad  $U_7 = (\omega_{xxx})_1$



$$\begin{aligned}
 N_9 = & \frac{1}{2} L_1^4 [ a_2^3 b_2 L_3^3 - \gamma L_2 L_3^2 + \delta L_2^2 L_3 - a_3^3 b_3 L_3^2 ] + \\
 & + \frac{1}{2} L_1^3 L_2 L_3 [ [(3 + \lambda_2) a_2^2 b_2 + \gamma] L_2^2 - [(3 + \mu_3) a_3^2 b_3 + \delta] L_3^2 ] + \\
 & + \frac{1}{6} L_1^3 L_2^2 L_3 [ 15(a_2^3 b_3 - a_2^2 b_2) + 4(\gamma - \delta) + 3(\mu_3 a_3^2 b_3 - \lambda_2 a_2^2 b_2) ] + \\
 & + \frac{1}{6} L_1^2 L_2^3 L_3 [ 15a_2^2 b_2 + 12a_3^2 b_3 + 5\delta + \gamma + \mu_3 a_3^2 b_3 + \lambda_2 a_2^2 b_2 ] - \\
 & - \frac{1}{6} L_1^2 L_2 L_3^3 [ 15a_3^2 b_3 + 12a_2^2 b_2 + 5\gamma + \delta + \mu_3 a_3^2 b_3 + \lambda_2 a_2^2 b_2 ]
 \end{aligned}$$

con  $\delta = a_3(2a_2 b_3 + a_3 b_2)$  ,  $\gamma = a_2(2a_3 b_2 + a_2 b_3)$

Fig. 25. Función de forma asociada al grado de libertad  $U_9 = (\omega_{xxy})_1$



$$N_{31} = 64h_3 [ L_1^3 L_2^3 L_3 + L_1^2 L_2^2 L_3^2 (L_3 - L_2 - L_1) ]$$

Fig. 26. Función de forma asociada al grado de libertad  $U_{31} = (\omega_n)_4$

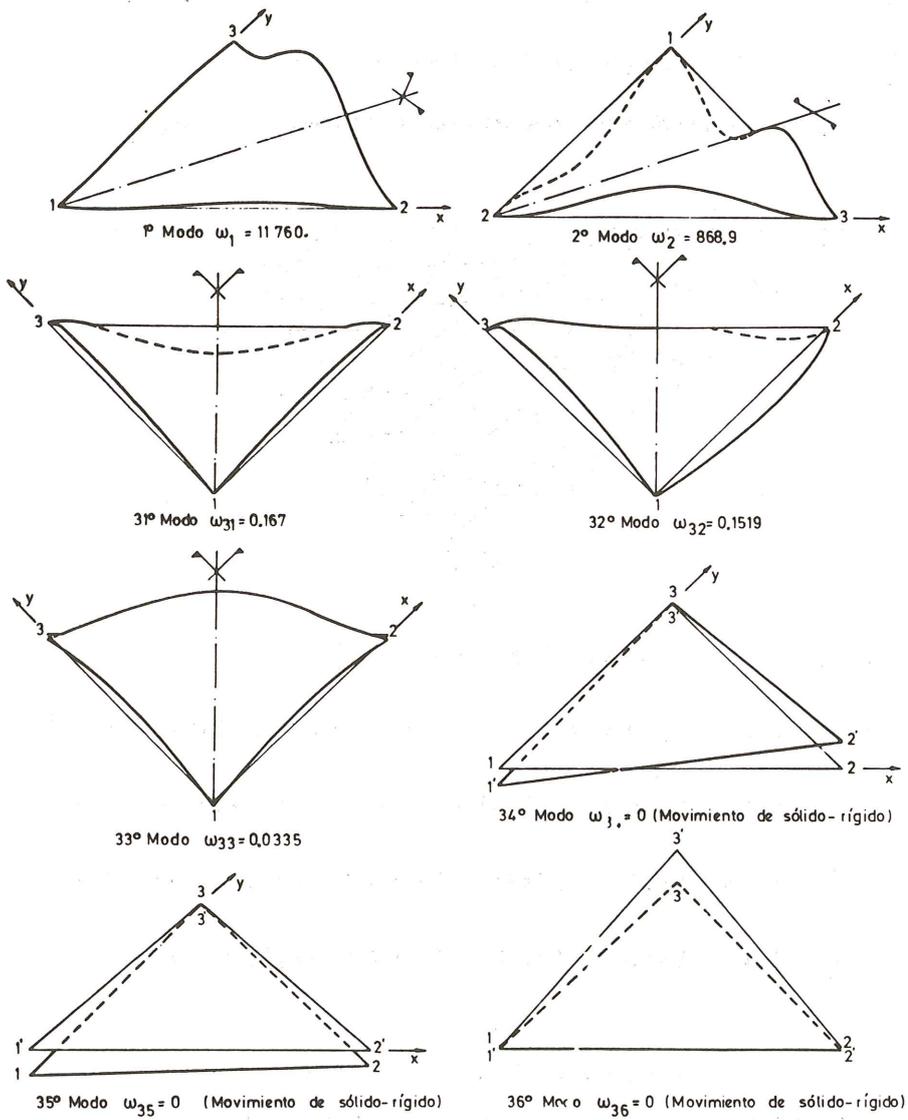
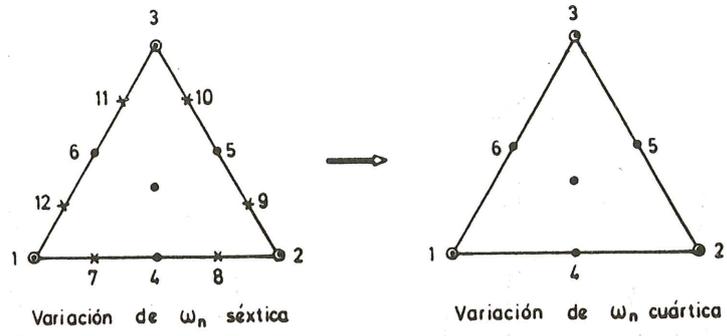
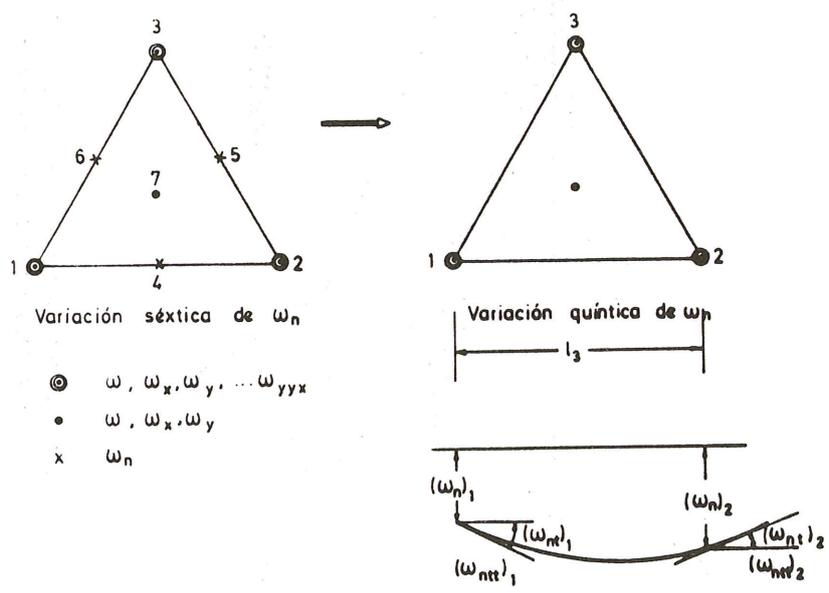


Fig. 27. Vectores propios de la matriz de rigidez del Hiper elemento tipo II.



- ⊙  $\omega, \omega_x, \omega_y, \omega_{xx}, \omega_{yy}, \omega_{xy}$
- $\omega, \omega_x, \omega_y$
- x  $\omega_n$

Fig. 28.



- ⊙  $\omega, \omega_x, \omega_y, \dots, \omega_{yyx}$
- $\omega, \omega_x, \omega_y$
- x  $\omega_n$

Fig. 29.

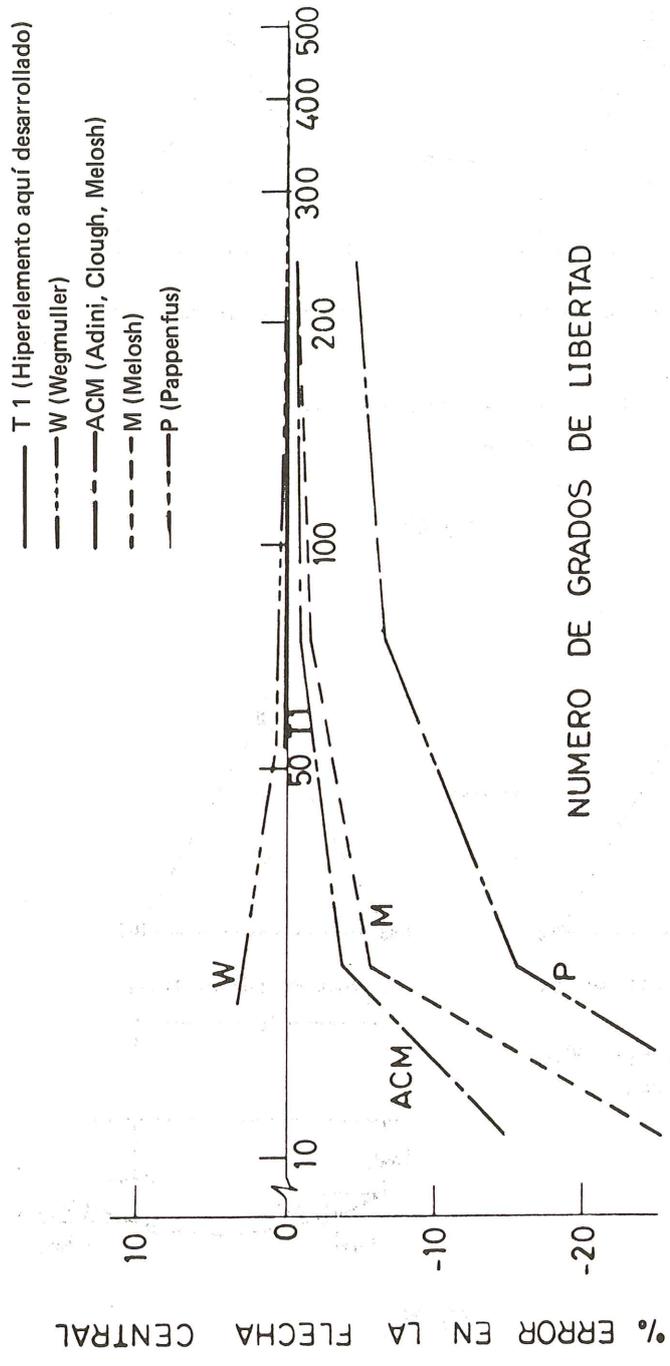
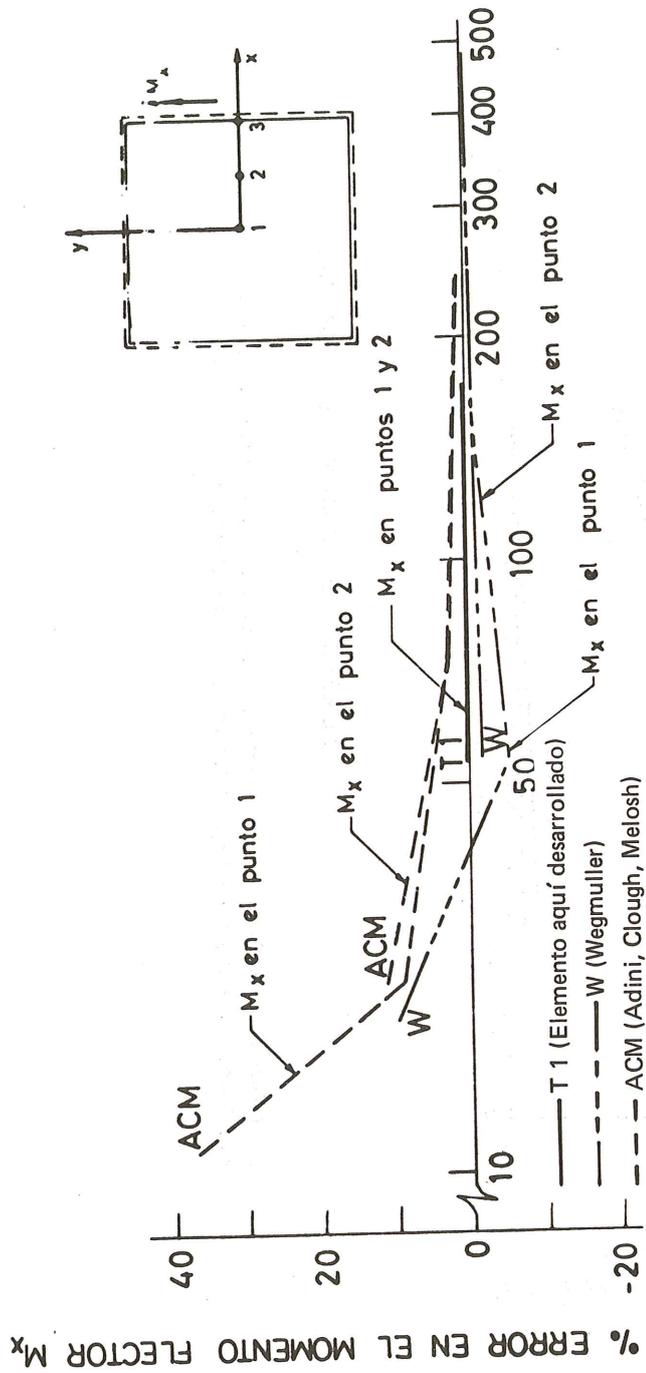


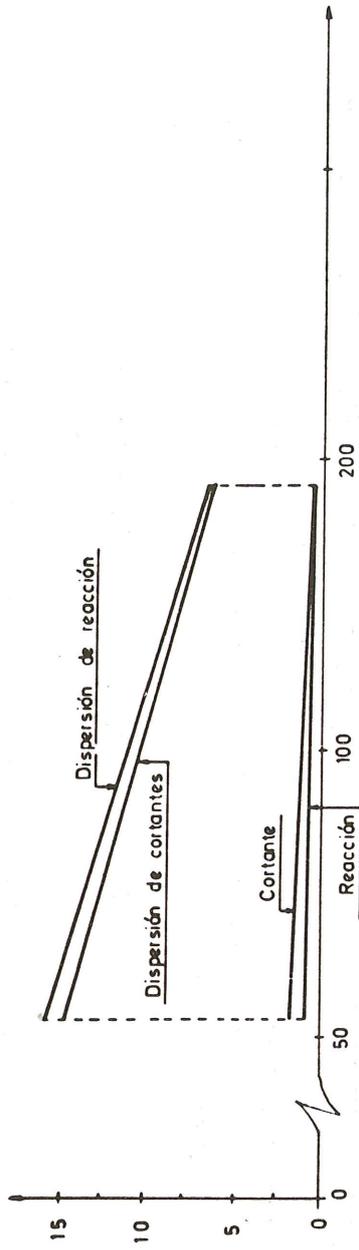
Fig. 31. Porcentaje de Error en la Flecha Central en función del Nº de Grados de Libertad para el caso de Placa cuadrada simplemente apoyada y sometida a carga uniforme.



### NUMERO DE GRADOS DE LIBERTAD

Fig. 32. Porcentaje de Error en el Momento flector  $M_x$  en función del número de Grados de Libertad para el caso de Placa cuadrada simplemente apoyada y sometida a carga uniforme.

% ERROR EN CORTANTES Y REACCIONES



NUMERO DE GRADOS DE LIBERTAD

Fig. 33. Porcentaje de Error en los cortantes y reacciones en el punto medio del lado de una placa cuadrada apoyada sometida a carga uniforme. Se indican además las dispersiones.

# Aplicación del método de las deformaciones impuestas para analizar el comportamiento no lineal de estructuras hiperestáticas de hormigón

Antonio Aguado de Cea. Dr. Ingeniero de Caminos  
Juan Murcia Vela. Dr. Ingeniero de Caminos  
Cátedra de Hormigón Armado y Pretensado de la E.T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos — Universidad Politécnica de Barcelona

## RESUMEN

En este artículo se aplica el método de las deformaciones impuestas para analizar el comportamiento no lineal de estructuras de hormigón, incidiendo en las características que implica el desarrollo numérico del mismo, como son: Tipo de diagrama M-C, que define el comportamiento del material, Número de tramos representativos de cada elemento estructural, etc...

También se presentan distintos ejemplos de aplicación, a través de los cuales podemos obtener una visión más completa del método así como hacer unas reflexiones generales sobre el tema de la redistribución de esfuerzos en una estructura.

## 1. INTRODUCCION

El método general de análisis no lineal de estructuras a partir de deformaciones impuestas presentado en el número anterior de esta publicación (\*\*\*) supone el cumplimiento simultáneo de las ecuaciones de equilibrio, compatibilidad y constitutivas del material y que en la práctica se traduce en la superposición de problemas lineales obtenidos en dos etapas; éstas son:

- 1ª Cálculo lineal de la estructura con las acciones que actúan en la misma y considerando unas características lineales del material (rigidez  $K_0$ ).

---

(\*\*\*) Aguado, A. y Murcia, J. "Análisis no lineal de estructuras a partir de deformaciones impuestas". Hormigón y Acero, N° 136. 3<sup>er</sup> trimestre 1980, pág. 45.

2ª Cálculo lineal de la estructura tomando como acciones las deformaciones impuestas correspondientes a los incrementos de curvatura existentes a nivel sección, para que las condiciones tenso-deformacionales del material sean las reales.

La 1ª etapa de cálculo en la que pueden considerarse cualquier tipo de acciones (cargas, deformaciones, etc...) o combinaciones de ellas, se resuelve por cualquiera de los métodos de cálculo lineal existentes, por todos conocidos, por lo que aquí no vamos a incidir en este punto.

En la 2ª etapa, para determinar las acciones (incrementos de curvatura existentes en cada sección) se precisa conocer el diagrama real M-C, es decir estos diagramas son un dato obtenido a partir de un dimensionamiento previo de las secciones.

Así pues, este método nos permitirá estudiar el comportamiento de una estructura de hormigón en cualquier situación de la misma (servicio o próxima a rotura).

## 2. COMPORTAMIENTO NO LINEAL DEL HORMIGON

### 2.1. Diagrama Momento-Curvatura (M-C)

El comportamiento no lineal del hormigón, correspondiente a las fases de fisuración o plastificación, lo representamos a nivel sección por medio de diagramas M-C (Fig. 1). Este tratamiento implica la no concentración en las secciones críticas de las deformaciones no compatibilizadas, es decir la no utilización del concepto de rótulas plásticas que exigiría el empleo de diagramas M- $\theta$ . (Métodos de Macchi, G. Baker, A), sino la consideración de la no linealidad en todas las secciones de la estructura.

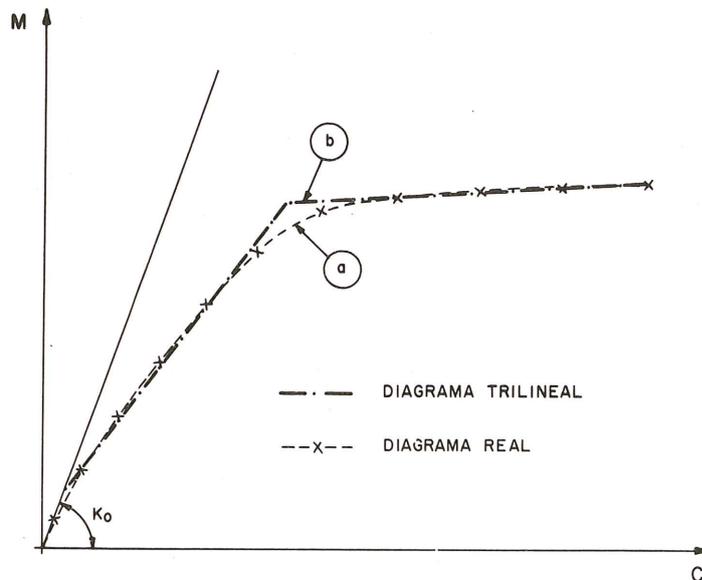


Fig. 1. Diagrama momento-curvatura (M-C) de una sección genérica.

El diagrama M-C real (Fig. 1.a.) está dado por puntos y se puede obtener experimentalmente (distintos puntos de medida) o bien analíticamente (distintas situaciones de la profundidad de la fibra neutra y del plano de deformaciones). En el cálculo, el comportamiento no lineal del hormigón lo representamos por medio de un diagrama trilineal M-C que se ajusta al diagrama real (Fig. 1.b) (\*\*) en el que los límites de cada fase  $L_0$ ,  $L_1$ ,  $L_2$  tienen el mismo significado que el dado por otros autores.

Este tipo de diagrama no es intrínseco del método de análisis que se utiliza, por lo que es posible utilizar otro tipo de diagramas (p. ej. Diagramas bilineales), pero siempre que la relación M-C sea unívoca. Sin embargo, para analizar el comportamiento de la estructura, hemos elegido el diagrama trilineal por las razones siguientes:

1º Se obtiene un mejor ajuste con respecto a los diagramas obtenidos experimentalmente, con lo que se consigue mejorar la precisión al estudiar el comportamiento de la estructura tanto en situaciones de rotura como situaciones de servicio.

En la figura 2 se puede ver el diagrama  $(M, \theta)$  obtenido experimentalmente en la viga B-12, serie 5 de la Universidad de Oporto dentro del programa internacional de ensayos propugnado por el Comité Europeo del Hormigón (C.E.B.), así como el ajuste al mismo de un diagrama bilineal y un diagrama trilineal.

2º Con los diagramas trilineales M-C se puede obtener una expresión analítica sencilla de los incrementos de curvatura existentes entre dos fases del mismo lo cual permite una sistematización de los cálculos a realizar. (Véase siguiente apartado).

Este tratamiento a nivel sección exigiría definir el diagrama M-C de todas las secciones lo cual llevaría a tener que manejar un gran número de diagramas (datos). Ahora bien, la realidad nos indica que un elemento estructural de hormigón puede descomponerse en distintos tramos en los que las características, dentro de cada uno de ellos, se mantengan prácticamente constantes (especialmente los factores que más influyen en el diagrama M-C: esfuerzo axial, cuantía de armadura, etc.).

Como consecuencia de esto definimos en cada uno de estos tramos un diagrama M-C que caracteriza a todas las secciones del mismo. Esta hipótesis introduce errores comparables e incluso menores a otras simplificaciones de cálculo que se admiten normalmente. Por otro lado, estos errores disminuyen a medida que aumentamos el número de tramos en que se divide el elemento estructural.

Surge entonces la pregunta de: ¿En cuántos tramos se divide cada elemento estructural?

La respuesta a la misma depende de distintos factores, entre los que destacaremos:

- Tipo de elemento estructural en estudio. Es normal que en una viga existan zonas con distintas cuantías, mientras que en pilares, éstos se mantienen normalmente constantes.
- Tipo de análisis que se realiza en la estructura. Así para un análisis en 1º orden nosotros utilizamos, normalmente, tres tramos en elementos tipos vigas. Sin embargo en un análisis en 2º orden es preciso aumentar el número de tramos, siendo 10 el valor más corriente utilizado por los distintos autores. (No obstante se pueden tomar características comunes para algunos de estos tramos).

---

(\*\*) El ajuste puede realizarse por cualquier método numérico, analítico o gráfico. En los ejemplos que se presentan más adelante el ajuste se hace gráficamente.

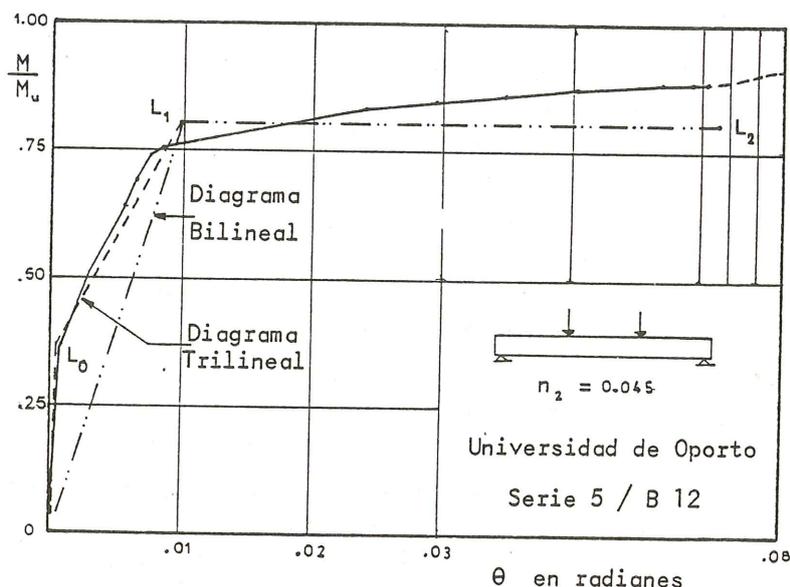


Fig. 2. Comparación de los distintos tipos de diagramas.

- Características geométricas y del material. Un elemento de inercia variable exigirá en el tratamiento numérico una discretización en mayor número de tramos que elementos de inercia constante. Análoga consideración procede en hormigón pretensado frente al hormigón armado (\*\*).

En resumen atendiendo a todos los factores que pueden intervenir en la elección del número de tramos por elemento estructural, éste varía entre 3 para un análisis de 1<sup>er</sup> orden (los tramos pueden ser iguales p. ej.: soportes, o diferentes p. ej.: vigas) y 10 para un análisis en 2<sup>o</sup> orden (asimismo pueden existir también tramos con iguales características).

## 2.2. Valor de los Incrementos de Curvatura

De las dos etapas de cálculo que conlleva la aplicación del método de deformaciones impuestas para analizar el comportamiento no lineal de estructuras de hormigón, conocemos el valor de las acciones que actúan en la 1<sup>a</sup> etapa, y cualitativamente cuáles son las acciones que actúan en la 2<sup>a</sup> de ellas. Vamos pues, a continuación, a cuantificar las mismas.

Dado un diagrama trilineal M-C para representar el comportamiento del hormigón (Fig. 3) tendremos que el incremento de curvatura existente en una fase, p. ej.: Fase II (Fig. 3) es:

$$\Delta C_{x2} = C_{II} - C_I$$

donde

$$C_{II} = \frac{M_{fx} - M_I}{K_2} - \frac{M_I}{K_1}$$

$$C_I = \frac{M_{fx}}{K_1}$$

(\*\*) En el hormigón pretensado el aumento de datos que supone el tomar más tramos, puede compensarse si se toman diagramas bilineales para reflejar el comportamiento de aquél a nivel sección.

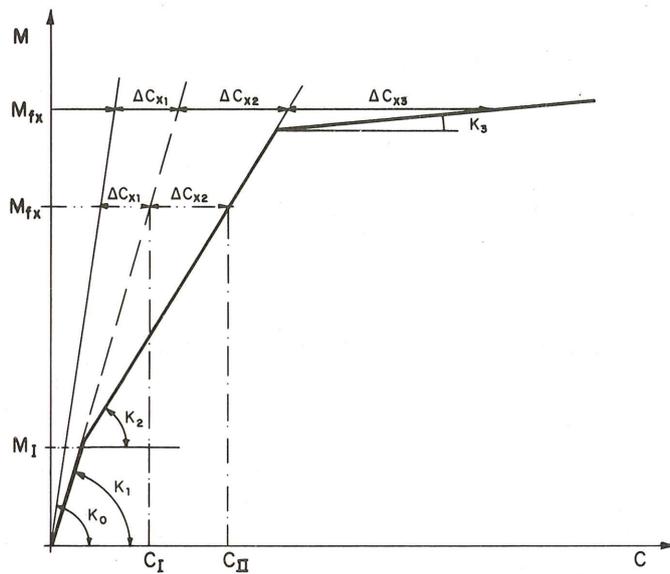


Fig. 3. Incrementos de curvatura de cada fase

sustituyendo

$$C_{x2} = (M_{fx} - M_I) \left( \frac{1}{K_2} - \frac{1}{K_1} \right) = \Delta M_{fx} \left( \frac{1}{K_2} - \frac{1}{K_1} \right)$$

Así pues, el incremento de curvatura de una fase genérica viene dada por

$$\Delta C_{xj} = \Delta M_{xj} \left( \frac{1}{K_j} - \frac{1}{K_{j-1}} \right)$$

siendo:

- $\Delta C_{xj}$  Incremento de curvatura entre las fases "j-1" y "j" para el  $M_{fx}$  que actúa en la sección.
- $\Delta M_{xj}$  Incremento de momento entre el  $M_{fx}$  que actúa en la sección y el momento final de la fase anterior "j-1".

y el incremento de curvatura total existente en la sección, para el caso más general de una situación próxima a rotura es:

$$\Delta C_x = \sum_{j=1}^3 \Delta C_{xj} = \Delta C_{x1} + \Delta C_{x2} + \Delta C_{x3}$$

que en el caso de considerar que la rigidez de la 1ª fase ( $K_1$ ) coincide con el valor de la rigidez utilizado en la 1ª etapa de cálculo ( $K_0$ ), el valor de  $\Delta C_{x1}$  se hace igual a 0.

### 3. RESOLUCION NUMERICA. EJEMPLOS

En el proceso iterativo que implica el método propuesto, todos los cálculos se realizan sobre la misma estructura. (En ambas etapas lineales). Por otro lado, la aplicación del método a estructuras de hormigón conlleva la determinación de los efectos debidos a cada una de las fases del diagrama M-C trilineal, tal como se ha visto en el apartado anterior. Así pues, se originan un gran número de operaciones.

Contando con la gran flexibilidad que tiene el método propuesto con respecto a otros métodos de cálculo, es la problemática anterior la que condiciona en gran medida la elección del método de resolución. Así pues, éste debe permitir un tratamiento sistemático tanto de los datos como del proceso en sí con objeto de disminuir el número de cálculos.

Por estas razones, se propugna en el método, el procedimiento de cálculo matricial de estructuras abordando el tema por compatibilidad o por equilibrio, para los dos problemas lineales. A manera de ejemplo, puede verse que el sistema de ecuaciones que se plantea en el análisis por equilibrio

$$\{p\} = \{K\} \cdot \{d\}$$

la matriz  $\underline{K}$  no varía, siendo la matriz  $p$  la que recoge las distintas acciones tanto del 1<sup>er</sup> problema como del 2<sup>o</sup> problema. Esta es una característica muy significativa de este modelo frente a otros en los que se hace variar la matriz  $K$ .

Si bien la solución se obtiene por superposición de problemas lineales en el proceso iterativo. ¿Cuándo se alcanza en el proceso numérico? El criterio de convergencia que se usa normalmente, y que nosotros también tenemos en cuenta, es tomar la diferencia de esfuerzos de dos iteraciones consecutivas menor que un cierto valor  $A$

$$|M_{x_i} - M_{x_{i-1}}| < A$$

$M_{x_{i-1}}$ ,  $M_{x_i}$  Momento flector en una sección genérica en las iteraciones  $i-1$ ,  $i$ .

El valor  $A$ , usualmente se considera que es un porcentaje del momento existente en la sección de estudio debido a la primera etapa del cálculo y pueden considerarse valores menores del 5 por 100.

El criterio de convergencia se establece en el número de secciones que se estime oportuno, basándolo entre la precisión que se desea (mayor número de secciones) y el aumento de cálculo (menor número de aquéllas). Un acuerdo al que normalmente se llega es comprobar en las secciones con máximos absolutos.

A continuación se presentan distintos ejemplos en los que podemos ver con estructuras concretas lo expuesto anteriormente.

### 3.1. Ejemplo n<sup>o</sup> 1: Viga continua

El objeto de este ejemplo es, fundamentalmente, el comparar los resultados que se obtienen por el modelo propuesto según un análisis por compatibilidad con los obtenidos por métodos experimentales o bien por otros métodos numéricos.

Como estructura común para los distintos métodos, vamos a emplear una viga continua de dos tramos solicitada por una carga concentrada en la mitad uno de ellos. Esta fue la estructura base utilizada por S. TOLACCIA para la realización de diversos ensayos desarrollados en la Universidad de Lieja.

Como métodos numéricos de comparación hemos elegido:

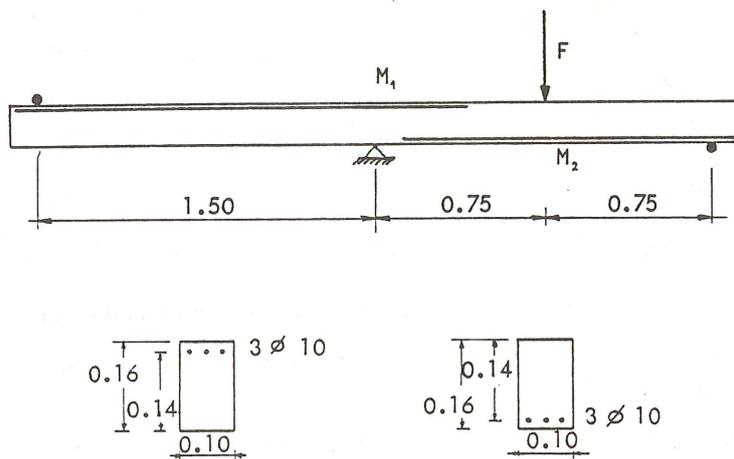
- El método de análisis estudiado en el LABORATORIO NACIONAL DE ENGENHARIA CIVIL (L.N.E.C.) de Lisboa cuyos resultados presenta A.M. PEREIRA TEIXEIRA COELHO.
- El método de las rotaciones impuestas propuesto por G. MACCHI para una carga puntual  $F = 3,5$  t.

La viga se puede considerar con características uniformes en toda ella (Fig. 4.a) y un Diagrama Momento-Curvatura (Fig. 4.b) obtenido experimentalmente sobre una viga simplemente apoyada con características de sección idénticas a las correspondientes de la viga hiperestática.

El parámetro que se hizo variar en estas vigas fue la cuantía de armadura, y para la comparación de resultados se toma la viga denominada 2B de la serie de ensayos citada, cuyas características geométricas están indicadas en la fig. 4.a; las características geométricas de los materiales son: Acero con escalón de cedencia a 2.600 Kp/cm<sup>2</sup> y hormigón con resistencia en probeta cilíndrica a los 28 días de 255 Kp/cm<sup>2</sup>.

En la fig. 5 se presentan los resultados obtenidos, según los métodos citados anteriormente, para distintos valores de la carga (Desde F = 0 hasta la carga de rotura, F = 4 t).

Hemos de resaltar el elevado grado de precisión que, en este caso, tienen todos los métodos numéricos con respecto a los resultados experimentales. Esta precisión se manifiesta tanto en la zona próxima a rotura como en zonas de servicio; así, los resultados obtenidos



$$\text{Cuantía geométrica : } w_o = \frac{A_s}{b \cdot d} = 1.68 \%$$

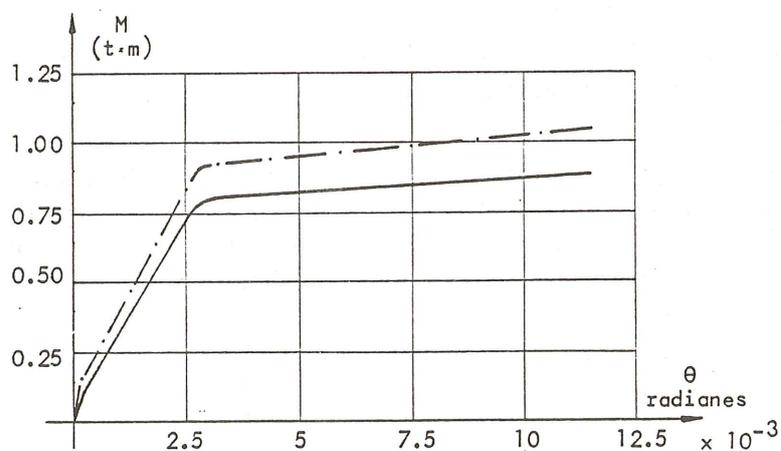


Fig. 4. a: Características geométricas de la viga.  
b: Diagrama Momento-Rotación.

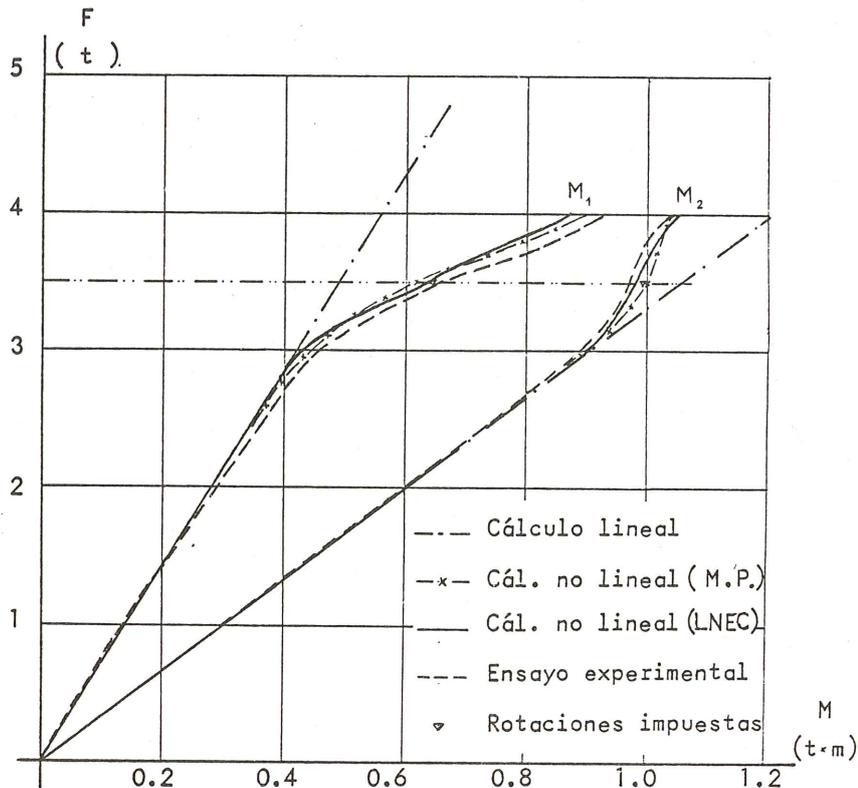


Fig. 5. Diagrama F-M según los distintos métodos utilizados.

por el método propuesto, para la carga de rotura, difieren en menos de un 3 por 100 de los resultados obtenidos experimentalmente.

Si bien estos resultados son parciales en cuanto que son fruto de un ejemplo, no dejan por ello de apuntar hacia una problemática más general, como es: La elección del método de análisis no lineal. Para ello, aún admitiendo que se puede conseguir una precisión análoga con los distintos métodos numéricos, habrá que barajar diversos factores que nos ayuden en la decisión. Entre éstos podemos citar: Campo de aplicación, Generalidad de situaciones de la estructura, Flexibilidad ante el método de cálculo, Complejidad del mismo, Optimización en el empleo con ordenador, etc...

Tanto a través de la exposición teórica del método propuesto como por medio de los ejemplos, podrá apreciarse el buen encaje que tiene este método frente a los factores citados anteriormente.

Con respecto al grado de redistribución de esfuerzos en la estructura, no existe unanimidad entre los distintos autores para definir un parámetro que lo caracterice. Así podemos hablar de redistribución a nivel sección refiriéndonos a un porcentaje respecto al valor inicial de los esfuerzos. En este ejemplo, para las secciones del apoyo intermedio (B) y en la sección de aplicación de la carga son:

| SECCION | Mom. Inicial | Mom. Sol. | Redistribuc.<br>% M. ini. |
|---------|--------------|-----------|---------------------------|
| B       | 0,564        | 0,92      | 63,12                     |
| C       | 1,218        | 1,04      | 14,61                     |

También se puede hablar de redistribución a nivel de elemento estructural, relacionando esfuerzos en distintas secciones del mismo. Así, si llamamos  $\delta$  a la relación entre momentos flectores en las secciones C y B, el valor del mismo al final de cada etapa es:

$$1^{\text{a}} \text{ Etapa: } \delta_1 = \frac{M_c}{M_B} = \frac{1,218}{0,564} = 2,16$$

$$2^{\text{a}} \text{ Etapa: } \delta_2 = \frac{M_c}{M_B} = \frac{1,04}{0,92} = 1,13$$

de estos resultados se deduce que la solución está próxima a la redistribución perfecta ( $\delta = 1$ ).

Por último, también se puede hablar de redistribución global de la estructura si bien esto es más de forma cualitativa que cuantitativa por lo que no incidiremos en ello.

### 3.2. Ejemplo 2: Pórtico de un tramo biempotrado

En este ejemplo se estudia el comportamiento de la estructura según un análisis en equilibrio, frente a cargas de servicio y para valores próximos a la carga última.

Sea el pórtico simple biempotrado de la fig. 6.a, con una ley de momentos correspondiente a la 1ª etapa de cálculo descrita en la fig. 6.b, y unas características a nivel sección, definidas en la fig. 7. Los diagramas Momento-Curvatura (M-C) que se dan en esta figura corresponden a los valores del esfuerzo axial (Soportes) obtenidos para una carga  $p = 5,5 \text{ t/m}$ . Ahora bien, para otros valores de "p", el diagrama M-C varía, si bien la diferencia es pequeña, por lo que podría tomarse en una primera aproximación, el mismo diagrama. No obstante, en este ejemplo se ha considerado diagramas distintos para cada valor del esfuerzo axial.

La estructura está solicitada por una carga uniforme que toma los valores ( $p = 2, 3, 4, 5, 5,5, 6,7, 7 \text{ t/m}$ .) llegando hasta el colapso. (Este se produce cuando en una sección se alcanza el momento último). La carga última según el cálculo no lineal propuesto es  $p_u = 7,1 \text{ t/m}$ ,

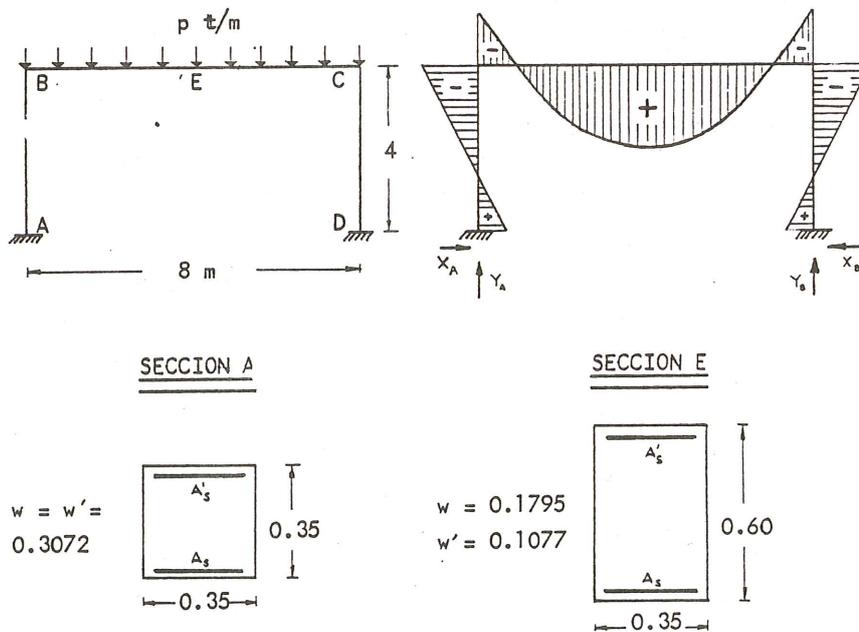


Fig. 6. Características geométricas de la estructura.

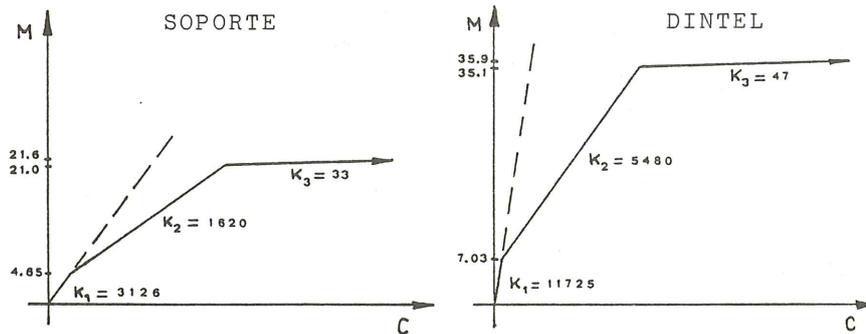


Fig. 7. Diagramas Momento-Curvatura de las distintas secciones.

teniendo en cuenta que el momento último en el dintel es  $(M_u)_d = 35,9$  t.m y en el soporte,  $(M_u)_s = 21,7$  t.m. Según un cálculo plástico (El colapso se alcanza por formarse un mecanismo) la carga última es  $p_u = 7,2$  t/m.

El valor "A" del criterio de convergencia que se toma en este ejemplo es:

$$A = 0,03 \cdot M_i$$

siendo:  $M_i$ : Momento flector de la 1ª etapa de cálculo en la sección de estudio (en este caso, secciones A, B, C, D)

En la tabla 2 se presentan los valores de los momentos inicial y final en las secciones extremas y central del dintel

| Carga<br>P | Sección Extrema |          | Sección Central |          | Nº de iterac. |
|------------|-----------------|----------|-----------------|----------|---------------|
|            | M. ini.         | M. final | M. ini.         | M. final |               |
| 2          | - 5.504         | - 5.819  | 10.495          | 10.180   | 2             |
| 3          | - 8.257         | - 8.848  | 15.742          | 15.151   | 3             |
| 4          | -11.009         | -11.760  | 20.990          | 20.239   | 3             |
| 5          | -13.762         | -14.629  | 26.237          | 25.370   | 3             |
| 5,5        | -15.138         | -16.057  | 28.861          | 27.942   | 3             |
| 6,7        | -18.358         | -19.655  | 35.001          | 33.704   | 3             |
| 7          | -19.266         | -20.786  | 36.733          | 35.214   | 6             |

En la estructura estudiada en este ejemplo según el análisis no lineal, se alcanzan "casi" simultáneamente los respectivos Momentos últimos en las secciones más desfavorables (Véase Fig. 8), lo cual implica un buen aprovechamiento de aquélla.

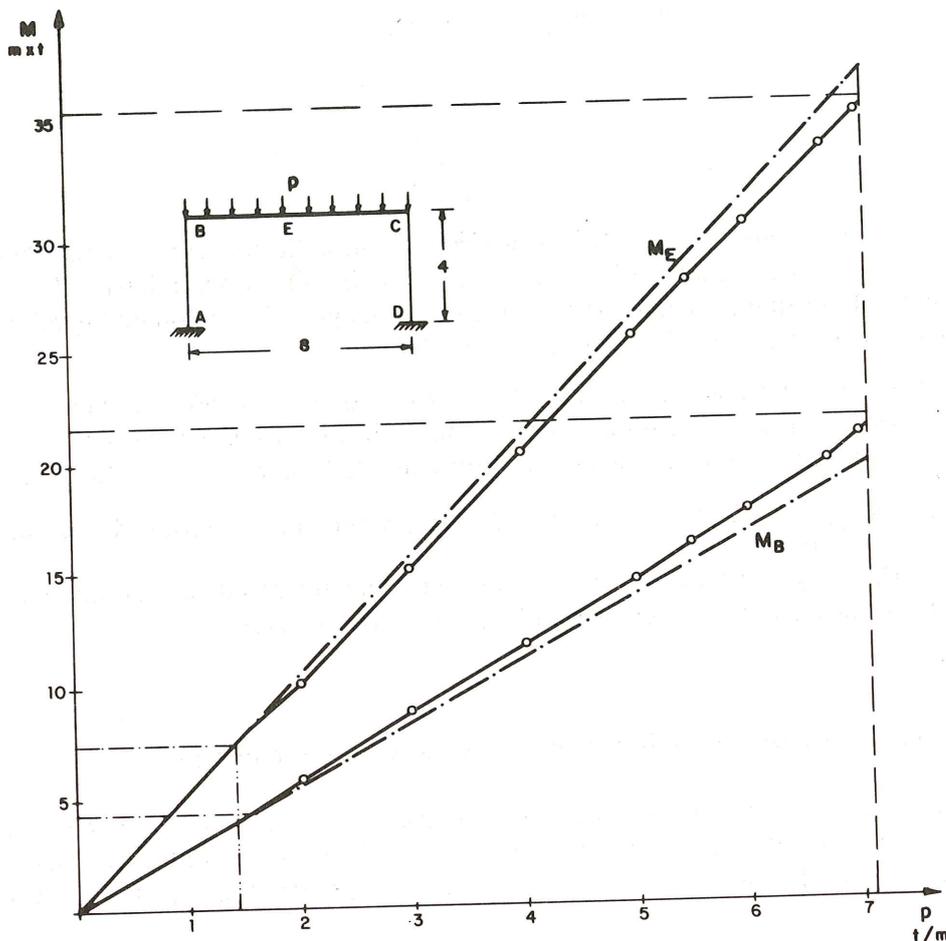


Fig. 8. Diagrama M-P

Los distintos factores, vistos anteriormente para dar idea de la redistribución que se produce en la estructura, toman en este caso los siguientes valores:

- El factor  $\delta_s$  que nos determina el grado de redistribución que se produce a nivel sección con respecto a los valores de los esfuerzos obtenidos en la 1ª Etapa, en las secciones B y E, vale:

$$\text{Sección B: } (\delta_s)_B = \frac{-19,54 - (-21,2)}{-19,54} = 8,50\%$$

$$\text{Sección E: } (\delta_s)_E = \frac{37,25 - 35,9}{37,25} = 3,64\%$$

- El factor  $\delta$ , que nos relaciona los momentos de las secciones extremas y central del dintel para la carga última en cada tipo de cálculo, es:

$$\delta_{\text{lineal}} = 1,91 \quad \delta_{\text{no lineal}} = 1,69 \quad \delta_{\text{plástico}} = 1,655$$

Para el cálculo no lineal casi se produce una redistribución total, lo cual supone un aprovechamiento máximo de la estructura.

Recordemos que las leyes de esfuerzos iniciales (dadas de un cálculo lineal) dependen de la relación de rigideces iniciales ( $K_{os}$ ,  $K_{od}$ ) de los distintos elementos estructurales. p. ej.: El momento en la sección E es:

$$(M)_E = \frac{p l^2}{24} \times \frac{3 C + 2}{C + 2}$$

siendo,

$$C = \frac{K_{od}}{K_{os}} \times \frac{h}{l}$$

y que por otro lado, sabemos que la solución real es única. Según esto, la redistribución tal como se ha cuantificado más arriba, varía según las distribuciones iniciales de esfuerzos que se tomen, de lo que se deduce la posibilidad de una gran dispersión en los valores de la redistribución de esfuerzos en función de los iniciales.

En línea con lo anterior, cabe destacar asimismo, que la relación de rigideces iniciales influye en el sentido de la redistribución (Aumentar o disminuir los esfuerzos en una sección determinada). En este caso, para unos valores normales de C, p. ej.:  $C = 1,8754$  que implica una relación de  $\frac{K_{od}}{K_{os}} = 3,75$ ; la redistribución se produce en el sentido de equilibrar los momentos positivos y negativos, lo cual se traduce en un aumento de los momentos negativos situados en las secciones extremas del dintel sobre los soportes.

### 3.3. Ejemplo 3. Estructura de edificación. Pórtico de varios tramos y pisos

El objeto de este ejemplo es mostrar la potencia del método propuesto y el campo de aplicación del mismo. Para ello a continuación se estudia una estructura de edificación que en el cálculo la consideramos formada por pórticos planos de dos tramos y de tres pisos. Fig. 9.

Los soportes tienen una sección rectangular de  $0,25 \times 0,25$  m y las vigas son de sección rectangular de  $0,25 \times 0,40$  m, empleándose en ambos elementos un hormigón de características constantes ( $E = 2,25 \cdot 10^4$  t/m<sup>2</sup>) y una resistencia de cálculo de  $f_{cd} = 1.150$  t/m<sup>2</sup>, mientras que el acero la resistencia de cálculo es  $f_{yd} = 38.000$  t/m<sup>2</sup>.

Para la 1ª etapa de cálculo, con una carga  $p_d = 3$  t/m sobre el dintel, se obtienen los esfuerzos que actúan en la estructura por medio de un cálculo matricial (Fig. 10). Por otro lado, se toman los mismos diagramas M-C para todas las secciones de las vigas, mientras que son diferentes para cada uno de los pisos de soportes. (Se tiene en cuenta el esfuerzo axial). En los dos tipos de elementos estructurales anteriores se toma el mismo diagrama M-C en los tres tramos en que se discretizan.

Para la carga dada existe una gran dispersión en cuanto al tipo de situación en que se encuentra cada una de las secciones de la estructura; así mientras las secciones más desfavorables de los soportes están entre el 40 y 60 por 100 de la rotura, en las secciones extremas de las vigas junto al soporte central se encuentran alrededor del 90 por 100 de la rotura.

El valor "A" del criterio de convergencia que se toma en este ejemplo es:

$$A = 0,03 M_i$$

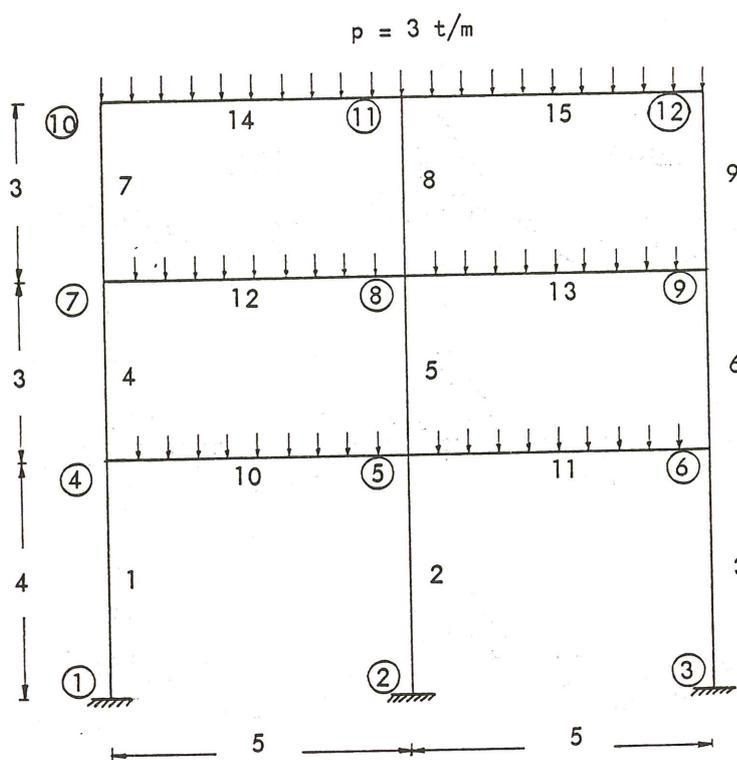


Fig. 9. Características geométricas.

donde  $M_i$  es el momento de la 1ª etapa de cálculo en las secciones extremas de cada barra. Este criterio es estricto, pudiéndose estudiar como alternativa, su aplicación únicamente en las secciones más desfavorables.

Los resultados que se obtienen después de la 2ª etapa (Fig. 10) no permiten sacar conclusiones simples de tipo general en cuanto al grado de redistribución y el sentido en que se produce; no obstante y tal como se ha dicho anteriormente este último depende de la relación entre las rigideces de los distintos elementos.

Por otro lado, hay que destacar que la ley de esfuerzos axiales (Véase reacciones en los empotramientos 1, 2, 3) sufre una variación muy pequeña por lo que puede considerarse despreciable. Este hecho confirma la hipótesis de tomar el mismo diagrama M-C ( $N = \text{dado}$ ) para todas las iteraciones.

Por último, los resultados de este ejemplo confirman los obtenidos en el ejemplo anterior con respecto a la redistribución de momentos negativos en las secciones extremas de las vigas que constituyen los dinteles. Aquí, en la sección extrema de las vigas del último piso, junto al soporte central, que es la zona más solicitada, inicialmente tiene un momento flector de  $(-7,57) \text{ m.t}$ ; una vez redistribuida, se carga aún más alcanzando el valor  $(-7,705) \text{ m.t}$  (Véase fig. 10). Estos resultados y los apuntados por otros autores (A. APARICIO; P. FUSTER), discrepan con lo señalado en el artículo 48.1 de la Norma Española EH-73, en el sentido de considerar una redistribución de momentos flectores de hasta un 15 por ciento del máximo momento flector negativo (Véase fig. 48.1 de dicha Norma). En este sentido, la Norma ACI 318-77 recoge que esta redistribución puede ser en los dos sentidos tal como se obtiene en el presente ejemplo.

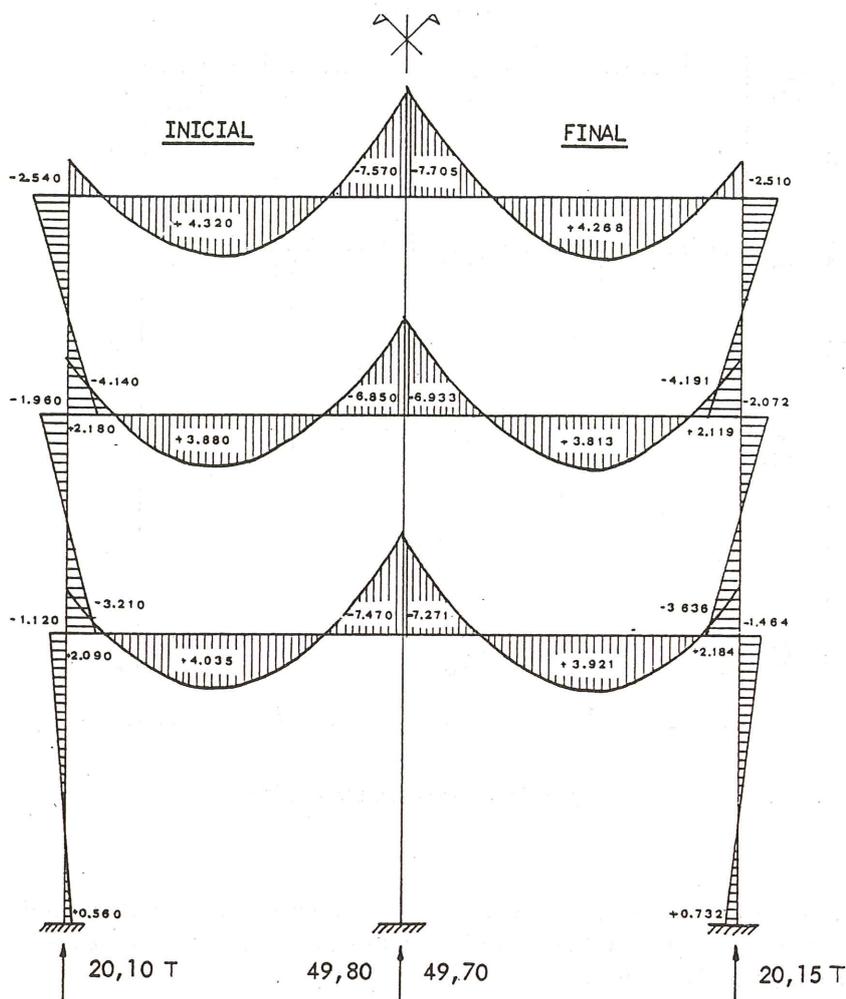


Fig. 10. Ley de momentos flectores al final de la 1ª y 2ª Etapa.

#### 4. CONCLUSIONES

La aplicación del método general de análisis a partir de deformaciones impuestas para estudiar el comportamiento de estructuras de hormigón armado y/o pretensado es consecuencia directa del comportamiento del mismo como material estructural (está caracterizado por su no linealidad relacionada con la fisuración del hormigón y la plastificación de éste y del acero).

Estas características se reflejan a nivel sección por medio de diagramas trilineales M-C que tienen un grado de precisión elevado con respecto a los diagramas reales y permiten una sistematización de los cálculos a desarrollar. No obstante, este tipo de diagramas no son intrínsecos al método de análisis por lo que se pueden utilizar otros diagramas.

El método se encuentra entre los llamados "métodos exactos" consiguiéndose una gran precisión en la solución numérica, para cualquier situación tanto de servicio como de rotura (errores menores al 2 por 100 con un número de iteraciones reducido, de 2 a 3 en servicio, aumentando este número para rotura; así pues, tiene una buena convergencia).

Este método tiene características generales comunes con otros métodos; como son: Potencia de cálculo (manual o con ordenador), campo de aplicación. (Estructuras de elevado grado de hiperestaticidad) y otras; pero se diferencia de aquéllos, fundamentalmente, en los siguientes aspectos:

- Se cumplen simultáneamente todas las condiciones por lo que resulta general para cualquier situación y no sólo para situaciones particulares (p. ej. rotura) como es corriente en otros métodos.
- Al transformar el problema no lineal en superposición de problemas lineales se tienen características comunes en ellos (p. ej.: matriz de rigidez, etc...).
- Tiene una gran flexibilidad en cuanto a la forma de abordar dichos problemas (equilibrio, compatibilidad) y a la forma de resolverlos.

De los resultados de los casos de aplicación se deduce que el concepto de redistribución, en el sentido de tendencia a reducir el desequilibrio entre los máximos momentos positivos y negativos en cada pieza, es muy relativo (y mucho más, en el sentido más restrictivo, recogido incluso por la normativa española EH-73, de disminución de los momentos negativos sobre apoyos), advirtiéndose que procede y tiene algún sentido en un ámbito estructural restringido (vigas continuas, etc...) pero se pierde en un ámbito estructural más general.

Factores como el tipo de estructura (vigas continuas, pórticos, etc...), relación entre rigideces (sin fisurar  $K_1 = E_c I$ ) de los distintos elementos que concurren en un mismo nudo, cuantía de la armadura, etc. son decisivos en toda esta problemática, revelando la imposibilidad de sacar consecuencias simples y claras, como ésta de la redistribución, sin un estudio amplio aplicado en un ámbito suficientemente general.

## 5. BIBLIOGRAFIA

- AGUADO, A.— Estudio del análisis no lineal de estructuras de Hormigón mediante superposición de problemas lineales en deformaciones. Tesis doctoral. Universidad Politécnica de Barcelona. Febrero 1980.
- APARICIO, A.— Evolución hasta la rotura por solicitaciones normales de tableros continuos de puentes de hormigón armado y pretensado. Tesis doctoral. Universidad de Santander 1980.
- FUSTER, P.— Contribución al cálculo de esfuerzos y desplazamientos en estructuras de hormigón. Tesis doctoral. Universidad Politécnica de Valencia 1979.
- MACCHI, G.— Méthode des rotations imposées. Exposé de la méthode et exemple de calcul. C.E.B. International course on structural concret. L.N.E.C. Lisbon 1973.
- TEXEIRA COELHO, A.M.— Sobre o comportamento nao-linear das estruturas hiperestáticas de betão armado. Tesis de especialista. L.N.E.C. Lisboa Abril 1965.
- TOLACCIA, S.— Contribution Expérimentale en Calcul Plastique des Poutres Hyperstatiques en Béton Armé. Mémoires Association Internationale des Ponts et Chapentes. Vo. 22. Zürich 1962.

### FE DE ERRATAS

Los autores del artículo titulado "Influencia económica de las torsiones en un edificio no simétrico sometido a esfuerzos laterales", Sres. Da Cunha y P. Matesanz, han advertido las siguientes erratas en el trabajo publicado en el número 136 de Hormigón y Acero.

| Página | Línea | Dice   | Debe decir   |
|--------|-------|--|--|
| 23     | 9     | $B = (-\rho_o \operatorname{sen} \theta)$                        | $B = \begin{bmatrix} -\rho \operatorname{sen} \theta \\ 0 \end{bmatrix}$ |
| 23     | 10    | $D = (\rho_o \omega \theta)$                                     | $D = \begin{bmatrix} \rho \cos \theta \\ 0 \end{bmatrix}$                |
| 23     | 23    | $S R_{uj} B - C R_{vj} D$  | $S R_{uj} B + C R_{vj} D$  |
| 23     | 24    | $E_1 R_{uj} B + D_1 R_{vj} D + R_{wj}$                           | $B_1 R'_{uj} B + D_1 R'_{vj} D + R_{wj}$                                 |
| 23     | 29    | $\sum_j (C R_{uj} E - S R_{vj} D)$                               | $\sum_j (C R_{uj} B - S R_{vj} D)$                                       |
| 24     | 26    | $\sum_j (\rho_j^2 \operatorname{sen}^2 \alpha_j R_{uj} + \dots)$ | $\sum_j (\rho_j^2 \operatorname{sen}^2 \alpha_j R'_{uj} + \dots)$        |

## **Instrucción para la ejecución de obras de hormigón pretensado EP - 80**

En el Boletín Oficial del Estado núm. 216, del 8 de setiembre del presente año 1980, se incluye el REAL DECRETO 1789/1980, de 14 de abril, por el que se modifica la "Instrucción para el proyecto y la ejecución de obras de hormigón pretensado, E.P.-77", en vigor con carácter obligatorio desde el 23 de junio de 1979.

Según se dispone en dicho Decreto, la Instrucción E.P.-77, con estas modificaciones pasa a denominarse E.P.-80.

Por estimar que el tema ha de resultar de especial interés para todos los Miembros de nuestra Asociación Técnica Española del Pretensado, a continuación se reproduce íntegra y literalmente el mencionado Decreto, para general conocimiento.

No queremos, por el momento, hacer ningún comentario sobre el particular. Pero teniendo en cuenta que esta Instrucción afecta muy directamente a cuantos desarrollan sus actividades dentro del amplio campo de la técnica del pretensado, la Asociación tiene en estudio la programación de una Mesa redonda con el objeto de poder comentar ampliamente, en un coloquio abierto, el nuevo texto que ahora entra en vigor con carácter de obligatoriedad. En su día, se cursarán las oportunas invitaciones a todos los Miembros de la A.T.E.P. para que puedan participar en este coloquio.

### **MINISTERIO DE OBRAS PUBLICAS Y URBANISMO**

*19503 REAL DECRETO 1789/1980, de 14 de abril, por el que se modifica la "Instrucción para el proyecto y la ejecución de obras de hormigón pretensado (EP-77)".*

La "Instrucción para el proyecto y ejecución de obras de hormigón pretensado (EP - setenta y siete)" fue aprobada por Real Decreto mil cuatrocientos ocho/mil novecientos setenta y siete, de dieciocho de febrero, entrando en vigor con carácter obligatorio el veintitrés de junio de mil novecientos setenta y nueve.

La Comisión Permanente del Hormigón, encargada de la redacción y revisión de la mencionada Instrucción, ha venido recogiendo observaciones, experiencias y estudios relaciona-

dos con los temas de hormigón pretensado, y a la vista de todos ellos ha considerado oportuno introducir algunas modificaciones que, respetando los principios básicos de la Instrucción, mejoran su texto.

En su virtud, a iniciativa de la Comisión Permanente del Hormigón y a propuesta del Ministro de Obras Públicas y Urbanismo y previa deliberación del Consejo de Ministros en su reunión del día once de abril de mil novecientos ochenta,

#### DISPONGO :

Artículo único. Se aprueban las modificaciones a la “Instrucción para el proyecto y ejecución de obras de hormigón pretensado (EP-setenta y siete)” que figuran como anejo al presente Decreto.

La Instrucción EP-setenta y siete con estas modificaciones se denominará abreviadamente EP-ochenta.

Dado en Madrid a catorce de abril de mil novecientos ochenta

JUAN CARLOS R.

El Ministro de Obras Públicas y Urbanismo,  
JESUS SANCHO ROF

#### ANEXO

##### MODIFICACIONES A LA INSTRUCCION PARA EL PROYECTO Y LA EJECUCION DE OBRAS DE HORMIGON PRETENSADO EP-77

1.º Artículo 1.º Segundo párrafo, tercer guión. Quedará redactado:

“Los elementos estructurales mixtos de hormigón pretensado y perfiles de acero y, en general, las estructuras mixtas de hormigón pretensado y otro material, de distinta naturaleza, con función resistente”.

2.º Artículo 1.º Comentarios, tercer párrafo, quedará redactado:

“En el Código Modelo CEB-FIP de 1978 se clasifican los hormigones de acuerdo con su peso específico en:

|             |                                      |
|-------------|--------------------------------------|
| Hormigones: | Peso específico                      |
| Ligeros     | de 1.200 a 2.000 kg/m <sup>3</sup>   |
| Normales    | de 2.001 a 2.800 kg/m <sup>3</sup>   |
| Pesados     | superiores a 2.800 kg/m <sup>3</sup> |

3.º Artículo 1.º Comentarios, séptimo párrafo, quedará redactado:

“Los elementos estructurales mixtos exigen el empleo de técnicas especiales y métodos de cálculo específicos. Por ello no se incluyen dichos elementos en el campo de aplicación de esta instrucción”.

4.º Artículo 5.º Segundo párrafo, quedará redactado:

“La convención de signos y notación utilizados se adaptan a las normas generales al efecto establecidas por el Comité Mixto CEB-FIP (Comité Eurointernacional del Hormigón - Federación Internacional del Pretensado)”.

5.º Apartado 7.1. Segundo párrafo, quedará redactado:

“El contenido de ion  $\text{Cl}^-$  en el cemento, determinado con arreglo al método de ensayo descrito en el anejo número 3 deberá limitarse a un máximo de 0,03 por 100 en peso”.

6.º Apartado 9.1. Comentarios. Después del quinto párrafo añadir el siguiente:

“De los tres grupos de ensayos citados, en 9.3 se recogen solamente los del primero, más el de heladicidad correspondiente al segundo. No siendo este último ensayo de interés general, su obligatoriedad se deja, como es lógico, a criterio del pliego de prescripciones técnicas particulares, el cual podrá exigir además, a la vista de las circunstancias que concurran en la obra de que se trate, la realización de los ensayos adicionales que considere oportunos”.

7.º Apartado 11.2. Tercer párrafo, quedará redactado:

“A los efectos de esta Instrucción, cualquier característica de calidad medible de una amasada vendrá expresada por el valor medio de un número de determinaciones (igual o superior a tres) de la característica de calidad en cuestión, realizadas sobre partes o porciones de la amasada”.

8.º Apartado 12.3. Primer párrafo, quedará redactado:

“12.3. Barras corrugadas: Barras corrugadas, a los efectos de esta Instrucción, son las que presentan, en el ensayo de adherencia por flexión descrito en el anejo número 5 “Homologación de la adherencia de barras corrugadas” de la EH-73, una tensión media de adherencia  $\tau_{bm}$  y una tensión de rotura de adherencia  $\tau_{bu}$  que cumplen simultáneamente las dos condiciones siguientes:

$$\begin{array}{ll} \text{Para } \phi < 8: & \tau_{bm} \geq 70 \text{ kp/cm}^2 \\ & \tau_{bu} \geq 115 \text{ kp/cm}^2 \\ \text{Para } 8 < \phi < 32: & \tau_{bm} \geq 80 - 1,2 \phi \\ & \tau_{bu} \geq 130 - 1,9 \phi \\ \text{Para } \phi > 32: & \tau_{bm} \geq 42 \text{ kp/cm}^2 \\ & \tau_{bu} \geq 69 \text{ kp/cm}^2 \end{array}$$

donde  $\tau_{bm}$  y  $\tau_{bu}$  se expresan en  $\text{kp/cm}^2$  y  $\phi$  en milímetros”.

9.º Apartado 13.1. Segundo párrafo, tercer guión, quedará redactado:

“Torzal: Conjunto formado por dos o tres alambres de igual diámetro, todos ellos arrollados helicoidalmente, con el mismo paso, sobre un eje ideal común”.

10. Apartado 13.1. Segundo párrafo, cuarto guión, quedará redactado:

“Cordón: Conjunto formado por más de tres alambres de igual diámetro, arrollados conjuntamente en forma helicoidal y con el mismo sentido de torsión alrededor de un eje central que puede o no estar materializado por otro alambre”.

11. Apartado 13.3. Quinto párrafo, quedará redactado:

“Los valores del diámetro nominal, en milímetros, de los alambres cuya utilización se recomienda serán los de la serie siguiente:

3, 3,5, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 y 12 mm”

12. Apartado 15.1. Comentarios. Decimoprimer párrafo, quedará redactado:

“Coeficiente de eficacia de un tendón anclado es la relación entre la carga de rotura del

tendón con su anclaje y el valor medio de la carga máxima que es capaz de resistir el tendón sólo en el ensayo normalizado de tracción de los aceros. Se exige un valor del coeficiente de eficacia superior en el caso de tendones no adherentes debido a que un aumento en la fuerza de dichos tendones se transmite al anclaje, mientras que en el caso de tendones adherentes dicho aumento se distribuye a lo largo del tendón, por adherencia.

13. Artículo 25. Octavo párrafo, quedará redactado:

“Cuando excepcionalmente se utilicen agua o áridos calentados a temperatura superior a la antes indicada, se cuidará de que el cemento, durante el amasado, no entre en contacto con ellos mientras su temperatura sea superior a 40°C”.

14. Apartado 39.3. Segundo párrafo, quedará redactado:

“A efectos de cálculo, el valor final ponderado  $\gamma_p P_k$  no podrá considerarse superior al que corresponde a una tensión en las armaduras activas igual a  $0,6 f_{máx,k}$ ”.

15. Apartado 42-1.º a.1, tercer párrafo, quedará redactado:

“Además de lo anterior, si las cargas permanentes del mismo origen son preponderantes y sus efectos se compensan sensiblemente entre sí, se establecerá una nueva hipótesis diferenciando la parte favorable y la desfavorable empleando:

para la favorable:  $\gamma_{fg} = 0,9$ ”

16. Artículo 42. Párrafo “Hipótesis de carga”. La hipótesis III quedará:

“Hipótesis III:  $0,8 (\gamma_{fg} \cdot G + \gamma_{fq} \cdot Q_{eq}) + F_{eq} + W_{eq}$ ”

17. Artículo 45. Comentarios. Segundo párrafo, primer guión, quedará redactado:

“Si el esquema estático corresponde a la situación de servicio, la hipótesis de carga sería la que se indica en la figura 45.2, donde  $\gamma$  queda a juicio del proyectista con el valor mínimo indicado”.

18. Artículo 45. Comentarios. Segundo párrafo, segundo guión, quedará redactado:

“Si el esquema estático corresponde exclusivamente a una situación de construcción, la hipótesis de carga sería la que se indica en la figura 45.3, donde  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  quedan a juicio del proyectista con los valores mínimos indicados”.

19. Apartado 46.5. Suprimir el último párrafo.

20. Apartado 47.8. Añadir antes del segundo párrafo:

“Todas las unidades expresadas en kilogramos y centímetros”.

21. Apartado 48.1.3.4.2. La definición de  $V_{cuo}$  quedará de la siguiente forma:

“ $V_{cuo} = f_{cv} b_o d_2$ , con  $f_{cv} = 0,5 \sqrt{f_{cd}}$ , y siendo  $d_2$  la distancia entre la cara más comprimida y el centro de gravedad de la resultante de tracción en la armadura principal de flexión”.

22. Apartado 48.1.3.5.2. La primera fórmula quedará:

$$\Delta T = \left( V_{rd} - \frac{V_{su}}{2} \right) \cotg \theta - \frac{V_{su}}{2} \cotg \alpha$$

23. Apartado 48.1.3.5.2. La segunda fórmula quedará:

$$A_{sl} f_{yd} = \left( V_{rd} - \frac{V_{su}}{2} \right) \cotg \theta - \frac{V_{su}}{2} \cotg \alpha$$

24. Apartado 48.1.3.7. Quedará redactado:

“48.1.3.7. *Piezas compuestas.*

Para el cálculo de piezas estructurales compuestas (es decir, constituidas por elementos de hormigón de diferente edad que se unen formando un todo) sometidas a esfuerzo cortante, la resistencia de cada elemento y de la junta entre ambos se estudiará de acuerdo con lo indicado en 48.1.2 a 48.1.3.6, teniendo en cuenta los puntos siguientes que están referidos al caso más común de elemento prefabricado pretensado con cabeza hormigonada in situ.

48.1.3.7.1. *Cálculos relativos al elemento prefabricado pretensado.*

a) Las tensiones normales se obtendrán en función de las cargas actuantes –incluido el pretensado– y de la sección real existente en cada fase de comprobación.

b) A efectos del cálculo de  $\cotg \theta$ , se tomará para  $\sigma_{xd}$  el valor más bajo de entre los que resulten para las distintas fibras baricéntricas correspondientes a cada fase. Cuando, como es corriente, la cabeza hormigonada in situ sea de compresión, podrá tomarse para  $\sigma_{xd}$  la que resulta en la fibra baricéntrica de la sección mixta final.

c) Los cantos  $d_1$  y  $d_2$ , utilizados para el cálculo  $V_{u1}$  y  $V_{u2}$ , se obtendrán a partir de la sección real existente en cada fase de comprobación.

48.1.3.7.2. *Cálculos relativos a la cabeza hormigonada in situ.*

a) Las tensiones normales se obtendrán en función exclusivamente de las acciones –incluido el pretensado– que se apliquen con posterioridad al endurecimiento del hormigón de la cabeza, a partir de las secciones existentes en cada fase.

b) Para la obtención de  $V_{rd}$  se deducirá  $V_d$  a partir de las acciones exteriores totales, mientras que para el cálculo de  $V_{pd}$  se tendrá en cuenta solamente el pretensado introducido con posterioridad al endurecimiento del hormigón de la cabeza. En cuanto a  $V_{cd}$ , se deducirá en función de los  $V_d$  y  $V_{pd}$  así obtenidos.

c) Es de aplicación el punto c) de 48.1.3.7.1.

48.1.3.7.3. *Cálculos relativos a la junta entre elementos prefabricados y cabeza hormigonada in situ.*

a) Es preceptiva la comprobación de la resistencia a esfuerzo cortante en esta junta.

b) Es de aplicación lo indicado en los puntos a), b) y c) de 48.1.3.7.2.

c) Por otra parte, y de no existir disposiciones especiales, experimentalmente comprobadas, que aseguren la adherencia, se recomienda que la cuantía mínima de armadura del alma que cruce la junta entre el elemento prefabricado y la cabeza hormigonada in situ sea igual a vez y media la indicada en 48.1.3.5.1.

## COMENTARIOS

Para el cálculo de la armadura de cosido a las almas de cabezas hormigonadas in situ sobre elementos prefabricados no puede tenerse en cuenta el efecto favorable del pretensado mas que si se ha introducido con posterioridad al endurecimiento del hormigón de la cabeza. Lo mismo puede decirse respecto a la unión al alma, de las alas de tal cabeza.

Por otra parte, hay que tener en cuenta que en situación de agotamiento la cabeza comprimida puede quedar incluida por completo en el ala hormigonada in situ, por lo que se ha de transmitir a través de la junta con el elemento prefabricado la totalidad del volumen de compresiones.

Esta es la razón por la que se incluye la prescripción 48.1.3.7.2.b), necesaria en el cálculo a esfuerzo cortante de secciones sometidas simultáneamente a fuertes momentos como, por ejemplo, en las secciones de apoyo de vigas continuas. Cuando no ocurra así, en el cálculo de la armadura de cosido en la junta puede utilizarse para  $V_{pd}$  el esfuerzo cortante deducido a partir de las cargas exteriores y del esfuerzo de pretensado, introducidos con posterioridad al endurecimiento de la cabeza hormigonada in situ”.

25. Apartado 58.2. tercer párrafo. Quedará redactado:

“Armaduras pasivas: Las barras utilizadas para estribos o eventualmente otras misiones cumplirán las condiciones del artículo 12º, ampliando la gama de diámetros hasta 4 milímetros. También podrán utilizarse como estribos los alambres y barras de pretensado que cumplan las condiciones del artículo 13º.

26. Apartado 58.2. Intercalar después del sexto párrafo el siguiente:

“Piezas cerámicas: Sólo podrá considerarse la colaboración resistente de elementos cerámicos que formen parte de la vigueta o semivigueta cuando su resistencia característica sea al menos 250 kp/centímetro cuadrado”.

27. Apartado 58.3, sexto párrafo. Quedará redactado:

“Determinación de la resistencia a compresión. La resistencia a compresión del material de la pieza se determina en dirección paralela a los huecos sobre seis o más probetas de pieza entera o parte de pieza representativa obtenida por corte con disco. La altura de la probeta será igual o mayor que la menor de las dos dimensiones de la sección transversal de la probeta, sin exceder de dos veces dicha dimensión. Las caras de presión se refrentarán adecuadamente con pasta de azufre u otro sistema. Se ensayarán después de veinticuatro horas de inmersión en agua. La tensión de rotura se referirá a la sección neta de la probeta, y se obtendrá el valor característico de los resultados aplicando la fórmula del estimador de 66.3”.

28. Apartado 58.5, octavo párrafo. La fórmula quedará:

$$V_d \leq V_{uo} = 2 \psi f_{cv} b_w d_1$$

29. Apartado 58.5, octavo párrafo la definición de  $\psi$  quedará:

“ $\psi = 0,5 + 33 \rho_0 \geq 1$  coeficiente función de la cuantía  $\rho_0$ , de la armadura longitudinal, referida a la sección de la semivigueta”.

30. Apartado 73.1. Comentarios. Suprimir la última frase del primer párrafo, que dice:

“Lo mismo puede decirse respecto al corte, doblado y colocación de barras”.

31. Anejo 1. Notación. En el epígrafe minúsculas romanas incluir:

“ $f_{ckj}$  = resistencia característica a compresión del hormigón a  $j$  días de edad”.

32. Anejo 1. Notación. En el epígrafe minúsculas romanas suprimir:

“ $f_j$  = resistencia característica a compresión del hormigón a  $j$  días de edad”.

33. Anejo 1. Notación. En el epígrafe minúsculas romanas la definición de  $f_{yd}$  quedará:

“ $f_{yd}$  = límite elástico de cálculo de un acero”.

34. Anejo 2. Definiciones. La definición de Torzal quedará:

“Torzal: Conjunto formado por dos o tres alambres de igual diámetro, todos ellos arrollados helicoidalmente, con el mismo paso, sobre un eje ideal común”.

35. Anejo 2. Definiciones. La definición de cordón quedará:

“Cordón: Conjunto formado por más de tres alambres de igual diámetro arrollados conjuntamente en forma helicoidal y con el mismo sentido de torsión alrededor de un eje central que puede o no estar materializado por otro alambre”.

36. Anejo 3. Métodos de ensayo. Método de ensayo para la determinación de las características de adherencia de las armaduras de pretensado.

Apartado 3.4. La fórmula quedará:

$$\sigma_{\delta} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{i=n} (\delta_i - \delta_m)^2}{n - 1}}$$

37. Anejo 3. Métodos de ensayo. Métodos de ensayo para la determinación de cloruros en cemento y áridos para la construcción. Apartado 4, octavo guión. Quedará:

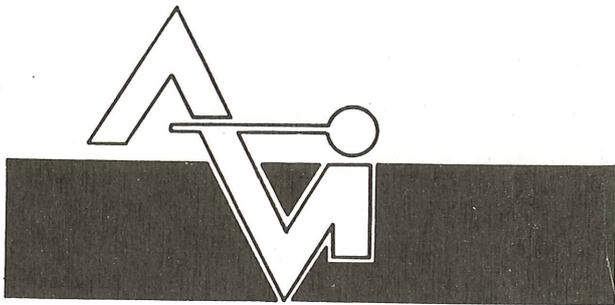
“Pipetas aforadas de 1, 2, 5, 10 y 20 ml”.

38. Anejo 3. Métodos de ensayo. Método de ensayo para la determinación de cloruros en cementos y áridos para la construcción. Apartado 6.2.1, segundo párrafo. Quedará redactado:

“Las cantidades de la “disolución patrón de cloruros”, añadidas a los siete primeros matraces, son, respectivamente: 40, 20, 10, 5, 4, 2 y 1 ml, que se miden con pipetas aforadas. Al último matraz (número 8) no se le incorpora cantidad alguna de la mencionada “disolución patrón de cloruros”.

39. Anejo 3. Métodos de ensayo. Método de ensayo para la determinación de cloruros en cementos y áridos para la construcción. Apartado 9.1. Quedará redactado:

“9.1. Precisión: Los resultados de dos ensayos no deben diferir entre sí en más del 0,005 por 100”.



PREFABRICACION LIGERA Y PESADA

**ALVISA**

PREFABRICADOS ALBAJAR

**PUENTES - NAVES INDUSTRIALES - FORJADOS  
BOVEDILLAS - LADRILLOS - TEJAS - TUBOS DRENAJE**



**FABRICAS:**

HUESCA: Paseo Lucas Mallada, s/n. - Teléfono 22 39 00 (cinco líneas). (Casa central.)

MONZON: Carretera de Lérida - Teléfono 40 07 80.

GRAÑEN: Carretera de Huesca - Teléfono 27.

MADRID: Carretera de Toledo, Km. 7,300 - Teléfono 695 25 68.

ZARAGOZA: Avda. de Marina Moreno, 31 - Teléfono 23 75 02 3. (Comercial zona norte.)

MADRID: Carretera de Torrejón a Loeches, Km. 4,200 - Teléfono 675 04 50. TORREJON DE ARDOZ.

Fábricas: Carretera de Toledo, Km. 7,300 - Teléfono 695 25 68. GETAFE.

Oficinas: Orense, 10 - Teléfono: 455 05 35/6/7. MADRID-20.

# Medidas de seguridad en los trabajos de pretensado

(con armaduras postesas).  
**Nota Informativa**  
 The Concrete Society

## INTRODUCCION

La finalidad de estas notas es establecer las medidas preventivas básicas necesarias para conseguir que la puesta en tensión se realice con toda seguridad, y dar a conocer las prescripciones sobre Higiene y Seguridad, que establece la Safety at Work Act, 1974 (Ley Inglesa sobre Higiene y Seguridad en el Trabajo de 1974). Las operaciones en lo que se refiere al tesado y destesado de los tendones de pretensado, no son peligrosas con tal de que se adopten las adecuadas precauciones. Las principales causas de que el pretensado no se realice en las debidas condiciones son:

LA IGNORANCIA – falta de dirección y vigilancia.

LA FALTA DE PLANIFICACION Y PREPARACION

EL EXCESO DE CONFIANZA

Tanto los empresarios como los empleados tienen la obligación de observar y responsabilizarse de todo lo que queda especificado bajo los epígrafes 2, 3, 7 y 8 de la Ley Inglesa de Higiene y Seguridad en el Trabajo de 1974.

## EMPRESARIOS

“2.1 Es obligación de todo empresario conseguir, hasta donde sea razonablemente posible, unas condiciones satisfactorias de higiene, seguridad y facilidad en el trabajo para todos sus empleados.

2. Sin perjuicio de lo que, en términos generales, se afirma en el apartado precedente sobre las obligaciones del empresario, los pormenores referentes a las obligaciones del mismo comprenden en particular:

*a* El acondicionamiento y mantenimiento de la planta y de los sistemas de trabajo para que sean, hasta donde sea razonablemente posible, seguros y sin riesgos para la salud.

*b* Adoptar las debidas medidas para garantizar, hasta donde sea razonablemente posible, la seguridad y la ausencia de riesgos para la salud en lo que respecta al uso, almacenamiento y transporte de artículos y sustancias.

*c* Conseguir suficiente información, instrucción, aprendizaje y supervisión, hasta donde sea razonablemente posible, para alcanzar un adecuado nivel de seguridad e higiene en el trabajo de sus empleados.

*d* Hasta donde sea razonablemente posible, cualquier puesto de trabajo debe estar bajo control del empresario, manteniendose el mismo en unas condiciones tales que sea seguro y sin riesgos para la salud, dotándole de medios de acceso y salida de él que sean seguros y sin tales riesgos.

3.1 Es obligación de cada empresario realizar su cometido de tal forma que se garantice, hasta donde sea razonablemente posible, que las personas que no estén a su servicio, pero que puedan quedar afectadas por los trabajos, no resulten expuestas a riesgos en su salud o seguridad”.

## EMPLEADOS

“7. Es obligación de cada empleado durante el trabajo:

*a* Velar por el cuidado de su propia salud y seguridad y la de otras personas que puedan resultar afectadas por sus actos o por su negligencia al realizar su trabajo; y

*b* Respecto a cualquier obligación o exigencia ordenada por su empresario, o por otra determinada persona, por o en base a algunas de las reglamentaciones estatutarias de rango, para que coopere con el hasta donde sea preciso al realizar o llevar a cabo aquella”.

8. Ninguna persona, intencionadamente o negligentemente, interferirá o abusará de aquellas cosas previstas con la finalidad de servir para la higiene, seguridad o bienestar, teniendo la obligación de cumplir todas las estipulaciones de rango estatutario.

Las responsabilidades de los proyectistas, fabricantes y suministradores están reseñadas dentro de la Sección 6 de la citada Ley.

Las notas que aparecen a continuación se han basado en la experiencia positiva en el transcurso de muchos años y se han elaborado para ser utilizadas por el ingeniero o por el técnico encargado de vigilar el pretensado.

Se han establecido las siguientes condiciones:

*a* Las operaciones de tesado deberán ser realizadas por personal experimentado bajo la vigilancia de un competente supervisor. Cuando en trabajos de tesado se utilice personal en período de adiestramiento esta operación también se realizará bajo la vigilancia de un supervisor competente.

*b* El diseño y la construcción de la estructura deben ser de gran calidad.

*c* Todo el equipo debe ser de primera calidad y estar adecuadamente conservado.

## ALCANCE

Estas notas comprenden las operaciones relacionadas con el postesado y se basan en los procedimientos prácticos británicos. Mientras no se especifique lo contrario, se deberá tener en cuenta que los nuevos métodos de pretensado podrán requerir especiales precauciones a adoptar, además de las que se señalan en el presente documento.

Estas notas se han propuesto, en un principio, para las operaciones de pretensado realizadas a pie de obra, no comprendiendo específicamente los siguientes casos:

- I En el tesado previo.
- II Cuando se utilicen crucetas en bancadas de producción de prefabricados.
- III Respecto a las medidas preventivas a adoptar después del pretensado, comprendida la inyección.

## PRECAUCIONES QUE ES PRECISO ADOPTAR ANTES DEL TESADO

### Almacenamiento y manipulación de los materiales

1. Todas las barras, alambres y cordones se almacenarán en las debidas condiciones y se tomarán toda clase de medidas para que no se dañen o deterioren en modo alguno. Todos los tendones se almacenarán suficientemente separados del suelo para evitar su oxidación o corrosión, que puede originarse por acumulación de agua en reposo o por nieve. Los tendones sin una capa protectora, que deban permanecer almacenados durante períodos de tiempo prolongado se resguardarán de tal forma que queden protegidos de los elementos.

2. Es obligatorio el uso de guantes de trabajo y otras protecciones apropiadas de seguridad cuando se manipulan los tendones de pretensar.

3. Se tendrá especial cuidado al manejar los rollos de alambre de acero de alta resistencia así como los cordones, puesto que pueden desenrollarse con fuerza si no están firmemente amarrados.

## GENERALIDADES

1. Es preciso garantizar que los observadores se encuentren fuera de la zona donde se realizan las operaciones de tesado.

2. Se colocarán grandes carteles con el aviso, "ATENCIÓN – SE ESTA REALIZANDO EL TESADO – MANTENGANSE ALEJADOS", para indicar al resto de los trabajadores y a los transeuntes la posibilidad de riesgos.

3. Se acotará la zona alrededor de la pieza que se está tesando de modo que ninguna persona, no autorizada, pueda acercarse durante las operaciones de tesado.

4. Cuando la operación de tesado deba realizarse en una zona determinada desde un andamio, se dispondrán los medios necesarios para el acceso del personal y el correspondiente utillaje. El área reservada para estos fines deberá ser lo suficientemente amplia para que los operarios trabajen con seguridad y el ingeniero (o la persona designada) pueda realizar la inspección, colocándose barandillas donde sea necesario.

5. Durante los trabajos de tesado se utilizarán cascos de seguridad.

6. No está permitido realizar soldaduras en las proximidades de los aceros de pretensar de altas resistencias. Si cae algo de metal fundido en un tendón pueden alterarse sus propiedades mecánicas y dar lugar a la posibilidad de una rotura prematura. El daño causado por un calentamiento inadvertido no es apreciable mediante una inspección visual.

7. No se utilizará soplete de acetileno para cortar a la medida o recortar los tendones antes del tesado, puesto que la zona afectada por el calor abarcará varias pulgadas a partir del corte, pudiéndose “gripar” las mordazas del gato en la zona mecánicamente debilitada. Si se utilizan cizallas o discos abrasivos, la zona donde se ha de realizar el corte deberá encontrarse a una distancia no inferior a un diámetro, a partir del anclaje permanente o del punto de sujeción del gato.

8. No se utilizará el acero de pretensar para conectar a tierra el equipo eléctrico o cualquier otro elemento, comprendiendo esto al equipo de soldadura. Cuando se forma un arco eléctrico desde o hacia un tendón se altera su estructura molecular produciéndose pérdidas de resistencia. Los conductores se colocarán debidamente separados de los tendones así como de los anclajes.

9. Antes de su utilización se comprobará todo el equipo. El equipo se mantendrá limpio y en condiciones de perfecta utilización. Un equipo deficientemente conservado origina anomalías y consecuentemente es peligroso. Se seguirán escrupulosamente las instrucciones del fabricante.

10. Cuando se monta un tendón es preciso revisar por separado cada alambre, cordón o barra para apreciar los posibles daños o defectos.

Es importante mantener el tendón exento de oxidación profunda y escamas de herrumbre. Una ligera película de óxido no es perjudicial, pero una fuerte corrosión o una superficie con picaduras sí lo es. En caso de duda, límpiese con cepillo de alambres y después procedase a su revisión. Si es necesario se ensayará el material con objeto de cerciorarse de la fiabilidad de los tendones y de si se ajustan a las especificaciones.

11. Se evitará a toda costa que las piezas de los anclajes permanentes lleguen a oxidarse. Es admisible una película superficial de óxido, pero de ninguna manera una fuerte herrumbre que no pueda eliminarse mediante cepillado con carda.

12. Es imprescindible cerciorarse que las superficies de asiento de los anclajes estén limpias de modo que las cuñas o tuercas no presenten impedimentos para su perfecto asiento.

13. Las roscas de las barras, tuercas y acoplamientos estarán limpias y se retirarán las envolturas de protección de las roscas inmediatamente antes de su utilización. No se empleará la parafina como fluido limpiador.

14. La operación de tesado tendrá lugar tan pronto como sea posible, una vez colocados los anclajes en posición.

## **PRECAUCIONES A ADOPTAR DURANTE EL TESADO**

1. No confiarse porque se hayan tesado anteriormente cientos de tendones. Las fuerzas que se están manejando son enormes y un descuido puede ocasionar pérdidas humanas.

2. El examen periódico de los circuitos hidráulicos es esencial y debe tenerse gran cuidado al volver a conectar las tuberías evitando que entre en ellas suciedad.

3. Utilizar exclusivamente juntas auto-estancas, de seguridad, en los conductos de

presión hidráulica, y tener cuidado de que no se produzcan flexiones en los empalmes extremos de dichos conductos.

4. Se utilizará únicamente equipo hidráulico provisto de una válvula de seguridad graduada para una carga máxima de tesado previo. La presión máxima de seguridad no será superior al 5 por ciento de la presión máxima de pretensado definida en la CP 110: Part 1: 1972. Sección 4.8.1.

5. Antes de proceder al tesado se especificará a los operarios la máxima lectura que ha de alcanzar el calibrador de carga (preferiblemente de tipo dinamométrico) y la máxima lectura de alargamiento. Si se alcanza la cifra especificada en el calibrador de carga, debe interrumpirse la operación de tesado. Únicamente podrá aumentarse esta carga con la debida autorización del ingeniero o de su representante.

6. El dinamómetro, la célula de carga y los manómetros de cada gato deben comprobarse a intervalos frecuentes con un calibrador patrón, operación que realizará el ingeniero de obra provisto de la correspondiente curva de tarado. En su defecto se utilizará un anillo de tarado o un comprobador de carga para hacer las pruebas a los intervalos especificados.

7. Se efectuará una doble prueba de las mordazas para comprobar el amarre de los tendones en los gatos de pretensar, antes de proceder al tesado. Las cuñas deberán estar perfectamente limpias. Se recuerda que los dientes de las cuñas no duran indefinidamente. En los sistemas con cabezas recalcadas se comprobará que cada alambre está dotado de la correspondiente cabecilla, antes de proceder al tesado.

8. Durante las operaciones de tesado nadie se situará detrás de los gatos, ni en la misma dirección de la parte extrema donde van los anclajes pasivos.

9. Se tesarán los tendones con una baja tensión inicial y se apretarán de nuevo las cuñas. Al mismo tiempo se alinearán los gatos.

10. También es necesario comprobar los anclajes pasivos.

11. Cuando solo se tesa por un extremo, en el opuesto deberá situarse una persona competente, para comprobar el perfecto asiento y encaje de los anclajes pasivos accesibles. Esto es particularmente importante en las etapas iniciales de tesado.

12. Antes de proceder a aflojar los gatos se comprobará nuevamente la sujeción del tendón.

NOTA: Aunque este documento informativo se ocupa exclusivamente de los trabajos específicos de tesado, es preciso hacer constar que las operaciones subsiguientes pueden ser peligrosas. Por ejemplo, los ojos de los operarios que hacen los trabajos de inyección se protegerán contra las salpicaduras de la lechada de cemento.

**Traducido por  
C. Sánchez Castro**

PUBLICACION DEL I.E.T.c.c.

INSTRUCCION DEL INSTITUTO EDUARDO TORROJA PARA TUBOS DE  
HORMIGON ARMADO O PRETENSADO

Redactada por la Comisión de Tubos de Hormigón.

Dentro de la Serie Naranja de Normas y Manuales que edita el Instituto acaba de aparecer este nuevo volumen que recoge la normativa actual más avanzada en el campo de los tubos de gran diámetro de hormigón armado o pretensado, en lo que respecta a su proyecto, cálculo, fabricación, puesta en obra y control.

Por iniciativa de los fabricantes de tubos y en colaboración con el Instituto Eduardo Torroja de la Construcción y del Cemento y otros Organismos, oficiales y privados, se constituyó la Comisión redactora de esta Instrucción, que tiene carácter de recomendaciones, y que actualiza todos los aspectos anteriormente mencionados.

Esta Instrucción pretende dar un tratamiento unitario, coherente y actual a la problemática de los tubos de hormigón armado y/o pretensado. Esto ha sido posible gracias a la actuación simultánea y coordinada de centros de investigación usuarios de la Administración Pública y privados, fabricantes de tuberías y fabricantes de acero, lo que, por otra parte, la ha dotado de un sentido realista, de posibilismo y de adecuación entre lo que se exige y lo que la tecnología acreditada nos ofrece hoy.

El título primero, "Realización de la obra", incluye tres capítulos: "Materiales", en el que se destacan las peculiaridades de los utilizables; "Fabricación", abierto a las técnicas más innovadoras, y "Transporte y montaje", síntesis de vastísimas experiencias.

El título segundo, "Realización del Proyecto", incluye tres capítulos: "Criterios hidráulicos", que son primordiales para conseguir la funcionalidad debida; "Criterios de durabilidad", que marcan las normas que deben seguirse cuando hay que hacer frente a agentes agresivos externos o internos, y "Criterios mecánicos", que de una forma sistemática aborda, desde la determinación de acciones hasta el dimensionamiento último.

El título tercero, "Realización del control", incluye cuatro capítulos. Los dos primeros, "Control de materiales" y "Control de ejecución", siguen la línea de las modernas Instrucciones que consideran básico un adecuado control, no sólo de los materiales componentes, sino de las fases de ejecución. El tercero, "Pruebas", constituye, sin duda, la parte más novedosa, ya que abandona el tradicional concepto de presión de prueba, como múltiplo de la presión interna, para referirse a la presión equivalente, que depende no sólo de la presión interna, sino también de las otras cargas actuantes. Finalmente, el cuarto capítulo, "Control de puesta en servicio y mantenimiento de la tubería", brinda unas pautas que se espera mejorarán la eficacia de futuras conducciones.

Un volumen encuadernado en rústica, de 16 x 23 cm, compuesto de 233 páginas, numerosas tablas y diversas figuras y ábacos. Precios: España 1.000 pts; extranjero, \$ 20.

# Estudio comparativo de la inestabilidad de soportes rectangulares de hormigón armado, según la Instrucción EH - 73, el Código ACI y los ábacos de J. J. Arenas

Luis Villegas Cabredo. Ingeniero de Caminos  
Departamento de Tecnología de las Estructuras  
E.T.S. de Ingenieros de Caminos  
Universidad de Santander

## RESUMEN

En el artículo se obtienen los axiles críticos que resiste un soporte de hormigón armado, de sección rectangular y biarticulado en sus extremos, en función de la esbeltez del mismo y según las normativas española y americana y los ábacos de dimensionamiento directo de J.J. Arenas (Referencia 5.1).

Se analizan los distintos factores que intervienen en el fenómeno de inestabilidad: dimensiones de la sección, cuantía de armaduras, resistencias de los materiales, excentricidad y esquema de actuación de las cargas, longitud del soporte y relación entre las cargas permanentes y totales que actúan sobre el mismo.

## 1. INESTABILIDAD DE SOPORTES SEGUN LA INSTRUCCION EH-73

¿Cómo “armaríamos” con la EH-73 en la mano un soporte de longitud  $L$ , de sección rectangular ( $b$ ,  $h$ ), biarticulado en sus extremos y sometido en ellos a unos axiles  $N$  que actúan con excentricidades  $e_0$  y  $e_1$ ?

La Instrucción nos dice, en principio, que, según sea el valor de su esbeltez geométrica  $\lambda$  ( $\lambda = L/h$ ) mayor o menor de 10, hemos de tener o no en cuenta su “efecto” a la hora de dimensionar las armaduras.

El “efecto de esbeltez” es el incremento de esfuerzos que tiene la pieza, en relación a los de primer orden que la solicitan, debido a las deformaciones que esos esfuerzos originan y que hacen que en piezas suficientemente esbeltas tengamos secciones interiores del soporte más solicitadas que las de los extremos, en que actúan unos axiles  $N$  y unos momentos flectores  $N \cdot e_0$  y  $N \cdot e_1$ .

En efecto, una pieza solicitada como hemos comentado anteriormente, tiene unos esfuerzos de primer orden que dependen del esquema de cargas que originen (véase figura 1, en la que no hemos representado los cortantes que existen en la pieza para que ésta se encuentre en equilibrio).

Cuanto más esbelta sea la pieza o mayores esfuerzos de primer orden la soliciten, mayores deformaciones  $D$  tendremos. Considerando el incremento de momentos flectores que éstas suponen, es decir, en un análisis de segundo orden, tendremos que los momentos que solicitan a nuestra pieza son mayores que los iniciales.

En la figura 1, se aprecia que para el esquema I de cargas, por muy pequeñas deformaciones que tengamos, siempre hay secciones del soporte más solicitadas que las extremas.

Sin embargo, en los esquemas II y III de cargas, para pequeñas deformaciones ( $D_1$ ), los momentos más desfavorables se encuentran en los extremos de la pieza, mientras que para grandes deformaciones ( $D_2$ ) existen secciones interiores del soporte que están en peores condiciones.

Para tener en cuenta lo anterior, la Instrucción española ordena actuar del siguiente modo:

- a) Para  $\lambda < 10$ , el “efecto de esbeltez” puede desprejarse y podemos armar el soporte analizando la sección extrema más solicitada; es decir, como las dos tienen igual  $N$ , la más desfavorable (como puede verse en un diagrama de interacción) será la solicitada por mayor momento, o sea, aquella en que la  $N$  actúa con mayor excentricidad.

Según lo anterior, nosotros iríamos a armar la sección (suponiendo que la más desfavorable es la sometida a  $N$  y  $N \cdot e_0$ ) con unos esfuerzos reducidos:

$$\nu = \frac{N_d}{f_{cd} \cdot b \cdot h}; \quad \mu = \frac{N_d \cdot e_0}{f_{cd} \cdot b \cdot h^2} = \nu \cdot \frac{e_0}{h}$$

Esto, en un diagrama de interacción (véase figura 2), nos permite trazar una recta  $\mu = \nu \cdot (e_0/h)$  de pendiente  $(e_0/h)$  sobre la cual avanzaremos a medida que aumente el axil  $\nu$ ; lo cual nos lleva a necesitar mayor cuantía  $\omega$  de acero, cuando crezca aquél.

- b) Para  $\lambda > 10$ , la esbeltez es lo suficientemente importante como para considerar su efecto. Por ello, la EH-73 exige que armemos el soporte según lo que necesite una sección genérica solicitada por un axil  $N$  y un momento  $N(e_0 + e_a)$ ; o sea, con solicitaciones mayores que las que soportan las secciones extremas. Es decir, iremos a los diagramas de interacción con unos esfuerzos reducidos:

$$\nu; \quad \mu = \nu \cdot \frac{e_0 + e_a}{h}$$

En la figura 2 se ve ahora que al aumentar el axil  $\nu$  nos moveremos sobre una recta de pendiente  $(e_0 + e_a)/h$  que va por encima de la que obtuvimos en el caso anterior (a), en

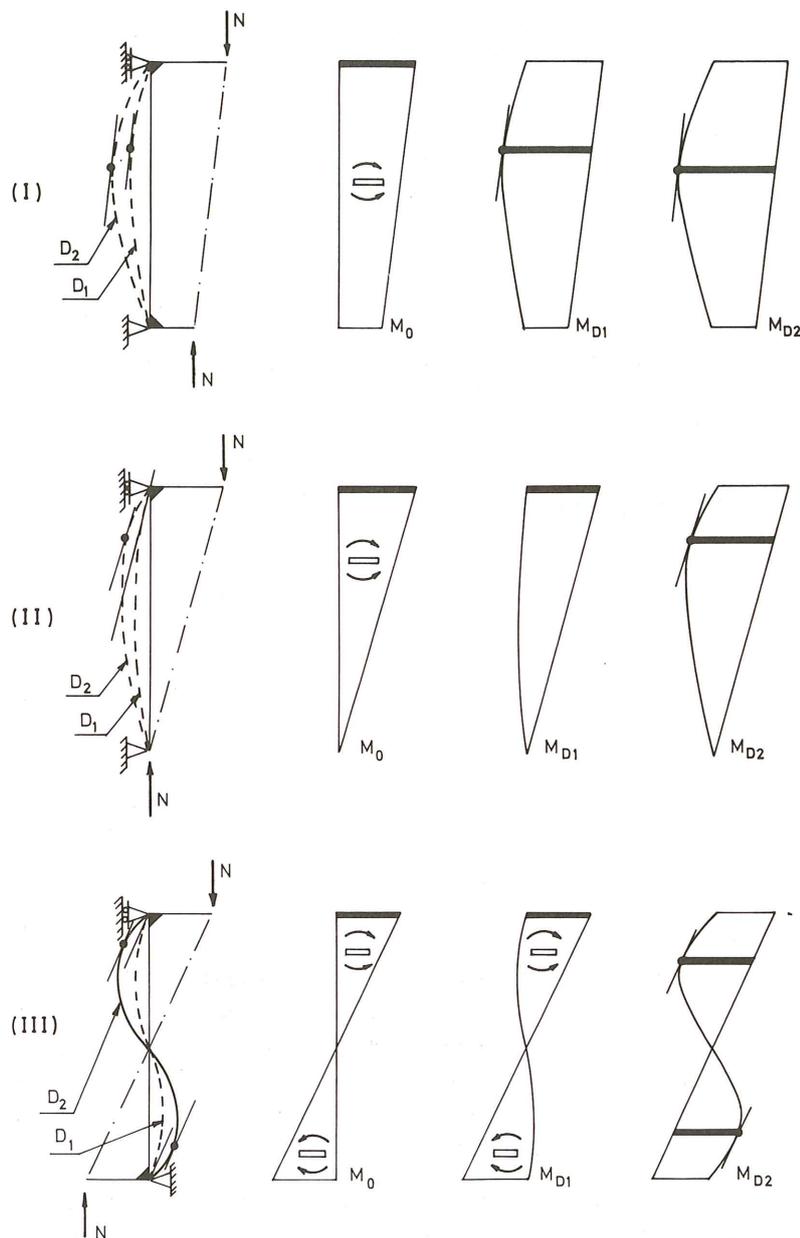


Fig. 1. Momentos flectores de "primer orden" ( $M_0$ ) y de "segundo orden" para deformaciones  $D_1$  ( $M_{D1}$ ) y  $D_2$  ( $M_{D2}$ ), en tres esquemas posibles de cargas.

que no considerábamos el efecto de la esbeltez. Vemos que para resistir un mismo axil  $\nu$ , en este segundo caso necesitamos mayor cuantía  $\omega$  que en el primero. Queda clara pues, la repercusión económica (mayor consumo de acero) que tiene el aumentar la esbeltez de las piezas, aunque no sólo hay que considerar dicho aspecto, pues podemos haber ganado con creces en el aspecto funcional o estético del soporte.

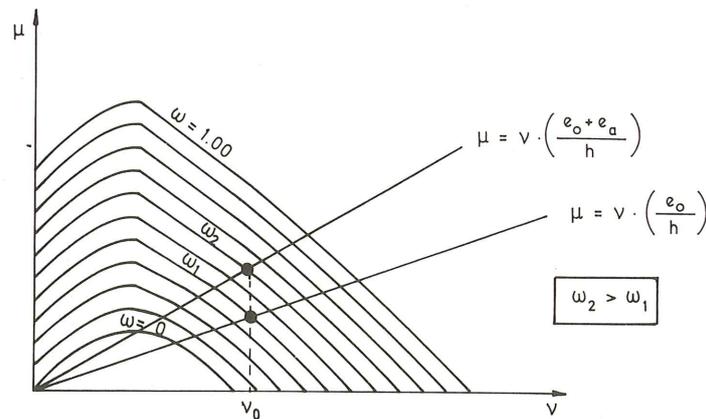


Fig. 2. Efecto de la excentricidad adicional  $e_a$  que propone EH-73.

¿Cómo evalúa la Instrucción española la excentricidad adicional  $e_a$ ?

En el caso de soportes rectangulares que nos ocupa:

$$\frac{e_a}{h} = \left[ 3 + \frac{f_{yd}}{3.500} \right] \cdot \frac{1 + 20 (e_0/h)}{1 + 10 (e_0/h)} \cdot \lambda^2 \cdot 10^{-4} \quad (f_{yd} \text{ en } \text{kp/cm}^2)$$

Vemos, pues, que para la EH-73, que introduce el efecto de la esbeltez a través de una excentricidad adicional, ésta depende de:

- La calidad del acero.
- La excentricidad relativa ( $e_0/h$ ) de la carga.
- La esbeltez geométrica  $\lambda$  de la pieza.

La Instrucción no dice para nada que dependa del esquema de cargas que está solicitando al soporte, con lo que, parece lógico que cubra el caso más desfavorable que pueda presentarse, es decir, el primero que vimos en la figura 1, en que teníamos actuando en los extremos de la pieza axiles con excentricidades de igual signo. Tampoco se introduce para nada la diferencia que existe en el comportamiento del soporte frente a cargas que actúan de modo permanente o instantáneo, siendo también imaginable que se está cubriendo la primera de estas hipótesis, que es la más desfavorable.

Para responder a esas dos cuestiones anteriores hemos ido a comparar los resultados que proporciona nuestra Instrucción con los que dan los Abacos de J.J. Arenas y los del Código ACI, métodos ambos que tienen en cuenta los mencionados aspectos (diferente comportamiento del soporte según sea el esquema de cargas que lo solicite y según sea el valor de la relación entre cargas permanentes frente a las cargas totales, factor  $\beta$  en dichos métodos,  $\beta = \text{CP/CT}$ ).

Se han obtenido unas curvas, (véanse figuras 4, 5, 6, 7 y resultados del apartado tercero), que nos dan, para cada valor de la esbeltez  $\lambda$ , el axil  $\nu$  que soporta la pieza armada con una cuantía  $\omega$  prefijada; y esto se ha hecho para diferentes excentricidades relativas ( $e_0/h$ ) de las cargas.

Actuando con la EH-73, sólo tendremos una curva en ejes ( $\nu, \lambda$ ), prefijados unos valores de  $\omega$  y  $e_0/h$ . Con los Abacos de J.J. Arenas tendremos un total de 9 curvas, pues en ellos

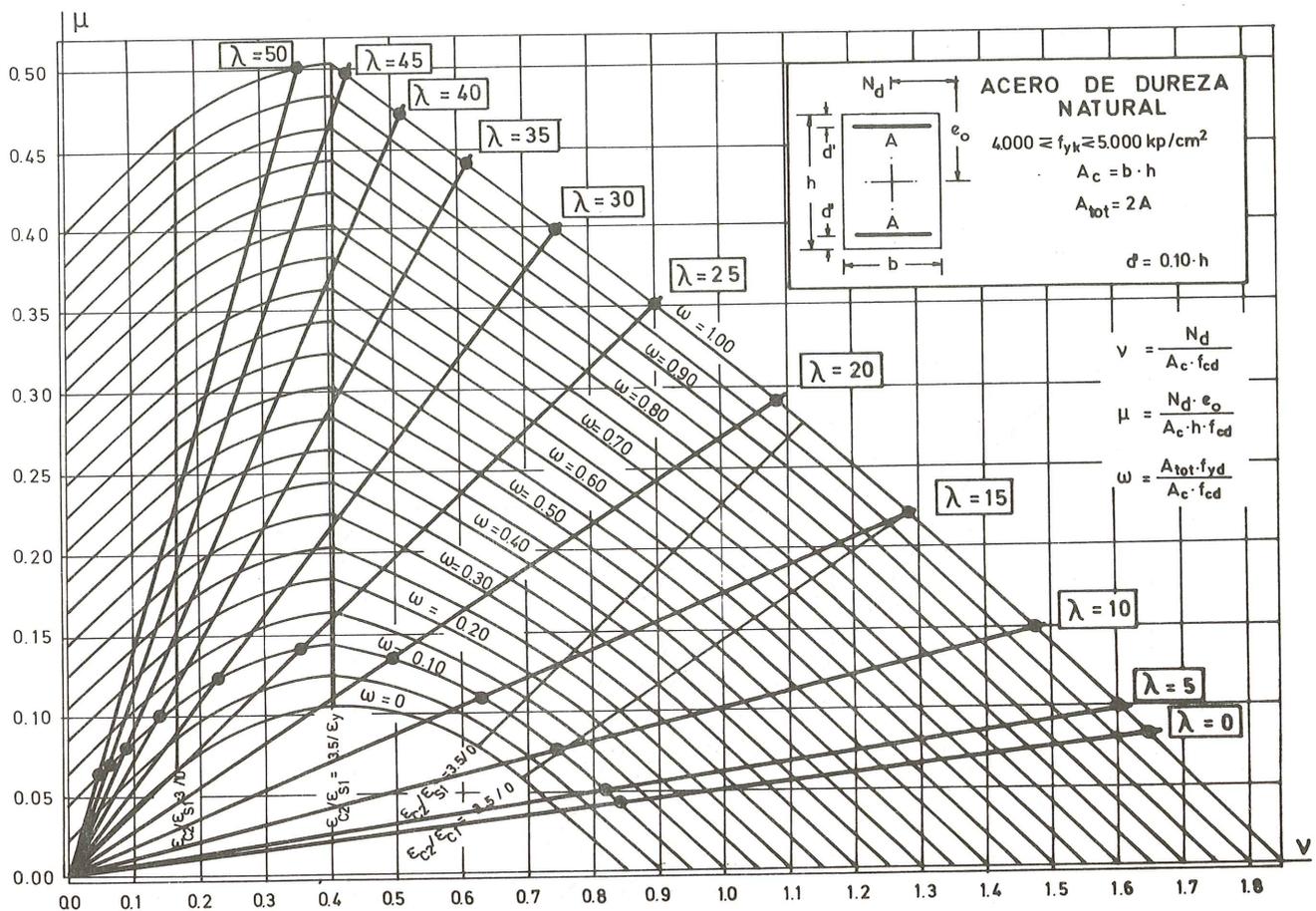


Fig. 3. Pandeo de soportes rectangulares según EH-73.  
 Diferentes rectas de dimensionamiento, para cada esbeltez  $\lambda$ , fijados  $e_0/h = 0,05$ ,  $AE-42N$ ,  $\gamma_s = 1,10$ .

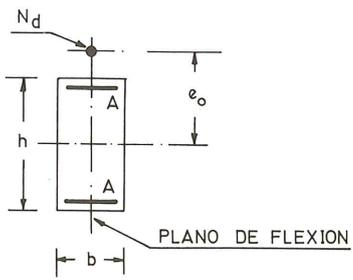
se contemplan los tres esquemas posibles de carga en su situación límite (Caso I, excentricidades iguales y del mismo signo; es el más desfavorable. Caso II, una de las cargas actúa centradamente. Caso III, excentricidades iguales y de signo contrario; es el esquema más estable frente al pandeo) y dentro de cada uno, tres valores del coeficiente  $\beta$  ( $\beta = 1$ , toda la carga que actúa es de tipo permanente;  $\beta = 0,50$ , la carga permanente es el 50 por 100 de la total;  $\beta = 0$ , la carga que actúa es de tipo instantáneo).

Por último, con el Código ACI se obtiene un número indefinido de curvas, ya que el método que propone permite analizar los tres esquemas de carga con cualquier valor de las excentricidades y para cualquier valor de  $\beta$ .

La obtención de la curva  $(\nu, \lambda)$ , de acuerdo con nuestra Instrucción es inmediata:

- La expresión que nos da la excentricidad adicional  $e_a$  es, para el tipo de acero con el que se han confeccionado los Abacos de J.J. Arenas ( $AE - 42 N \cdot \gamma_s = 1,10$ ):

$$\frac{e_a}{h} = 4,091 \cdot \frac{1 + 20 (e_0/h)}{1 + 10 (e_0/h)} \cdot \lambda^2 \cdot 10^{-4}$$



$$v = N_d / A_c \cdot f_{cd}$$

$$\omega = 2 \cdot A \cdot f_{yd} / A_c \cdot f_{cd}$$

$$\lambda = L / h$$

$$\beta = C.P. / C.T.$$

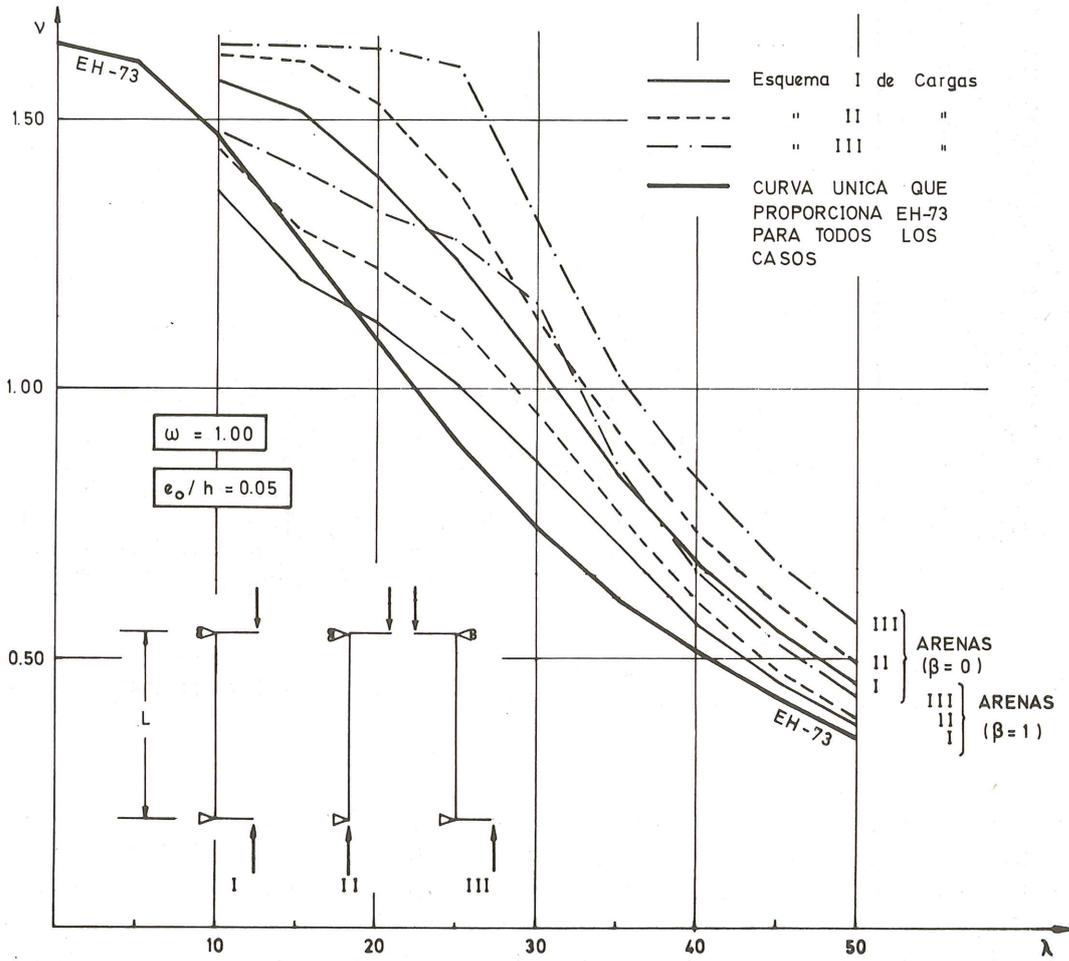


Fig. 4.

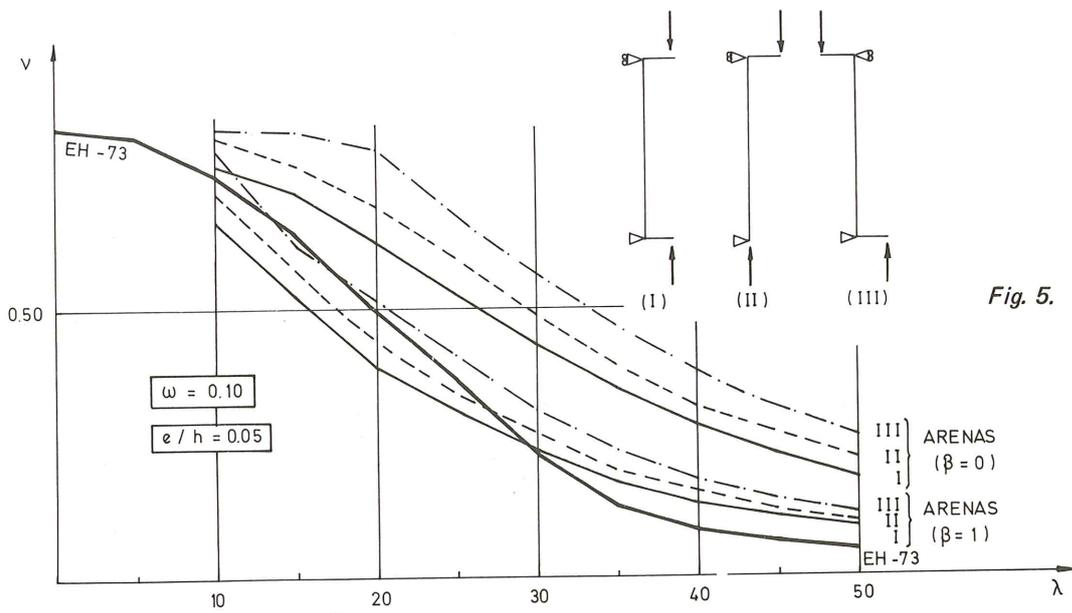


Fig. 5.

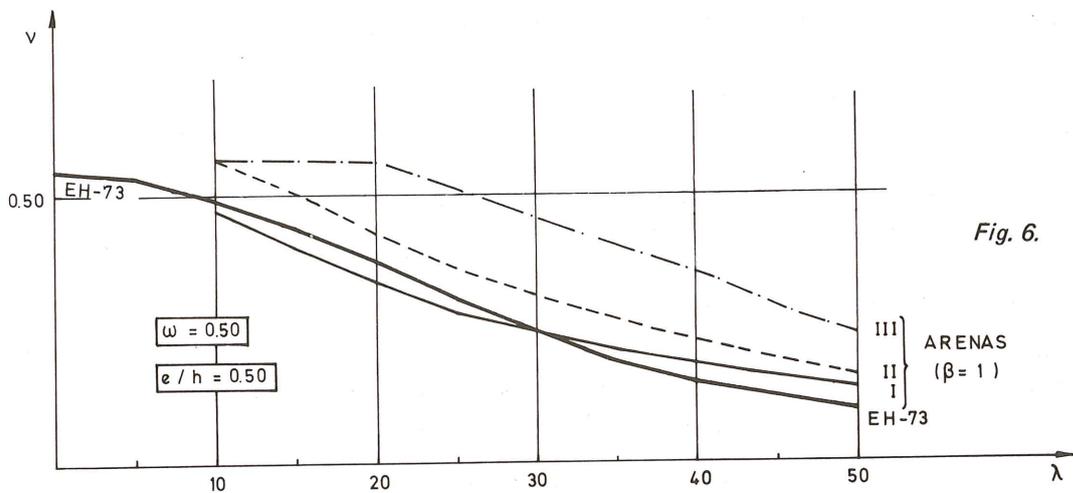


Fig. 6.

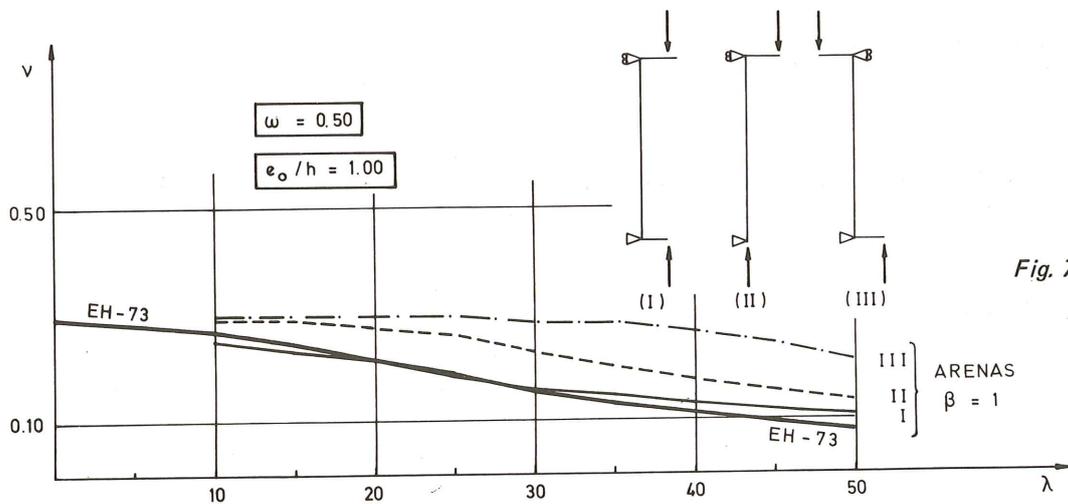


Fig. 7.

- Fijada una excentricidad relativa  $e_0/h$ , para cada esbeltez  $\lambda$  tendremos una  $e_a/h$ ; es decir, podemos definir sobre el diagrama de interacción una recta de pendiente  $(e_0 + e_a)/h$  que corta a la curva  $\omega = \text{constante}$  (valor prefijado) en el axil que buscamos.

En la figura 3 se representa el diagrama de interacción y las rectas de pendiente  $(e_0 + e_a)/h$ , función de la esbeltez, que nos han servido para obtener las curvas  $(\nu, \lambda)$  de acuerdo con la EH-73, de las figuras 4 y 5, en que para un valor fijo de la excentricidad relativa  $e_0/h = 0,05$ , (mínima que permite nuestra Instrucción) se contemplan dos valores extremos de la cuantía de acero,  $\omega = 0,10$  y  $\omega = 1,00$  (valor máximo, según la EH-73). Estas curvas  $(\nu, \lambda)$  se han comparado con seis de las nueve curvas que proporcionan los Abacos de dimensionamiento directo de J.J. Arenas, para los valores fijados de  $e_0/h$  y  $\omega$ . En ellas se observa cómo la curva de la EH/73 y la que proporcionan los Abacos para el esquema de cargas más desfavorable (I) y en el caso pésimo de que éstas sean de tipo permanente ( $\beta = 1$ ), se aproximan sensiblemente, aspecto que ya habíamos anunciado.

En las figuras 6 y 7 repetimos la comparación de curvas en el caso de una cuantía media de acero  $\omega = 0,50$  y para unas excentricidades mayores de las cargas,  $e_0/h = 0,50$  y  $e_0/h = 1,00$ . Los resultados son similares.

## 2. INESTABILIDAD DE SOPORTES SEGUN EL CODIGO A.C.I.

Ante el mismo problema planteado en el apartado anterior, o sea, ¿cómo armar un soporte de longitud  $L$ , de sección rectangular  $(b, h)$ , biarticulado en sus extremos y sometido en ellos a unos axiles  $N$ , que actúan con excentricidades  $e_0$  y  $e_1$ ? , el Código americano ACI-1971 propone una línea de actuación diferente a la seguida por nuestra Instrucción. De entrada, hemos de recordar que ACI, además de los factores que tiene en cuenta la EH-73, introduce dos nuevos: la influencia del esquema de cargas que solicita a la pieza y la relación que existe entre las cargas permanentes y las totales.

En primer lugar, veremos cómo actúa ACI frente al esquema de cargas más desfavorable (aquél en que los axiles tienen excentricidades del mismo signo), y luego indicaremos las correcciones que introduce en los otros dos esquemas menos críticos.

Hemos de señalar que el método simplificado de actuación que propone ACI para estudiar la inestabilidad de soportes de hormigón, mediante la “amplificación de los momentos flectores de primer orden” es válido hasta esbelteces 30, debiéndose acudir por encima de este valor, a un “análisis de segundo orden”. Por tanto, las “curvas según ACI” que se representan en el siguiente apartado sólo son válidas hasta  $\lambda = 30$ , teniendo, por encima de este valor y hasta  $\lambda = 50$ , sólo carácter indicativo.

### 2.1. Actuación en los extremos del soporte de dos fuerzas $N$ , con excentricidades $e_0$ y $e_1$ del mismo signo, o sea, dando deformada con curvatura simple

El A.C.I. introduce el “efecto de la esbeltez del soporte”, armando la pieza según nos de el dimensionamiento de una sección genérica sometida a un axil  $N$  y un momento  $M = \delta \cdot N \cdot e_0$  (suponemos que  $e_0$  es la excentricidad mayor,  $e_0 > e_1$ ); es decir, frente al axil de primer orden y al mayor momento de primer orden, amplificado con el coeficiente  $\delta$ .

En el caso que estamos considerando, el coeficiente de mayoración vale:

$$\delta = \frac{C_m}{1 - (N/N_{crit})} \quad ; \quad C_m = 0,6 + 0,4 \cdot \frac{N \cdot e_1}{N \cdot e_0}$$

Como vamos a comparar los resultados de este método con los de los Abacos de J.J. Arenas, supondremos  $e_0 = e_1$  que es el caso que éstos estudian directamente. En este supuesto,  $C_m = 1$ .

De acuerdo con lo anterior, iríamos a dimensionar la sección rectangular con unos esfuerzos reducidos:

$$\nu \quad ; \quad \mu = \frac{1}{1 - (\nu/\nu_{crit})} \cdot \nu \quad \frac{e_0}{h}$$

¿Cómo define el A.C.I. el  $\nu_{crit}$ ?

$$\nu_{crit} = \frac{P_{crit}}{f_{cd} \cdot A_c} = \frac{(\pi^2 E^* I^*)/L^2}{f_{cd} \cdot A_c} = \frac{\pi^2 E^* I^*}{(L/h)^2 \cdot f_{cd} \cdot A_c \cdot h^2} = \frac{\pi^2 e^* i^*}{\lambda^2}$$

siendo:  $\lambda = \frac{L}{h}$ ;  $e^* = \frac{E^*}{f_{cd}}$ ;  $i^* = \frac{I^*}{A_c \cdot h^2}$

Para la rigidez  $(EI)^*$  del hormigón, da una expresión que se ha obtenido a través de numerosos estudios analíticos y experimentales en los que se tuvo en cuenta: que el hormigón armado no es un material homogéneo, la fisuración, la fluencia, etc. Dicha expresión es:

$$(EI)^* = \frac{1}{1 + \beta} (0,2 E_c \cdot I_c + E_s \cdot I_s)$$

siendo:

$E_c$  = Módulo de elasticidad del hormigón en (Kp/cm<sup>2</sup>); es decir, la pendiente de la parte inicial recta de la curva ( $\sigma_c$ ;  $\epsilon_c$ ). Su valor es:

$$E_c \cong 0,135 w^{3/2} \sqrt{f_{ck}}$$

siendo  $w$  el peso del hormigón endurecido ( $\cong 2.400$  Kp/m<sup>3</sup>); es decir,

$$E_c \cong 15.000 \text{ a } 16.000 \sqrt{f_{ck}}$$

$I_c$  = Inercia de la sección bruta del pilar (cm<sup>4</sup>).

$E_s$  = Módulo de elasticidad del acero ( $\cong 2.030.000$  Kp/cm<sup>2</sup>)

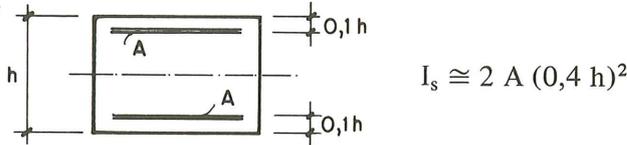
$I_s$  = Momento de inercia de la armadura respecto al eje de gravedad de la sección.

$$\beta = \frac{\text{Momento de cargas permanentes}}{\text{Momento de cargas totales}}$$

Este factor tiene en cuenta el efecto de la FLUENCIA (cuanto mayores son los momentos de las cargas permanentes con relación al momento total, tenemos que  $\beta \rightarrow 1$  y el factor  $(EI)^*$  se hace más pequeño; es decir, la rigidez del elemento se reduce bajo la acción de cargas de larga duración).

Actuando con variables adimensionales podemos poner:

$$(ei)^* = \frac{(EI)^*}{f_{cd} \cdot A_c \cdot h^2} = \frac{1}{1 + \beta} \left( \frac{0,2 E_c I_c}{f_{cd} \cdot A_c \cdot h^2} + \frac{E_s I_s}{f_{cd} \cdot A_c \cdot h^2} \right)$$



$$\frac{E_s \cdot I_s}{f_{cd} \cdot A_c \cdot h^2} = \frac{E_s \cdot (2 A \cdot 0,16 h^2) \cdot f_{yd}}{f_{yd} \cdot f_{cd} \cdot b h \cdot h^2} = 0,16 \cdot e_s \cdot \omega; \quad e_s = \frac{E_s}{f_{yd}}$$

$$\frac{E_c I_c}{f_{cd} \cdot A_c \cdot h^2} = \frac{E_c \cdot (b h^3/12)}{f_{cd} \cdot b h \cdot h^2} = \frac{1}{12} e_c; \quad e_c = \frac{E_c}{f_{cd}}$$

Luego resulta:

$$(ei)^* = \frac{1}{1 + \beta} (0,017 e_c + 0,16 \cdot \omega \cdot e_s)$$

Para el estudio de comparación que estamos realizando, tomaremos el mismo tipo de acero que se adoptó para confeccionar los Abacos (AE-42 N,  $\gamma_s = 1,10$ ). Entonces:

$$e_s = \frac{2.030.000}{4.200/1,1} = 531,67$$

Para el hormigón tenemos:

$$e_c = \frac{E_c}{f_{cd}} \cong \frac{15.500 \sqrt{f_{ck}}}{f_{ck}/1,5} = \frac{23.250}{\sqrt{f_{ck}}}$$

En función de la resistencia característica del hormigón tenemos:

| H (kp/cm <sup>2</sup> ) | $e_c$    | $(ei)^*$                                     |
|-------------------------|----------|--|
| 200                     | 1.644,02 | $\frac{1}{1 + \beta} (27,95 + 85,07 \omega)$ |
| 225                     | 1.550,00 | $\frac{1}{1 + \beta} (26,35 + 85,07 \omega)$ |
| 250                     | 1.470,46 | $\frac{1}{1 + \beta} (25,00 + 85,07 \omega)$ |
| 300                     | 1.342,34 | $\frac{1}{1 + \beta} (22,82 + 85,07 \omega)$ |

Nosotros hemos utilizado, para obtener los gráficos que compararemos con los resultados de los Abacos y de la EH-73, el valor:

$$(ei)^* = \frac{1}{1 + \beta} (27 + 85 \omega)$$

que corresponde aproximadamente a un hormigón H-225 ( $\gamma_c = 1,50$ ) y un acero AE-42 N ( $\gamma_s = 1,10$ ).

Vemos, pues, que fijando la calidad de los materiales, nos ha quedado:

$$\nu_{cri} = \frac{\pi^2 (ei)^*}{\lambda^2} = \frac{\pi^2 (27 + 85 \omega)}{(1 + \beta) \cdot \lambda^2}$$

Al dimensionar la sección con  $\nu$  y  $\mu = \frac{\nu \cdot (e_0/h)}{1 - (\nu/\nu_{cri})}$ , el resultado que obtengamos dependerá de los siguientes factores:

- Excentricidad relativa ( $e_0/h$ )
- Esbeltez  $\lambda$
- Cuantía  $\omega$
- Factor  $\beta$

Recuérdese que, en las mismas condiciones, para EH-73 el resultado sólo dependía de  $e_0/h$ ,  $\lambda$  y  $\omega$ .

Si queremos obtener unas curvas que nos den para cada esbeltez  $\lambda$  el axil máximo que admite el soporte, al igual que hicimos con el método de la EH-73, vemos que ahora, al ir a definir la línea ( $\nu, \mu$ ) según la cual nos moveremos en el diagrama de interacción, dicha línea ya no es una recta; y, por otro lado, dependerá del valor del  $\nu_{cri}$ , teniendo dicha curva una asíntota precisamente en tal valor, el cual, a su vez, depende de  $\omega$ ,  $\beta$  y  $\lambda$ . Fijados pues estos tres valores, nosotros tenemos un axil crítico concreto y para una ( $e_0/h$ ) prefijada podemos dibujar una curva en el diagrama de interacción sobre la cual avanzaremos, a medida que crece el axil, y que tendrá su final en el lugar en que corte a la curva  $\omega = \text{constante}$ , cuyo valor fijamos al obtener el  $\nu_{cri}$ .

En la figura 8 se incluye un diagrama de interacción que puede aclarar lo antes indicado. Fijada una esbeltez ( $\lambda = 20$ ) y para una excentricidad relativa también fija ( $e_0/h = 0,05$ ) con el *método de la EH-73* tenemos ya definida la recta sobre la que hemos de movernos,

$\mu = \nu \cdot \left( \frac{e_0 + e_a}{h} \right)$ , viendo que tal recta corta a las curvas  $\omega = \text{cte}$  en las  $\nu$  máximas que admite el soporte con las condiciones establecidas. Con el *método del A.C.I.*, y esos valores prefijados, nosotros seguiremos diferentes curvas, según los valores de la cuantía  $\omega$  y del coeficiente  $\beta$  (hemos dibujado las correspondientes a  $\omega = 0,1, 0,50$  y  $1$ ;  $\beta = 0$  y  $1$ ), y que tendrán su final cuando lleguen a cortar a la curva ( $\omega = \text{constante}$ ) correspondiente. Actuando del modo descrito se han obtenido los resultados que hemos representado gráficamente en el apartado 3.

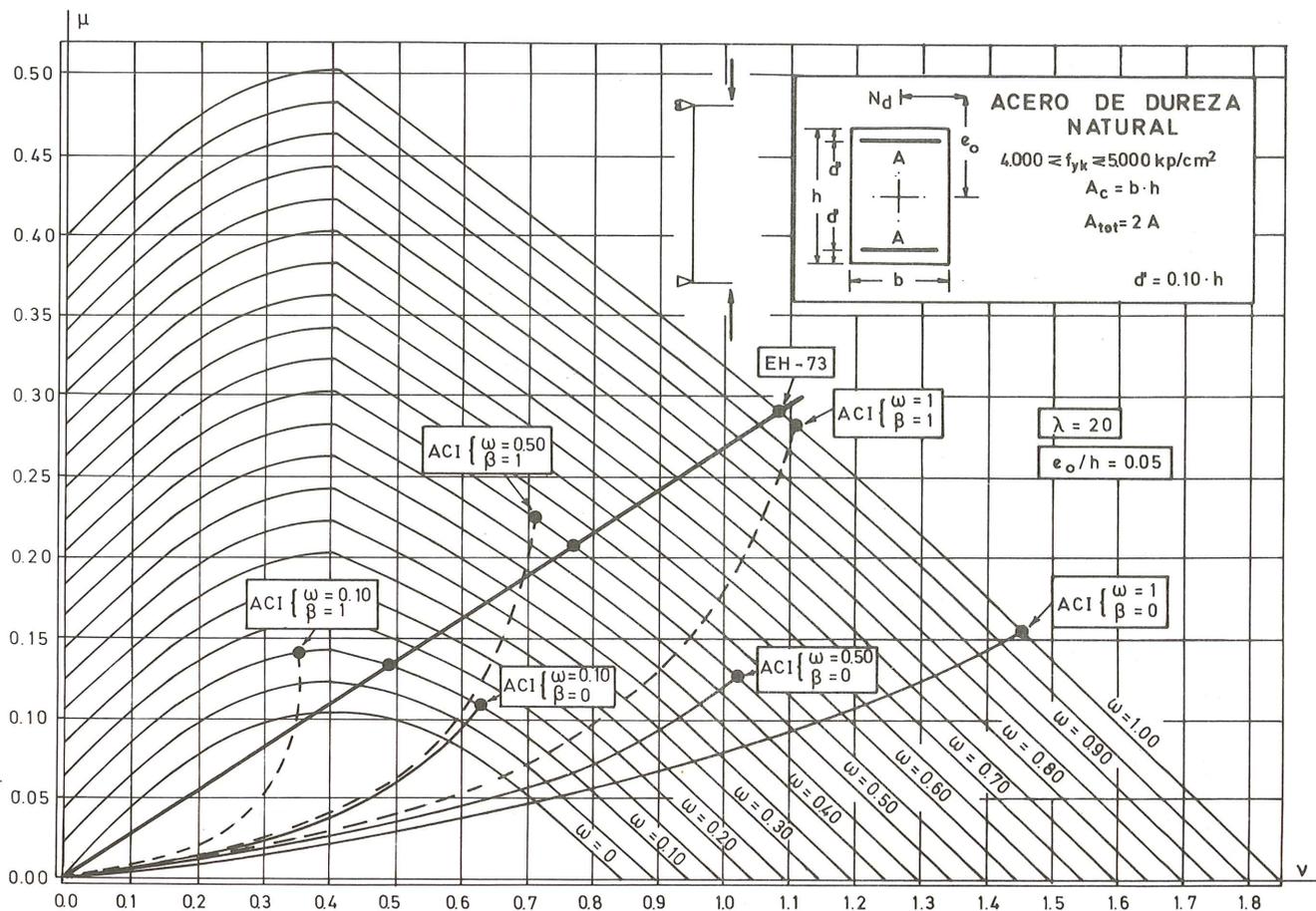


Fig. 8. Curvas de dimensionamiento con el código ACI-71, para diferentes cuantías  $\omega$  de acero y distintos valores del coeficiente  $\beta$  fijadas la esbeltez  $\lambda$  del soporte y la excentricidad  $e_o/h$ .

**2.2. Esquemas de carga en que uno de los axiles actúa sin excentricidad, o actúan ambos con excentricidades de diferente signo, es decir, dando en este último caso una deformada con doble curvatura**

Estos esquemas, ya lo comentamos en la primera parte de este estudio, son más estables que el que hemos analizado en el punto anterior. Sobre todo el segundo de ellos presenta bastante resistencia al pandeo; lo que puede observarse en las curvas que hemos representado al final. Se ve, para éste caso, que hasta esbelteces del orden de 20 a 30, el soporte prácticamente no presenta ninguna disminución en su capacidad de resistir axiles (tramo sensiblemente horizontal de las curvas en ejes  $(v, \lambda)$  y sólo a partir de esos valores empieza a sentir el “efecto de la esbeltez”.

El método A.C.I. tiene en cuenta lo anterior en el coeficiente de amplificación  $\delta$  que actuaba sobre el mayor momento de primer orden.

Recordemos que nosotros dimensionábamos con este método, para unos esfuerzos reducidos:

$$v \cdot y \quad \mu = \delta \cdot v \cdot \left( \frac{e_o}{h} \right)$$

2.2.1. Para el esquema de cargas en que una de las excentricidades es nula, el coeficiente  $\delta$  tiene ahora el valor:

$$\delta = \frac{0,6}{1 - (\nu/\nu_{cri})}$$

Si no tomáramos ninguna precaución, al actuar con el anterior coeficiente de mayoración, llegaríamos al absurdo de que para pequeños valores del axil  $\nu$ , concretamente, siempre que su valor fuese menor que el 40 por 100 del  $\nu_{cri}$ :

$$0,6 < 1 - \frac{\nu}{\nu_{cri}}, \text{ o sea } \nu < 0,40 \nu_{cri}$$

obtendríamos un coeficiente menor que la unidad, que nos llevaría a dimensionar la sección con un momento  $\mu$  menor que el que está actuando en el extremo de la pieza; lo cual es ilógico.

La anterior incongruencia se salva si recordamos lo que comentábamos al principio de este trabajo; veíamos que, en este caso de cargas, hasta que el axil no llegaba a un cierto valor, teníamos como sección más solicitada, la extrema del soporte, donde actuaba la carga excéntrica; y a partir de ese axil, concretamente aquél que producía una deformada que tenía por tangente en dicho extremo una recta con igual pendiente que la línea de presión, la sección más solicitada pasaba a ser al soporte. Pues bien, esto mismo nos está indicando el método del A.C.I.: hasta valores de  $\nu$  del orden del 40 por 100 de la carga crítica del soporte, la sección más solicitada es la del extremo y la dimensionaremos para los esfuerzos de primer orden,  $\nu$  y  $\mu = \nu \cdot (e_0/h)$ . Para valores superiores al anterior, hay que tener presente ya el coeficiente de mayoración  $\delta$ , que ahora toma valores superiores a la unidad.

2.2.2. Para el esquema de cargas más estable, el coeficiente  $c_m$  que nos recomienda tomar el Código A.C.I. es:

$$c_m = \left( 0,6 - 0,4 \cdot \frac{N \cdot e_1}{N \cdot e_0} \right) \geq 0,40$$

entrando en la anterior expresión con  $e_0$  y  $e_1$  en valor absoluto.

El caso que estudian directamente los Abacos es el de  $e_0 = e_1$ , para el que representaremos nosotros los resultados del A.C.I.. En ésta situación nos queda:  $c_m = 0,40$ .

Por lo tanto, dimensionaremos ahora para unos esfuerzos reducidos:

$$\nu; \mu = \frac{0,4}{1 - (\nu/\nu_{cri})} \cdot \nu \cdot \left( \frac{e_0}{h} \right)$$

Debemos tomar las mismas precauciones que en el caso anterior: hasta que el axil no llegue al 60 por 100 del  $\nu_{cri}$ , dimensionaremos la sección extrema (que es la que estará más desfavorablemente solicitada) para los esfuerzos de primer orden; y para axiles superiores tendremos ya en cuenta el efecto de la esbeltez, mayorando el momento de primer orden aplicando el coeficiente  $\delta$ .

Podemos ya, pues, obtener las curvas ( $\nu$ ,  $\lambda$ ) para estos esquemas de cargas. Hemos seguido para ello los mismos pasos que dimos en el caso 2.1.

En el apartado siguiente pueden verse estas curvas comparadas con las que se obtienen de acuerdo con los Abacos y con la EH-73.

### 3. COMPARACION DE RESULTADOS OBTENIDOS

3.1. En el esquema más desfavorable de cargas, se representan los axiles críticos  $\nu$  que admite el soporte para diferentes esbelteces geométricas. Manteniendo fija la excentricidad relativa  $e_0/h = 0,05$ , mínima que permite la Instrucción EH-73, se estudian tres casos, con diferentes cuantías de acero ( $\omega = 1$ ,  $\omega = 0,50$ ,  $\omega = 0,10$ ). Figuras 9, 10 y 11.

3.2. Para las mismas condiciones que en el apartado anterior, pero para una excentricidad relativa  $e_0/h = 0,50$ , se obtienen los resultados de las figuras 12, 13 y 14.

3.3. Representamos después los axiles críticos resistidos por un soporte, armado con diferentes cuantías  $\omega$  de acero, en el supuesto del esquema más desfavorable de cargas, para una esbeltez prefijada ( $\lambda = 20$ ) y variando la excentricidad relativa ( $e_0/h = 0,05$  y  $e_0/h = 0,50$ ). Figuras 15 y 16.

3.4. En el esquema de cargas en que una de ellas actúa con excentricidad nula, se representan los axiles críticos  $\nu$  resistidos por el soporte, armado con una cuantía media ( $\omega = 0,50$ ), para diferentes valores de la esbeltez  $\lambda$  y con dos valores prefijados de la excentricidad relativa del axil que actúa con excentricidad no nula ( $e_0/h = 0,05$  y  $e_0/h = 0,50$ ). Figuras 17 y 18.

3.5. En el esquema de cargas más resistente frente a fenómenos de inestabilidad, representamos los axiles críticos  $\nu$  que resiste el soporte, armado con una cuantía de acero  $\omega = 0,50$ , para diferentes valores prefijados de la excentricidad relativa ( $e_0/h = 0,05$  y  $e_0/h = 0,50$ ). Figuras 19 y 20.

3.6. En la figura 21 se representan los resultados que dan los tres métodos estudiados, para un caso de indudable interés teórico; el del soporte biarticulado, sometido a dos cargas perfectamente centradas.

El ACI nos da, para este caso, la carga crítica de Euler:  $\nu_{cri} = \pi^2(ei)^*/\lambda^2$ , valor que sirve de base a su método simplificado de cálculo frente a problemas de inestabilidad, como ya hemos visto. El mérito de este método está, precisamente, en haber ajustado una buena expresión para el valor (E.I.) en un material heterogéneo y fisurable como es el hormigón armado.

La conocida expresión del  $\nu_{cri}$  da valores cada vez más pequeños para el axil resistido por el soporte, a medida que aumenta la esbeltez del mismo, como es perfectamente intuitivo. Para esbelteces muy pequeñas la expresión no es válida, pues da  $\nu$  admisibles tendiendo a infinito. Se deben, pues, ajustar unas curvas que enlacen, el valor conocido del  $\nu_{m\acute{a}x}$  que admite la sección armada con cada cuantía concreta, con las curvas teóricas de Euler. Estas curvas podrían ser unas parábolas similares a las que utilizó Engesser.

En la citada figura 21 se vuelve a ver cómo la solución de la EH-73 da resultados bastante parecidos a los de los Abacos, en la hipótesis de que las cargas que actúen sean de carácter permanente.

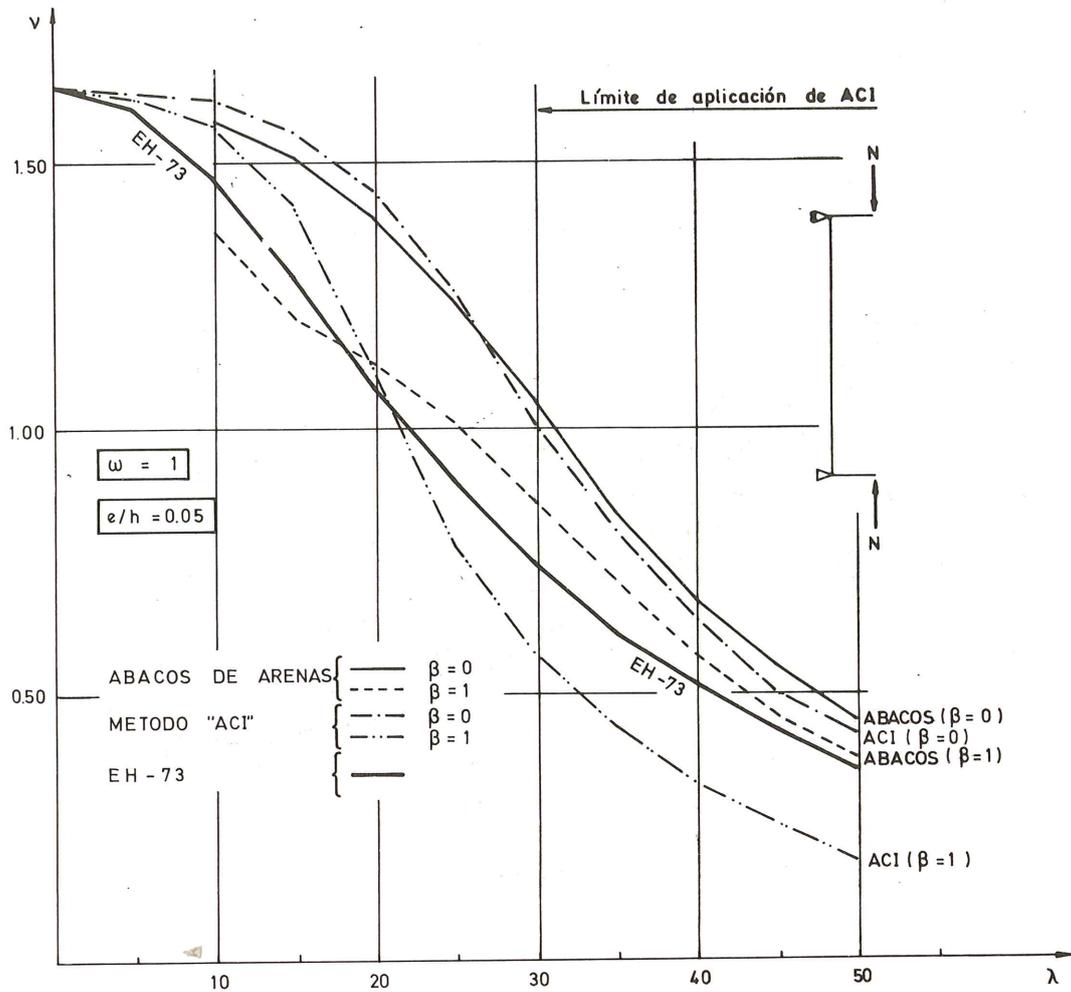


Fig. 9.

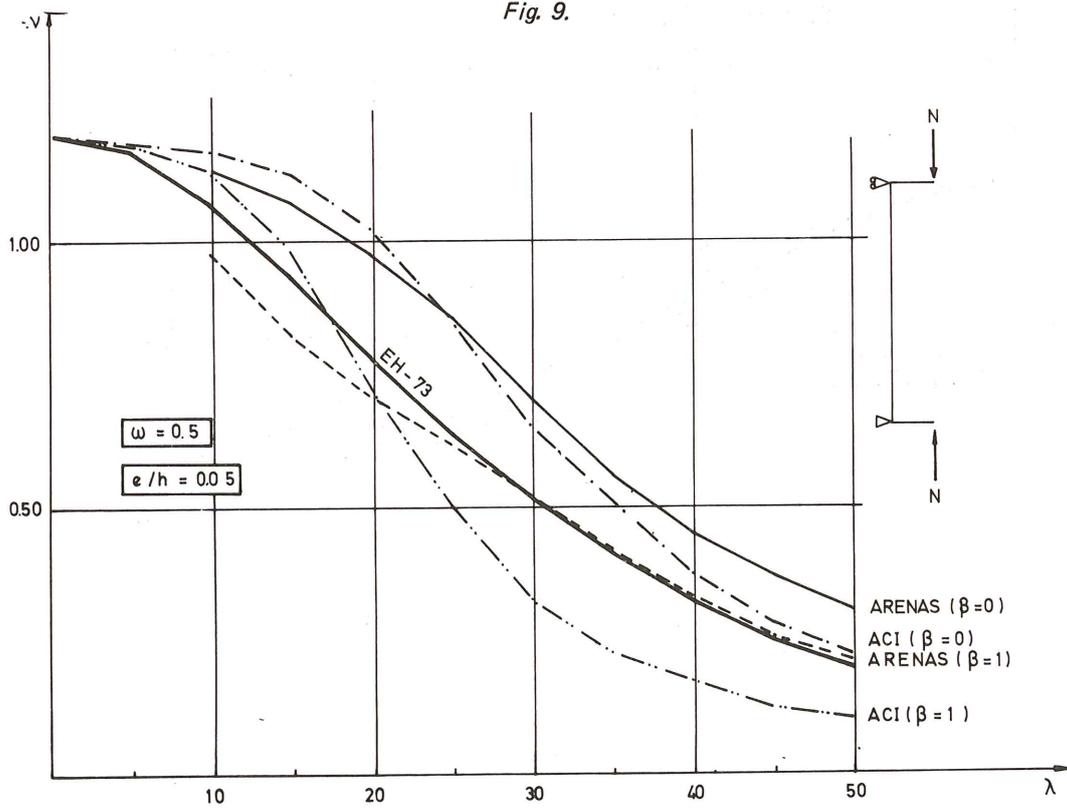


Fig. 10.

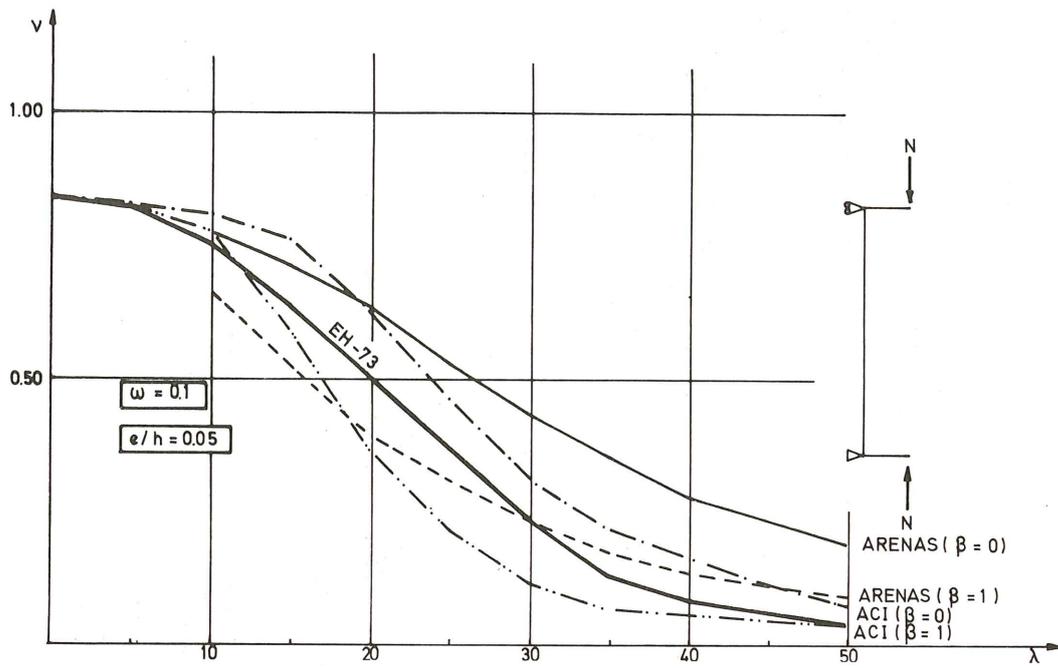


Fig. 11.

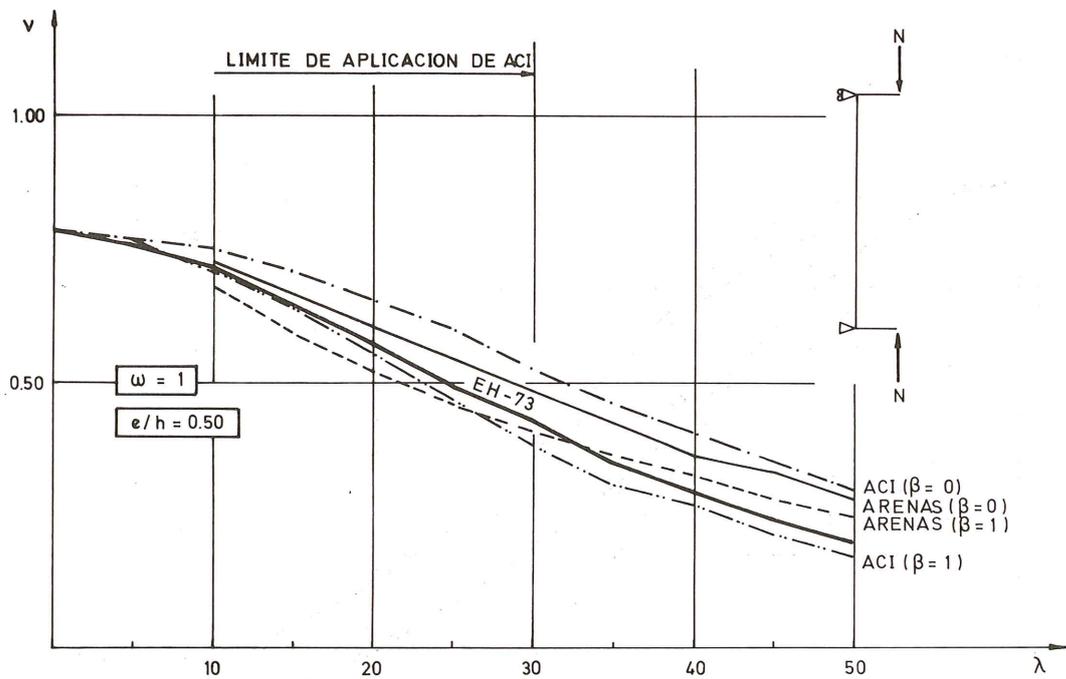


Fig. 12.

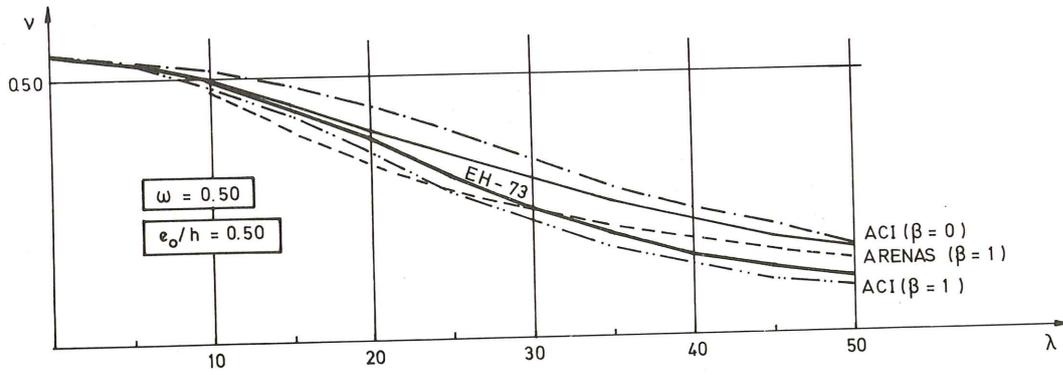


Fig. 13.

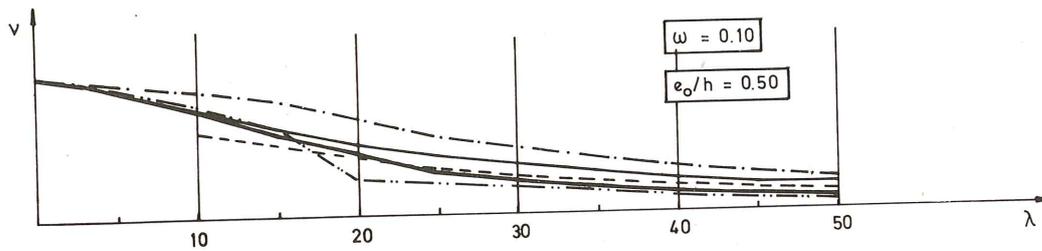


Fig. 14.

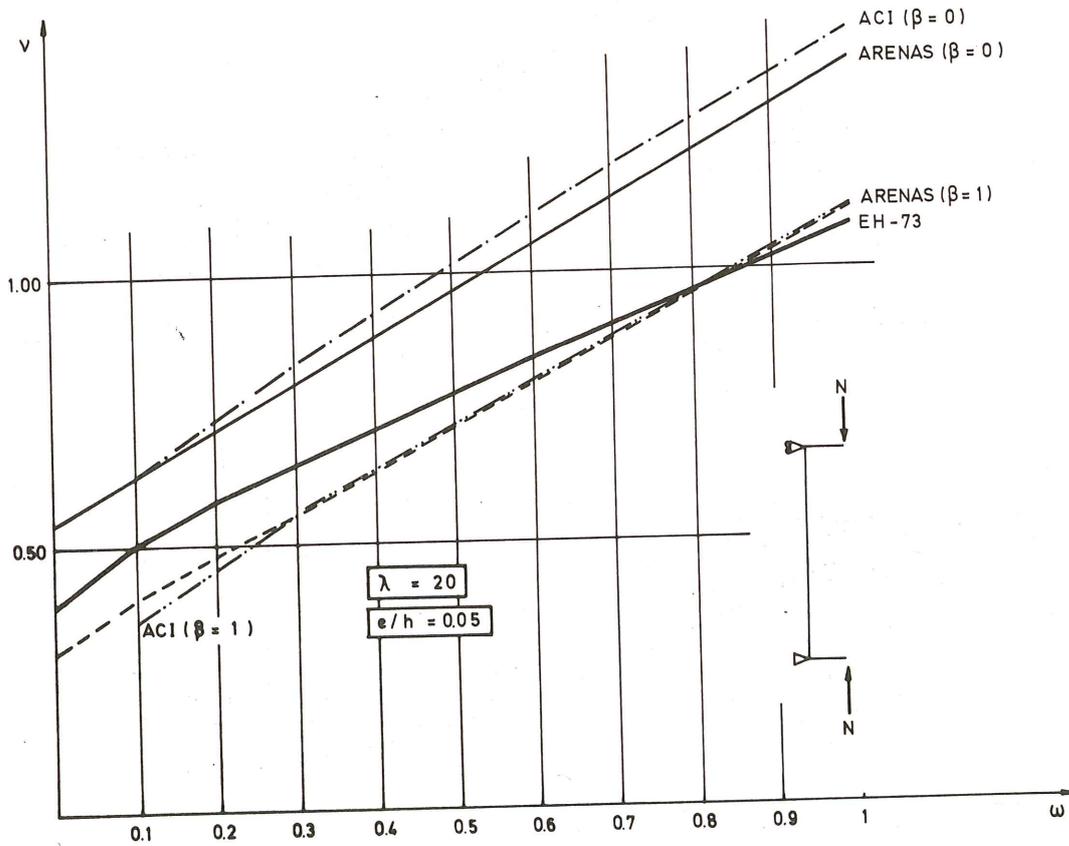


Fig. 15.

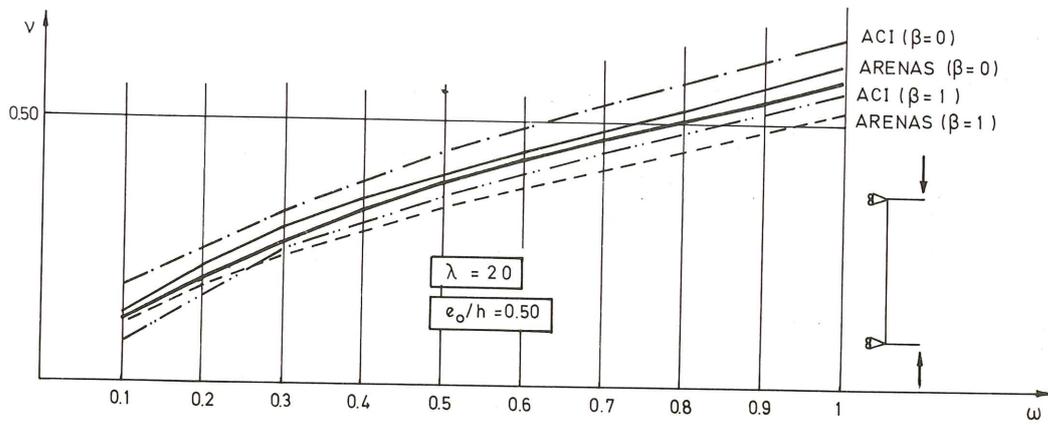


Fig. 16.

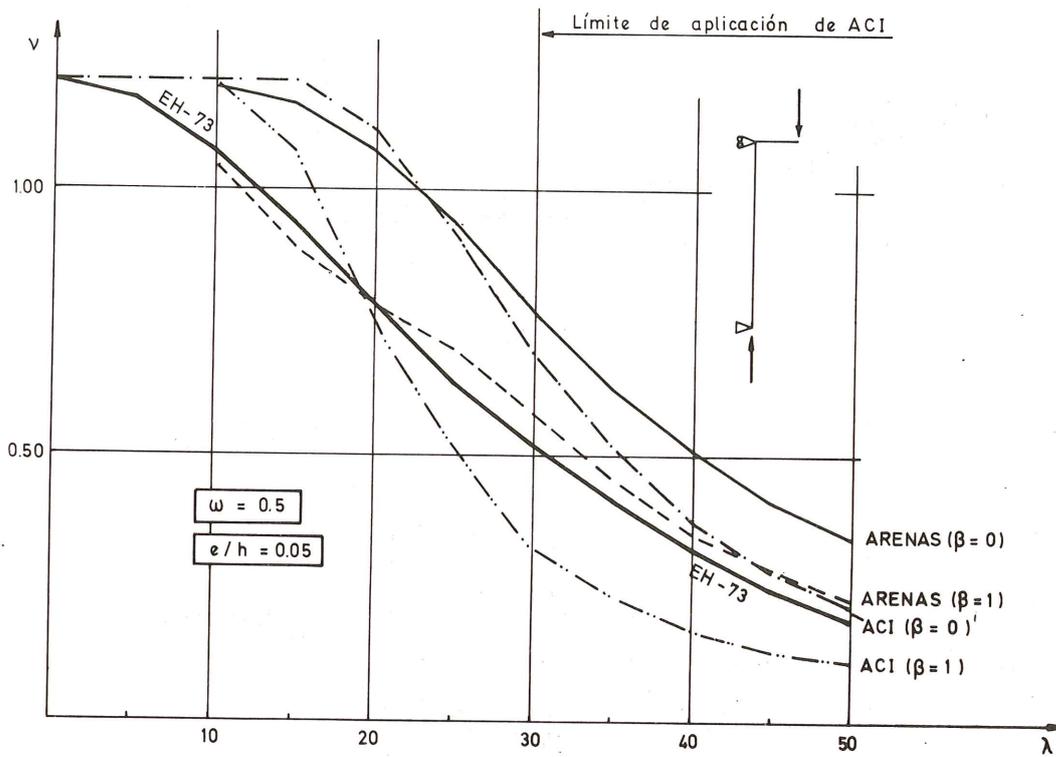


Fig. 17.

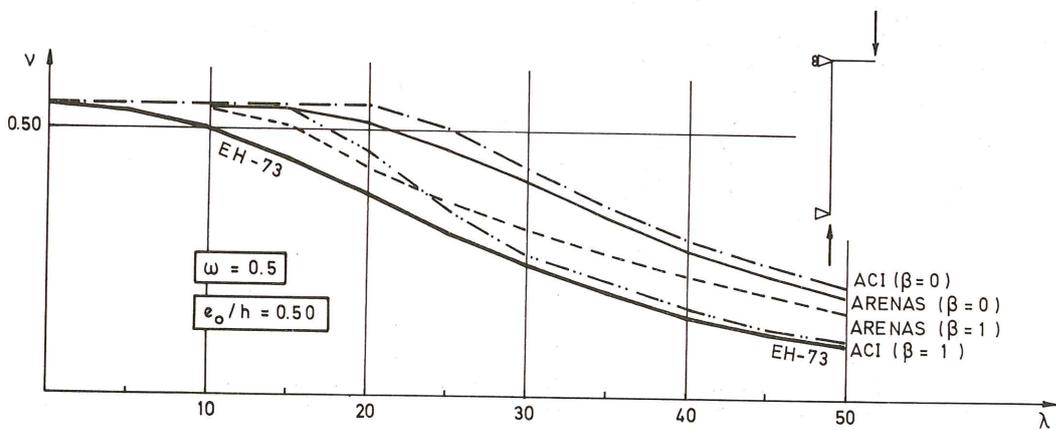


Fig. 18.

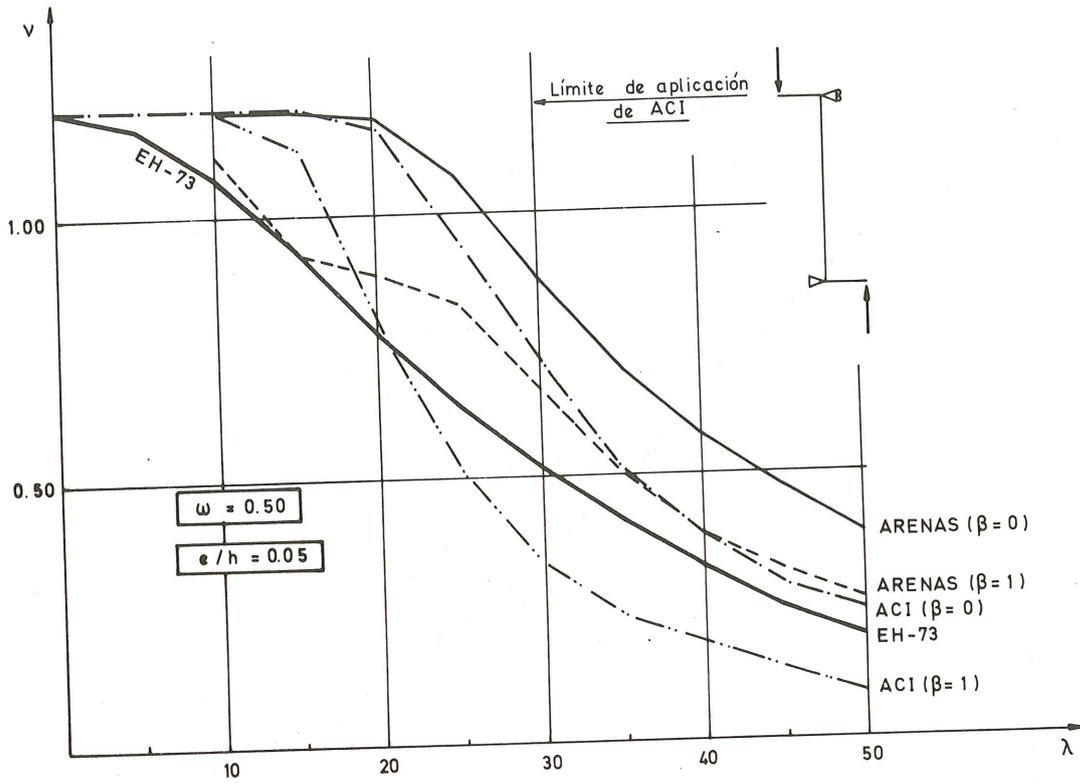


Fig. 19.

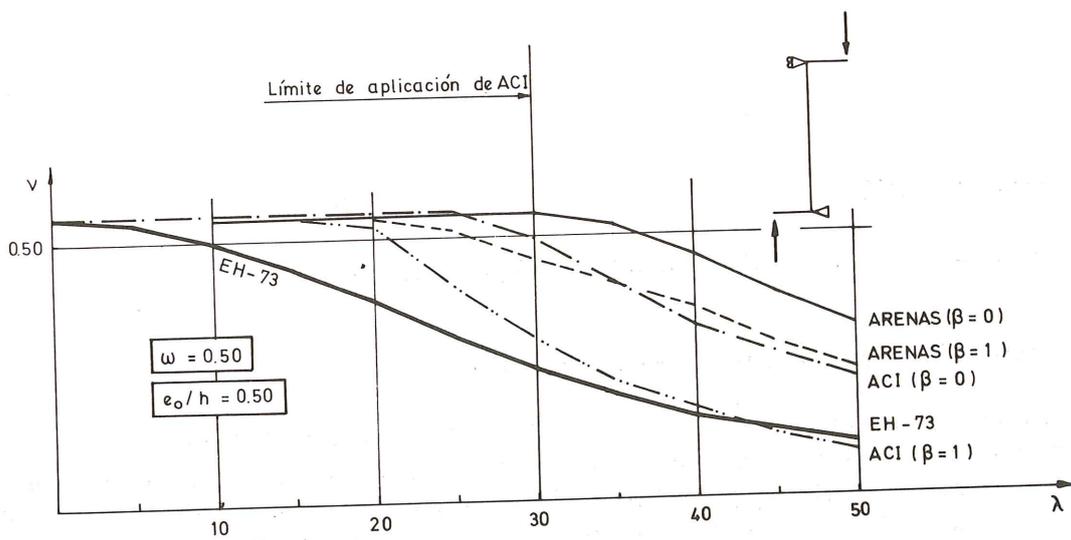


Fig. 20.

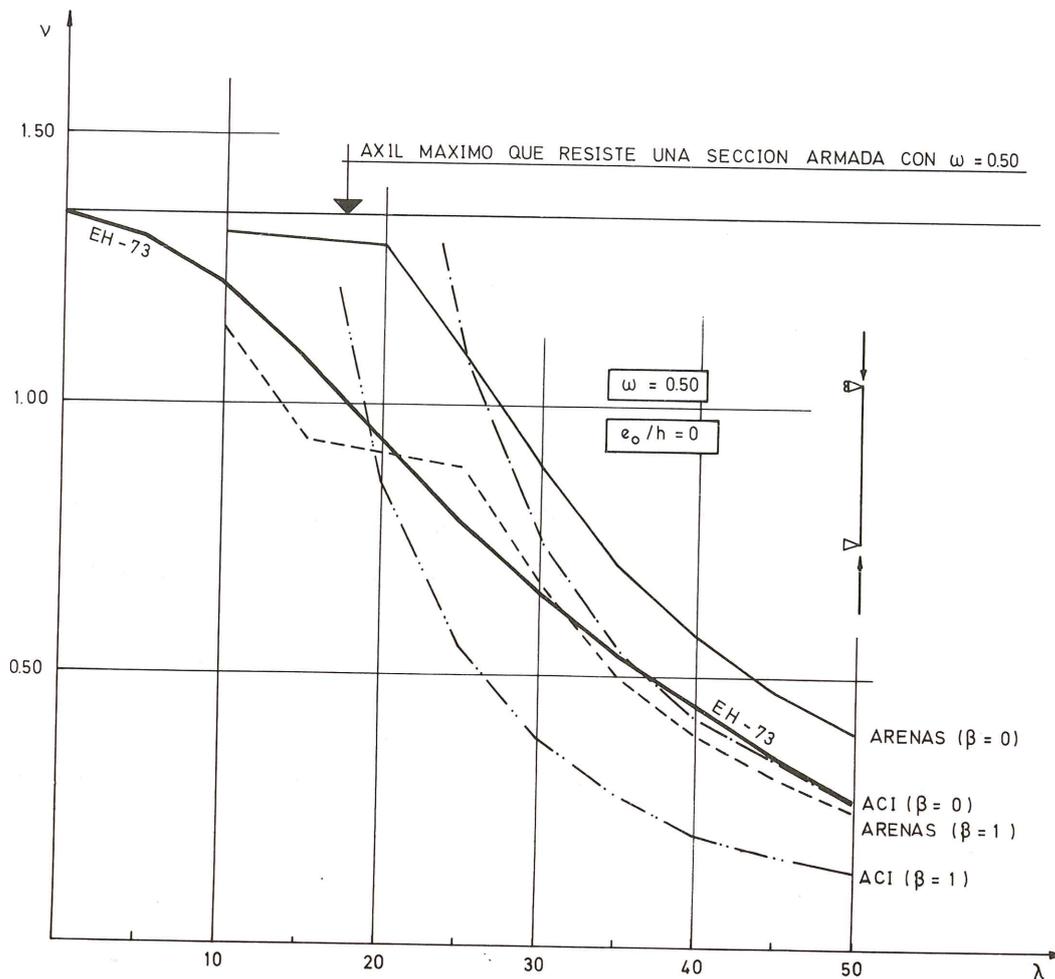


Fig. 21.

#### 4. CONCLUSIONES

A la vista de los resultados obtenidos, podemos concluir:

##### 4.1. Actuación de cargas de tipo permanente ( $\beta = 1$ )

En el esquema de cargas más desfavorable (I), los resultados de la EH-73 y de los Abacos se aproximan sensiblemente en todos los casos estudiados. Las curvas que proporciona nuestra Instrucción y el Código ACI son más optimistas que las de los Abacos, en cuanto a los valores del axil resistido por el soporte, para esbeltos pequeños del mismo. Sin embargo, para valores de  $\lambda$  superiores a 20 ó 30, las curvas que proporcionan las dos normativas son conservadoras respecto a los Abacos, especialmente las de ACI (en este sentido hay que recordar que éste Código obliga a acudir a un análisis de segundo orden para esbeltos superiores a 30).

En los esquemas II y III, más estables frente al pandeo, con excentricidades pequeñas ( $e_0/h = 0,05$ ), la EH-73 y los Abacos son los que dan los resultados más concordantes; mientras que con excentricidades mayores ( $e_0/h = 0,50$ ) son el ACI y los Abacos los que mejor

concuerdan, para esbelteces menores de 20. En ambos casos, y para valores de esbeltez superiores al mencionado, las dos normativas son conservadoras respecto a los Abacos.

#### 4.2. Actuación de cargas de tipo instantáneo ( $\beta = 0$ )

En todos los casos estudiados, la concordancia entre el ACI y los Abacos es buena, sobre todo, hasta el valor de la esbeltez  $\lambda = 30$ .

La EH-73 da, sin embargo, resultados muy conservadores respecto a los otros dos métodos, pareciendo nuestra Instrucción pensada para casos en que predominan las cargas de larga duración ( $\beta \rightarrow 1$ ).

### 5. REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

5.1. ARENAS DE PABLO. "Cálculo de Soportes de Hormigón Armado en Teoría de 2º Orden". Abacos de dimensionamiento directo. Colección Temas de Hormigón de Editores Técnicos Asociados. e.t.a. S.A. (1980).

5.2. ARENAS DE PABLO. "Cálculo en estado límite de inestabilidad de soportes de hormigón armado". Revista Hormigón y Acero números 130-131-132 (1979), de la A.T.E.P.

5.3. CODIGO A.C.I.- 318-71. Reglamento de las construcciones de concreto reforzado y comentarios. Instituto Mexicano del Cemento y del Concreto (traducción del original en inglés).

5.4. INSTRUCCION EH-73. Para el proyecto y la ejecución de obras de hormigón en masa o armado. M.O.P.U.

5.5. MONTOYA, MESEGUER, MORAN. "Hormigón Armado" 8ª Edición. Editorial Gustavo Gili, S.A.

5.6. WINTER Y NILSON. "Proyecto de estructuras de Hormigón". Editorial Reverté.

## ULTIMA PUBLICACION ESPECIAL DE LA A. T. E. P.

### **Manual H.P. 5-79 "Recomendaciones para la disposición y colocación de Armaduras"**

Como continuación de la serie de Manuales que, desde hace años, viene editando la Asociación Técnica Española del Pretensado, y en los que se recogen las recomendaciones relativas a las diferentes etapas del proceso general de ejecución de las construcciones pretensadas, se publica ahora el Manual H.P. 5-79 en el que, bajo el título "Recomendaciones para la disposición y colocación de armaduras", se han recopilado todas aquellas normas que la práctica ha demostrado deben tenerse en cuenta para obtener una adecuada disposición de las armaduras en los elementos pretensados, tanto si se trata de armaduras pretensas como postesas, incluyéndose así mismo las armaduras pasivas que suelen acompañar a las activas.

Por la íntima relación existente entre tales armaduras y otra serie de dispositivos y piezas tales como los anclajes, empalmes, vainas, separadores, etc., se recogen también en este Manual las recomendaciones correspondientes a su colocación.

En todos los casos, se tratan por separado las fases de proyecto, ejecución y control.

El interés del tema elegido resulta evidente si se tiene en cuenta que el estado tensional creado por las armaduras activas en todo elemento pretensado, debe ser tal que permita a éste cumplir, con las necesarias garantías de seguridad y durabilidad, la función a que va destinado. Y como dicho estado tensional depende, no sólo de la magnitud sino también del punto de aplicación de la resultante de las fuerzas de pretensado introducidas, se comprende que la disposición de las armaduras en este tipo de piezas adquiere una importancia primordial; por lo que su colocación debe ser cuidadosamente realizada en obra.

A la consecución de este objetivo se estima que habrán de contribuir, de modo importante, las recomendaciones del Manual que ahora se ofrece y que se espera tendrá la misma favorable acogida que los anteriores de la serie, no sólo entre los Miembros de nuestra Asociación, sino también entre cuantos profesionales desarrollan sus actividades en el campo de la técnica del pretensado.

Este Manual H.P. 5-79, con 87 páginas y varias figuras, se ha puesto a la venta al precio de 300,- ptas. el ejemplar (6,- dólares USA para el extranjero). Para los Miembros de la A.T.E.P. se ha establecido el precio especial de 200,- pesetas (4,- dólares USA para el extranjero).

Los interesados en su adquisición deberán dirigir sus pedidos a la Secretaría de la Asociación Técnica Española del Pretensado, Apartado 19.002, Madrid-33, Tfno: 202 04 40.

# Notas de la F.I.P., N° 81

(Selección de los trabajos más interesantes)  
**Una revisión crítica de las especificaciones de la norma para los depósitos circulares de hormigón pretensado**  
J.V. Vessey y R.I. Preston

Este trabajo fue presentado en el 8º Congreso de la F.I.P., celebrado en mayo de 1978.

## 1. SINOPSIS

El diseño de los grandes depósitos circulares de hormigón pretensado aunque es una técnica sólidamente planificada sin embargo no puede decirse que se encuentre totalmente desarrollada. Muchos aspectos importantísimos están todavía o infraestimados o no se les considera al realizar el proyecto. Esta situación viene agravada quizás como consecuencia de la ausencia o falta de una adecuada cobertura por los códigos normales (1,2) y recomendaciones de proyecto (3).

Este artículo se ocupa de algunos de los más importantes aspectos, tales como temperatura, terremotos, retracción y fluencia, junto a observaciones recomendadas del código para su utilización y orientación en la práctica de los trabajos de proyecto.

## 2. INTRODUCCION

La elaboración de este artículo se emprendió en el transcurso de un estudio para poner al día y pasar las unidades al sistema métrico decimal, con vistas a su utilización general en Nueva Zelanda, una colección de diseños estandarizados para depósitos destinados al suministro de agua dentro de una gama de tamaños entre 250 y 5.000 m<sup>3</sup>. Las subsiguientes investigaciones evidenciaron varias omisiones significativas en los códigos utilizables en estructuras para almacenar agua. Las prescripciones de Código, elaboradas a partir de este estudio, se facilitan en el Apéndice A.

## 3. TEMPERATURA

Los efectos térmicos sobre los depósitos cilíndricos de hormigón pueden dividirse en dos clases: diferencias de temperatura (o gradiente térmico) y variación global de temperatura.

### 3.1 Diferencias de temperatura

Las tensiones térmicas, que se producen en las estructuras destinadas a contener agua como consecuencia del intercambio de calor radiante entre la estructura y su entorno, generalmente no han sido tenidas en cuenta por los proyectistas en la creencia de que son insignificantes. Este punto de vista viene corroborado por los códigos usuales que tratan esta acción de una manera precipitada, si es que la tratan. Cuando se tienen en cuenta los gradientes térmicos que existen en el interior de las paredes del depósito, sus magnitudes se han basado en una teoría inadecuada y, consecuentemente, han sido irrealmente bajos.

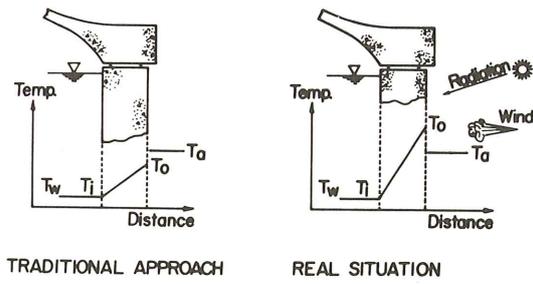


Fig. 1. Modelos de gradiente térmico.

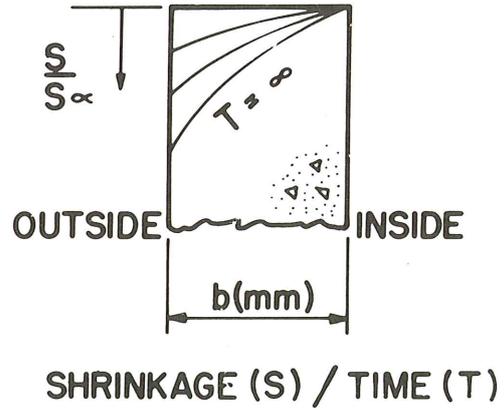


Fig. 4. Distribución de la retracción en el muro al secarse por una de sus superficies.

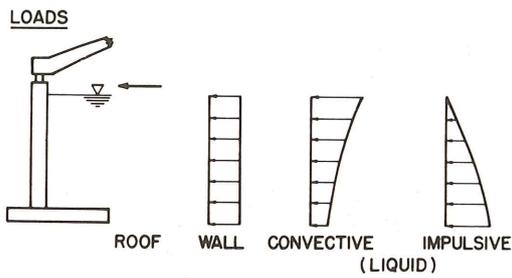
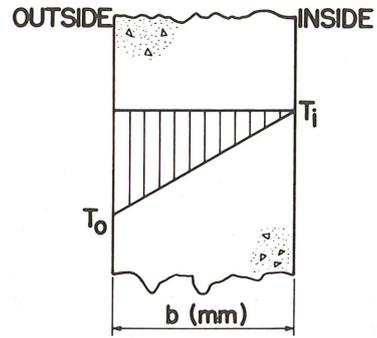
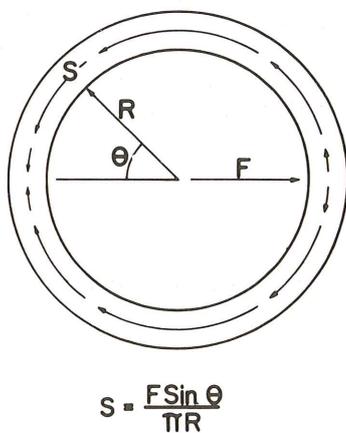


Fig. 2. Fuerzas horizontales debidas a las acciones sísmicas.



$$T_i - T_0 = (0.04b + 6)^\circ\text{C}$$

Fig. 5. Efectos de la retracción cuando el depósito se encuentra lleno, referida a un equivalente del gradiente de temperatura.



$$S = \frac{F \sin \theta}{\pi R}$$

Fig. 3. Distribución del esfuerzo cortante.

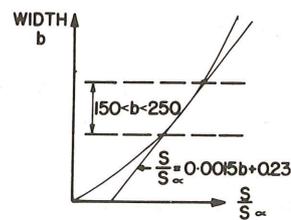


Fig. 6. Gradiente de retracción en un muro que se seca por uno de sus paramentos.

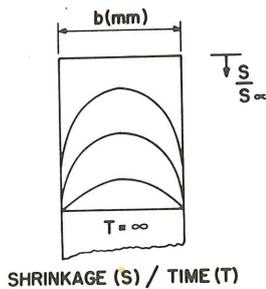


Fig. 7. Distribución de la retracción en un muro que se seca por sus dos paramentos.

### CREEP

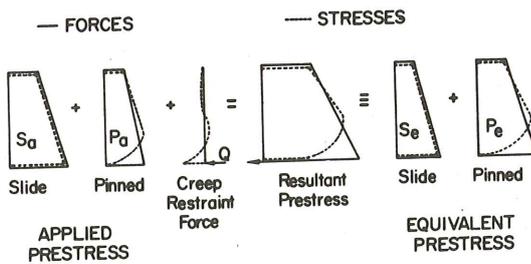
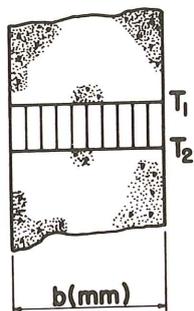


Fig. 10. Diagramas de esfuerzos y deformaciones respecto al pretensado circunferencial después de los efectos de la fluencia.



$$T_1 - T_2 = (26 - 0.06b)^\circ\text{C}$$

Fig. 8. Retracción global, expresada en el equivalente de distribución de temperaturas.

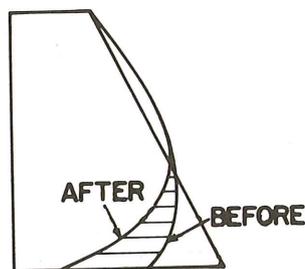


Fig. 11. Efecto de la redistribución de tensiones sobre el pretensado circunferencial.

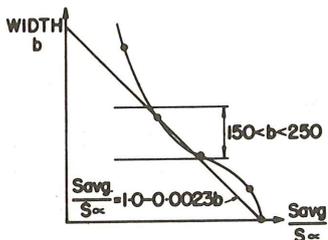


Fig. 9. Retracción global en un muro que se seca por sus dos paramentos.

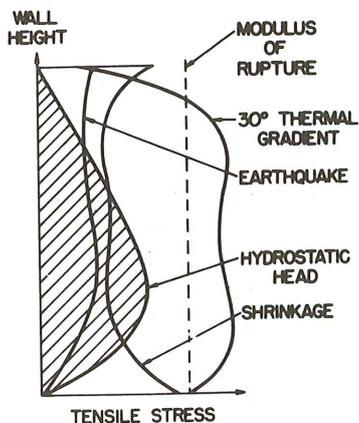


Fig. 12. Influencia de las acciones. Tensión circunferencial.

El cálculo aproximado tradicional de los gradientes de ambiente térmico (figura 1 a) se basa en la suposición de condiciones térmicas estables y sin radiación incidente. Como resultado de esto, la temperatura en la superficie exterior del hormigón se toma siempre menor que la del ambiente. Consecuentemente las recomendaciones para el diseño respecto al gradiente térmico son por tanto bajas.

Una forma más realista de abordar el problema consiste en considerar una situación transitoria que tiene en cuenta los efectos de una radiación actuante (figura 1 b). Las investigaciones primarias indican que pueden existir gradientes de temperatura del orden de  $30^{\circ}\text{C}$  a través de los muros del depósito, cifra que ha sido confirmada, en una ampliación de este trabajo realizado por Priestley (4,5), utilizando para ello un programa para el cálculo del flujo de calor. Las medidas realizadas en obra y facilitadas por Wood y Adams (6), muestran una buena concordancia entre las temperaturas medidas y la teoría.

### 3.2 Variación global de temperatura

La variación global de temperatura se define como la diferencia entre la temperatura media del muro y el "datum"; definiéndose el datum como aquella temperatura a la cual las tensiones debidas a la variación de temperatura total son cero. Cuando se trata de una pieza isostática, la temperatura media coincide con la temperatura datum; consecuentemente las tensiones a temperatura total son cero. Con piezas hiperestáticas, cada una tendrá una temperatura datum característica inicial que dependerá de la temperatura promedio de la pieza en el momento de quedar coaccionada durante la construcción. La fluencia, durante un cierto período de tiempo, reducirá gradualmente las tensiones generadas por la variación de la temperatura hasta que, eventualmente bajo condiciones de depósito lleno, la temperatura datum de la pieza se aproxime a la temperatura del líquido contenido.

## 4. TERREMOTO

La mayoría de las estructuras destinadas al almacenamiento de agua son componentes vitales en los servicios públicos de distribución de aguas y es esencial que estén proyectadas para que se mantengan en condiciones de impermeabilidad y servicio incluso después de un gran terremoto.

### 4.1 Acciones

Los terremotos producen aceleraciones horizontales que someten a los depósitos a cargas de inercia procedentes de los muros y cubierta y a cargas hidrodinámicas debidas al líquido que contienen (figura 2).

Las fuerzas dinámicas generadas por el líquido contenido son debidas a dos causas distintas. Una cierta parte del líquido actúa como si fuese una masa sólida en rígido contacto con los muros y la fuerza correspondiente se identifica con la fuerza de inercia. La aceleración también induce la oscilación del líquido contribuyendo a una presión dinámica adicional sobre los muros. Esta fuerza se define como fuerza convectiva, puesto que implica el movimiento del líquido.

### 4.2 Evaluación de fuerzas y tensiones

#### 4.2.1 Presión hidrodinámica

Recientemente se ha elaborado un método aproximado simplificado que es lo suficientemente exacto para su utilización en ingeniería, basado en la investigación de Housner (7, 8) y Jacobsen (9). Las presiones hidrodinámicas que el terremoto produce y las correspondientes tensiones de membrana y flexión han sido computadas a partir de las soluciones de Housner y Jacobsen y presentadas por Wood (10) en forma gráfica, apropiada para su aplicación al diseño de depósitos cilíndricos de hormigón.

#### 4.2.2 Fuerzas de inercia

Las fuerzas generadas por la aceleración horizontal del cerramiento y la cubierta son el producto del peso propio del componente estructural por el coeficiente sísmico adecuado, (véase Tabla 1). Se supone

que el coeficiente para las cargas de inercia es idéntico al componente de impulsión del coeficiente hidrodinámico. Las tensiones pueden evaluarse mediante la aplicación de las tablas para el diseño utilizando los coeficientes de membrana para estructuras cilíndricas (referencia 11).

### 4.3 Coeficientes sísmicos

En edificación y en otras construcciones es corriente absorber la energía debida a los terremotos diseñando la estructura de un modo dúctil y permitiendo desplazamientos notablemente superiores a los niveles de plastificación. Si los depósitos de hormigón tienen que permanecer en condiciones de servicio, este enfoque del problema no es satisfactorio e indudablemente se necesitan unos coeficientes de sismicidad más altos que los utilizados en las construcciones dúctiles. Los coeficientes sísmicos que se proponen se dedujeron a partir de las hipótesis siguientes:

- (a) Se considera que un depósito de hormigón es una estructura rígida frente a una carga lateral.
- (b) Con objeto de evitar un agrietamiento de cierta entidad durante un terremoto, debe evitarse una respuesta anelástica de la estructura. Por consiguiente los coeficientes sísmicos se basarán en una respuesta elástica y se utilizarán para el cálculo aproximado de las tensiones de trabajo.

Utilizando estas hipótesis, los coeficientes sísmicos para las tensiones de trabajo propuestas por Housner (8) han sido modificados por Wood (10, 12) (Tabla 1) para adaptarlos a las condiciones de Nueva Zelanda y son coherentes con el sistema de zonificación sísmica del país (definido en la referencia 13).

TABLA 1

| Coeficientes sísmicos           | Zona sísmica |           |           |
|---------------------------------|--------------|-----------|-----------|
|                                 | A            | B         | C         |
| Coeficientes de inercia K       | 0,40         | 0,33      | 0,27      |
| Coeficientes de empuje $K_0$    | 0,40         | 0,33      | 0,27      |
| Coeficiente de convección $K_1$ | $0,6/T_1$    | $0,5/T_1$ | $0,4/T_1$ |

$$T_1 = \frac{2 \pi \sqrt{R}}{\sqrt{0,586 \pi g \cdot \text{tg } h (0,586 \pi H/R)}} = \text{período fundamental de batido}$$

Siendo H = altura del líquido en el depósito y  
R = radio del depósito.

El coeficiente de impulso sísmico para la Zona A se eligió como la ordenada de período cero del espectro de respuesta de aceleración suavizado, publicado por Skinner (14). El coeficiente de convección por seísmo para la Zona A se obtuvo del espectro de velocidad con amortiguamiento cero, suavizado, deducido por Housner y publicado en la referencia 8.

### 4.4 Combinaciones de tensiones

Los períodos de oscilación asociados con las distribuciones de tensiones impulsivas y convectivas son significativamente diferentes, tardando la tensión convectiva mucho más en ser alcanzada. Es improbable que ambos picos de tensiones convectiva e impulsiva coincidan. Por consiguiente se propugna (10) que la tensión total hidrodinámica sea la raíz cuadrada de la media de los cuadrados de las tensiones de impulso y convección en vez de su suma. Estas tensiones resultantes se combinan directamente con las tensiones de inercia.

### 4.5 Cortante en la base

En las estructuras circulares la resultante horizontal de las fuerzas sísmicas (F) se equilibra mediante los cortantes circunferenciales (S) alrededor de la base del muro (Figura 3) que viene dado por la ecuación:

$$S = \frac{F \text{ sen } \theta}{R}$$

Siendo  $S$  = Esfuerzo cortante por unidad de longitud alrededor de la circunferencia de la base del muro.

#### 4.6 Altura suplementaria

Se le deberá dotar de un sobrante de altura para evitar daños en los muros y cubierta bajo la acción de oscilaciones de ondas sísmicas moderadas cuando el depósito está lleno. Bajo fuertes oscilaciones es admisible que se produzcan daños en la cubierta, pero deberán limitarse al máximo en muros y tuberías con objeto de que se mantengan en servicio.

### 5. RETRACCION

La retracción en el hormigón depende en primer lugar del grado de desecación que se produzca y por consiguiente de las condiciones que se indican en la Tabla 2.

Los efectos de la retracción, que puede dividirse en retracción diferencial y global, son análogos a los efectos térmicos. Para facilitar la evaluación de las tensiones es conveniente expresar los efectos de la retracción en términos de una equivalencia en gradiente de temperatura (ETG) o en una equivalencia de descenso, de temperatura global (EOT) para diferencia de retracción o para retracción global respectivamente.

#### 5.1 Parámetros de retracción y fluencia

Los valores medios de los parámetros de retracción y fluencia bajo las condiciones normales se han tomado de la referencia 15.

El coeficiente medio de retracción (med.  $S_u$ ) =  $800 \times 10^{-6}$ .

El coeficiente medio de fluencia (med.  $C_u$ ), se define como la deformación por fluencia/deformación inicial = 2,35.

Estos valores medios deben ser modificados para las condiciones particulares del proyecto. En la referencia 15 se presentan gráficamente los factores de corrección de una manera simplificada. La tabla 2 presenta los valores que han de tener los factores de corrección para una evaluación de una mezcla de hormigón y unas condiciones típicas en Nueva Zelanda.

TABLA 2

| Condiciones normales                  | Valores de proyecto   | Factor de retracción | Factor de fluencia |
|---------------------------------------|-----------------------|----------------------|--------------------|
| Consistencia                          | 10 cm                 | 1,04                 | 1,06               |
| Espesor de la pieza                   | 20 cm                 | 0,93                 | 0,96               |
| Humedad relativa                      | 70 %                  | 0,70                 | 0,80               |
| Porcentaje de finos                   | 50 %                  | 1,00                 | —                  |
| Contenido de cemento                  | 350 kg/m <sup>3</sup> | 0,98                 | —                  |
| Edad del hormigón al ponerlo en carga | 3 meses               | —                    | 0,74               |
| Contenido de aire                     | 6 %                   | —                    | 1,00               |
|                                       |                       | 0,66                 | 0,60               |

Coficiente de retracción a tiempo infinito ( $S_\infty$ ) =  $800 \times 0,66 \times 10^{-6} = 530 \times 10^{-6}$

Coficiente de fluencia a tiempo infinito ( $C_\infty$ ) =  $2,35 \times 0,60 = 1,41$

Las tensiones por retracción se reducen por efecto de la fluencia. En la referencia 16 se presenta el resultado de los efectos de la fluencia sobre tensiones de retracción, que vienen dados por

$$S_\infty = S_u \frac{(1 - e^{-C_\infty})}{C_\infty}$$

$$S_\infty = 530 \times \frac{10^{-6} (1 - e^{-1,41})}{1,41} = 284 \times 10^{-6}$$

## 5.2 Retracción diferencial

En situación de depósito lleno, la superficie interior de la pared del depósito llega a saturarse de humedad y el hormigón tiende a hincharse, mientras que la superficie exterior se retrae, encontrándose más seca por estar expuesta al sol y al viento. Como resultado de estos cambios de volumen, se producen tensiones que son de tracción en la superficie exterior y de compresión en la superficie interior.

Después de un cierto tiempo se establece el equilibrio, cuando el flujo de humedad a través de la pared del depósito desde el interior iguala a la velocidad de pérdida de agua por evaporación en la superficie exterior (Figura 4).

### 5.2.1 Retracción diferencial en términos de un equivalente de gradiente de temperatura

A partir de los datos de la referencia 17 se ha deducido una correspondencia entre el espesor del elemento (b) y la relación entre deformación por retracción (S) y la deformación por retracción final ( $S_{\infty}$ ), para el equivalente de un elemento que seca por una de sus superficies (Figura 6).

Para fines de proyecto la retracción diferencial se ha expresado con relación al espesor del muro. La curva resultante de la Figura 6 se ha aproximado a una línea recta en la parte correspondiente a los órdenes de valores normales en espesores de muro (de 150 a 250 mm). La relación entre ambos valores viene dada por:

$$\frac{S}{S_{\infty}} = (0,0015 b + 0,23), \text{ siendo } b \text{ el espesor del muro en mm.}$$

$$S = S_{\infty} (0,0015 b + 0,23) = 284 \times 10^{-6} (0,0015 b + 0,23).$$

Es conveniente para fines de diseño expresar la retracción diferencial refiriéndola a un equivalente del gradiente de temperatura (ETG) relacionando el coeficiente de retracción (S) con el coeficiente de dilatación térmica ( $\infty$ ). Para este artículo se ha utilizado un coeficiente de dilatación térmica de  $10,8 \times 10^{-6}/^{\circ}\text{C}$ .

$$\text{ETG} = \frac{S}{\infty} = \frac{284 \times 10^{-6}}{10,8 \times 10^{-6}} (0,0015 b + 0,23) = (0,04 b + 6)^{\circ}\text{C} \text{ (Figura 5).}$$

## 5.3 Retracción global

La retracción global se define como la retracción media en el muro. Cuando se deja vacío el depósito durante un cierto período de tiempo, la superficie del hormigón se seca y tiende a retraerse, mientras que el hormigón del interior está mucho más húmedo y trata de oponerse a la reducción de volumen.

La retracción continúa con el transcurso del tiempo hasta que finalmente el muro se seca por completo (Figura 7). En una estructura donde los muros están coaccionados ya sea por la cubierta y/o la losa de solera, dichos muros estarán sometidos a una deformación por retracción total que, para efectos de evaluación, se expresa en términos de un equivalente del descenso de la temperatura global (EOT) (Figura 8).

### 5.3.1 Retracción global en función de un equivalente de la temperatura global (EOT) (Condiciones de depósito lleno)

Partiendo de la referencia 17, se ha deducido una relación entre el espesor del elemento (b) y la proporción entre la deformación por retracción (S) y la deformación por retracción final ( $S_{\infty}$ ) para un elemento que se seque por ambas superficies (Figura 9). En este artículo se ha considerado que el depósito puede permanecer vacío durante un período de seis meses. Empleando un procedimiento similar al utilizado en el apartado 5.2 para un espesor normal de muro (150 – 250 mm), se ha establecido la interdependencia siguiente:

$$S_{\text{med}} = S_{\infty} (1,0 - 0,0023 b) = 284 \times 10^{-6} (1,0 - 0,0023 b)$$

Siendo  $S_{\text{med}}$  definida como la retracción total media a través del muro.

$$\text{Entonces } \text{EOT} = \frac{S_{\text{med}}}{\infty} = \frac{284 \times 10^{-6}}{10,8 \times 10^{-6}} (1,0 - 0,0023 b) = (26 - 0,06 b)^{\circ}\text{C}$$

## 6. FLUENCIA

El fenómeno de fluencia se define como una deformación que se produce, y es inducida, por una tensión permanente. Se da un margen de tolerancia cuando se producen con el tiempo pérdidas en la fuerza de pretensado. En estructuras hiperestáticas, como por ejemplo los depósitos, el efecto más importante de la fluencia es la considerable redistribución de tensiones que se produce como consecuencia de la coacción impuesta a los desplazamientos de fluencia.

Típico en la práctica constructiva de depósitos es dejar que la base del muro pueda deslizar mientras se está aplicando parte del esfuerzo circunferencial de pretensado. Si se produce alguna pausa durante la aplicación del pretensado pueden tener lugar algunos movimientos por fluencia. Una vez que la base del muro se ancla o fija en su posición, impidiendo desplazamientos en dicha zona, se generan fuerzas radiales.

El efecto de esta fuerza de coacción es una reducción (en las proximidades de la junta) de la compresión del muro, inducida por el pretensado circunferencial. Para fines de proyecto este efecto puede ser simulado adecuadamente reduciendo la proporción de pretensado que se utiliza para análisis en la situación de libertad de deslizamiento, e incrementando la proporción de pretensado en la situación de anclaje (Figura 10).

### 6.1 Evaluación de la distribución del pretensado equivalente

En la referencia 18 se presentan una serie de gráficos, que muestran la relación entre la proporción de carga soportada por la estructura modificada y la edad del hormigón cuando se cambia la forma estructural, para un hormigón de 34,5 MPa y una gama de factores de fluencia.

Si  $S_a$  = Factor que representa la proporción de pretensado circunferencial aplicado en la situación de libertad de deslizamiento.

y  $M$  = La parte de  $S_a$  transferido por fluencia a la estructura anclada equivalente.

Entonces  $M S_a$  = a la proporción de pretensado (a adicionar a  $P_a$ ) que, teniendo lugar después de la fluencia, actúa como si se aplicase en la situación de anclaje.

Por tanto, la proporción de equivalente de pretensado que actúa como si se aplicase en la situación de anclaje ( $P_e$ ) y en la situación de deslizamiento ( $S_e$ ) viene dado por:

$$P_e = P_a + M S_a \text{ y } S_e = 1 - P_e$$

### 6.3 Ejemplo de aplicación al cálculo

Parámetros de proyecto:

Edad al realizarse el pretensado: 3 meses. Inmediato anclaje de la pared.

Factor de fluencia: 1,5. Resistencia del hormigón 34,5 MPa.

Proporciones de los pretensados circunferenciales:

$$S_a = 0,75 \quad P_a = 0,25$$

De la referencia 18, Figura 5.3 (d) pág. 33 tenemos:

$$M = 0,56$$

Luego:

$$P_e = P_a + M S_a = 0,25 + 0,56 \times 0,75 = 0,67$$

y

$$S_e = 1 - P_e = 1 - 0,67 = 0,33 \text{ (con referencia a la Figura 10).}$$

### 6.4 Implicación de los efectos de fluencia

El desarrollo de reacciones hiperestáticas por efecto de la fluencia tiene dos importantes implicaciones:

(I) El pretensado circunferencial efectivo adyacente a la base del muro se reduce significativamente (Figura 11).

Puede hacerse que exista un margen para este efecto disponiendo una armadura circunferencial no pretensada adyacente a la junta y/o incrementando la proporción de pretensado circunferencial aplicado a la situación de deslizamiento.

La utilización más eficaz del pretensado en estructuras con el muro deslizante es aplicar la totalidad del pretensado antes de anclar el muro. El tiempo que transcurre entre la puesta en tensión y el llenado del depósito es el suficiente para que se produzca una proporción relativamente amplia de la fluencia, generándose así una adecuada compresión residual como para evitar filtraciones en la junta.

(II) En dirección vertical se producen tensiones de flexión significativas. Las tensiones de flexión iniciales generadas por el pretensado circunferencial son debidas enteramente a la cantidad de pretensado después de ser anclado el muro. La evolución de la fluencia induce fuerzas de coacción que generan tensiones de flexión adicionales en sentido vertical. Sin embargo, puesto que estas tensiones de flexión verticales adicionales (que producen un desplazamiento realmente inducido) se desarrollan a la misma velocidad que la fluencia circunferencial, puede aplicarse el factor de reducción de tensiones descrito por Fenwick (ecuación 5.3 referencia 18).

$$f_i = f_o \frac{(1 - e^{-\Phi})}{\Phi}$$

Siendo:

$f_i$  = La tensión de flexión adicional vertical debida a la fuerza de coacción por fluencia.

$\Phi$  = Factor de fluencia =  $\frac{\text{deformación por fluencia}}{\text{deformación elástica}}$

$$f_o = f_e - f_a$$

Siendo:

$f_e$  = La tensión vertical de flexión generada por el pretensado circunferencial equivalente aplicado en la condición de anclaje ( $P_a$ ) asumiendo una rigidez elástica vertical.

$f_a$  = La tensión vertical de flexión generada por el pretensado circunferencial real aplicado en la condición de anclaje ( $P_a$ ) asumiendo una rigidez elástica vertical.

Las tensiones verticales de flexión generadas por la aplicación del pretensado circunferencial vienen dadas por:

$$f_t = f_a + f_i$$

## 7. EFECTOS DE LA FISURACION

La fisuración en una superficie que está sometida a tensiones de tracción reduce la rigidez a flexión de un elemento. Tal pérdida de rigidez en dirección vertical de los muros del depósito da lugar a un aumento máximo de la curvatura debido a la aplicación de la carga de agua y al pretensado.

En el caso de que el espesor de los muros del depósito sea del orden de 150 a 250 mm, una aproximación aceptable de variación en estos momentos verticales es adoptar como momento de cálculo el 80 por 100 del momento calculado, suponiendo una sección no fisurada. Esta aproximación se basa en los resultados de un análisis por elementos finitos\* que tiene en cuenta la rigidez de sección fisurada.

Las tensiones inducidas por las deformaciones debidas a la temperatura y a la retracción deberán ser determinadas a partir del momento de la sección fisurada (definido seguidamente), aplicando a una sección de hormigón fisurado, es decir la curvatura no queda afectada.

$$M_{\text{fisurada}} = M_{\text{no fisurada}} \times \frac{I_{\text{fisurada}}}{I_{\text{no fisurada}}}$$

\* Programa de elementos finitos en flujo plástico M W D.

## 8. SIGNIFICADO DE DIVERSOS COMPONENTES DE ACCIONES

Para dar una idea de las magnitudes relativas del calor, terremoto y efectos de la retracción comparándolas con la carga hidrostática normal, se han dibujado las tensiones normales de tracción circunferenciales (Figura 12) correspondientes a un depósito de 5.000 m<sup>3</sup> de las siguientes dimensiones:

Altura del muro 7,2 m, espesor del muro 0,2 m y diámetro interior 30 m. Se considera que el muro, va anclado en la base y libre en la parte superior.

- A — Carga hidrostática 7,2 m (tensión directa).
- B — Temperatura diferencial 30°C (tensión de flexión en la superficie interior a tracción).
- C — Retracción, 14°C ETG y 7°C EOT (véanse secciones 5.3 y 5.4) (tensiones en la superficie exterior).
- D — Zona A sísmica (tensiones directas).
- E — Módulos de rotura (basados en  $K/f_c$  referencia 19).

Para aclarar los efectos de la redistribución de tensiones producidas por la fluencia, se han considerado tres clases de pretensado (véase Tabla 3) y los resultados se han llevado a la Figura 13.

**TABLA 3**  
Proporciones de pretensado circunferencial aplicado mientras la base del muro es

| Clase de carga | De libre deslizamiento |       | Anclada |       |
|----------------|------------------------|-------|---------|-------|
|                | $S_a$                  | $S_e$ | $P_a$   | $P_e$ |
| 1              | 0                      | 0     | 1,0     | 1,0   |
| 2              | 0,5                    | 0,22  | 0,5     | 0,78  |
| 3              | 1,0                    | 0,44  | 0       | 0,56  |

## 9. BASES PARA EL PROYECTO

### 9.1 Generalidades

Las tensiones en el hormigón producidas por un gradiente térmico de 30°C son extremadamente altas. En consecuencia el método tradicional de cálculo de asegurar una adecuada resistencia a la rotura limitando las tracciones en el hormigón y en el acero no sólo es impracticable y antieconómico, sino que en muchos casos es imposible. A no ser que el depósito se encuentre enterrado o aislado, en cuyo caso el diseño se basará en el criterio de requisitos de servicio por la limitación del ancho de fisura.

El cálculo de los muros de hormigón y de las placas de cubierta ajustado para cumplir las especificaciones respecto al ancho de fisura es más complejo que el cálculo basado en las tensiones admisibles.

Los procedimientos para un rápido análisis del hormigón armado y pretensado se han deducido de lo que viene descrito en la referencia 21 y en este artículo se discute brevemente.

Las ecuaciones han sido desarrolladas entre parámetros que se han visto eran los más adecuados y han sido programadas para una calculadora de mesa. Esto facilita la rápida elaboración de las curvas de interacción entre las deformaciones en la sección (de las cuales se deduce el ancho de fisuración) y el momento aplicado, la curvatura, así como el empuje en el propio plano.

### 9.2 Hormigón armado

Los parámetros adimensionales ( $R_{ct}$ ,  $R_c$ ,  $R_{st}$  y  $\Phi$ ) para una sección de hormigón armado sometida a un momento  $M$ , una curvatura adecuada  $\Phi_d$  y un empuje en el propio plano  $T$ , se han desarrollado en la referencia 20 y se facilitan a continuación:

$R_*$  = Parámetro de tensiones.

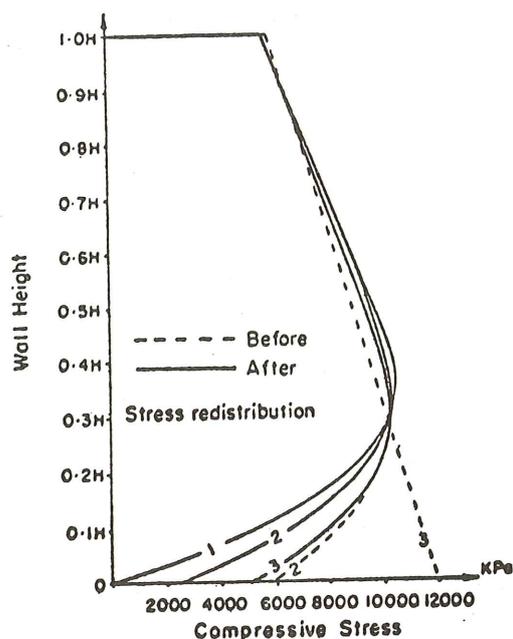


Fig. 13. Efectos de la fluencia sobre el pretensado circunferencial.

Siendo:

\* = ct, st ó c representando respectivamente la tensión superficial, el nivel de armado o la superficie de compresión.

f = Tensión del acero equivalente o real que es pertinente.

n = Relación entre los módulos =  $\frac{E_s}{E_c} = \frac{\text{Módulo de Young para el acero}}{\text{Módulo de Young para el hormigón}}$

y  $\Phi' = \text{Parámetro de curvatura} = \frac{\Phi d E_s}{n M/d^2}$

Estos parámetros pueden trazarse en función de la relación de deformaciones en el propio plano  $\epsilon$ /curvatura unitaria  $\Phi_d$ .

La aplicación de esta técnica al diseño de los depósitos de hormigón armado se describe en la referencia 21.

### 9.3 Hormigón parcialmente pretensado

De una manera similar a como lo eran en el apartado anterior, los parámetros adimensionales, ( $P_{ct}$ ,  $P_c$ ,  $P_{pst}$  y  $\Phi'$ ) se han deducido a partir de una sección de hormigón pretensada sometida al momento M, la curva adecuada  $\Phi_d$  y el empuje en el propio plano T\*.

$P_* = \text{Parámetro de tensiones} = \frac{f_*}{f_{si}}$

\* Los empujes en el propio plano o las tensiones se tienen en cuenta al evaluar las tensiones ( $f_{si}$ ) en el tendón previamente aflojado. En la referencia 20 se facilitan fórmulas para su evaluación.

Donde:

\* y f = tienen la misma definición que en el apartado 9.2.

$f_{si}^+$  = tensión en el tendón suelto (es decir, aquella tensión en el tendón cuando el hormigón a esa profundidad no está tesado).

$\Phi''$  = Parámetro de curvatura =  $\frac{\Phi_d \cdot E_s}{f_{si}}$  y

m = Parámetro del momento =  $\frac{n M}{d^2 f_{si}}$

Estos parámetros ( $P_{ct}$ ,  $P_c$ ,  $P_{st}$  y m) pueden ser trazados en función del parámetro de curvatura  $\Phi''$ .

La aplicación de esta técnica al proyecto de depósitos de hormigón parcialmente pretensados se describe en la referencia 21.

#### 9.4 Ancho de fisuras

El método de Nawy y Blair (22) para el cálculo del ancho de fisuras se ha comprobado que es muy adecuado para el diseño tanto de los depósitos de hormigón armado como los de hormigón pretensado (21). Con este método la anchura de fisuras viene dada en función de las tensiones de tracción de la sección del hormigón.

La anchura máxima de la fisura en la superficie w, viene dada por

$$w = 4,1 \times 10^{-6} \epsilon_{ct} E_s \sqrt{I_x}$$

Siendo:

$\epsilon_{ct}$  = La tensión de tracción en la superficie.

$I_x$  = Índice de emparrillado (referencia 22).

La tensión de tracción en la superficie  $\epsilon_{ct}$  puede calcularse a partir de la expresión

$$\epsilon_{ct} = \frac{R_{ct} n M}{E_s d^2} \text{ para el hormigón armado}$$

$$\epsilon_{ct} = \frac{P_{ct} f_{si}}{E_s} \text{ para el hormigón pretensado}$$

Las predicciones del ancho de fisura mediante las fórmulas que se disponen para el hormigón pretensado (con o sin armaduras no pretensadas) se comparan en la referencia 21. Se ha descubierto que para el grado de pretensado que es requerido para los depósitos, la armadura no pretensada parece que proporciona pocos beneficios. Sin embargo se considera necesario controlar las fisuras inducidas por la retracción y la temperatura, que aparecen durante la construcción antes de proceder al pretensado.

Por otra parte, puede no ser necesaria una armadura pasiva en aquellos depósitos construidos con paneles prefabricados pretensados, puesto que las tensiones de tracción superficiales se encuentran dentro de límites aceptables bajo las acciones originadas por la temperatura y la retracción.

#### 9.5 Efectos diferidos

Existe la evidencia de que los anchos de fisura debidos a las cargas permanentes y repetidamente aplicadas pueden ser sustancialmente mayores que las que se producen cuando la carga se aplica inicialmente (23). Debido a la compleja naturaleza de la acción combinada de la fluencia y a la pérdida de adherencia del hormigón adyacente a la armadura de tracción, no hay métodos fácilmente aplicables para la evaluación de sus efectos. Parece ser necesario examinar los efectos a largo plazo sobre la fisuración de muros y losas.

## 10. RESUMEN

Las especificaciones de los códigos usuales y los sistemas prácticos recomendados para el cálculo, tanto de los depósitos de hormigón armado como los de hormigón pretensado, inducen a los proyectistas a considerar la cota de agua retenida como la principal condición de carga. Otros efectos que son citados que intervienen considerados de importancia secundaria y como una consecuencia, son bien ignorados o infraestimados. Contrariamente a esta creencia comúnmente aceptada, ciertos aspectos tales como la temperatura, terremotos, retracción y fluencia, producen tensiones del mismo orden, y algunas sustancialmente más altas, que aquéllas generadas por la carga hidrostática normal (24).

De las medidas realizadas en obra y de las observaciones, se ha obtenido evidencia convincente y apoyo para la teoría de la existencia de tensiones por encima del módulo de rotura (del hormigón). Esto ha hecho necesario una revisión de la filosofía del diseño puesto que el proyecto de depósitos por el sistema tradicional basado en las tensiones admisibles, es impracticable. Un procedimiento utilizable basado en las anchuras admisibles de fisura ha sido desarrollado como alternativa bien justificada y practicable. Puesto que la fisuración se ha considerado tradicionalmente como indeseable en las estructuras para el almacenamiento de agua, la fisuración controlada es beneficiosa en cuanto que las tensiones de flexión que dan lugar a deformaciones llegan a ser significativamente más bajas que las que se producen en una sección no fisurada (debidas a efectos térmicos y de retracción). Los problemas surgen como consecuencia de unas exigencias analíticas más complejas que resultan del perfeccionamiento de procedimientos sencillos para el rápido análisis de las secciones de hormigón armado y pretensado sometidas a las combinaciones de cargas aplicadas.

## 11. CONCLUSIONES

Los efectos de la temperatura, terremotos, retracción y fluencia producen tensiones en los depósitos de hormigón y justifican sean mencionados en los códigos establecidos al respecto y en las recomendaciones prácticas para el proyecto de tales estructuras.

La filosofía para el diseño de los depósitos de hormigón debe ser revisada de modo que constituya una aproximación a una mejor utilización.

La evaluación del criterio del ancho de fisura a efectos del proyecto de las estructuras para el almacenamiento de agua requiere un ulterior estudio, especialmente en el ámbito del hormigón pretensado.

## 12. AGRADECIMIENTO

El autor expresa su agradecimiento a la Comisión de Trabajo por su autorización para la publicación de este trabajo. También agradece a Nigel Priestley y a John Wood sus valiosos consejos, contribuciones y el continuo interés en lo que se refiere a los aspectos de la influencia térmica, fluencia y sismos; y a John Dean por su contribución al estudio para el cálculo del ancho de fisuras en muros y placas de hormigón armado y pretensado.

## APENDICE A

### RECOMENDACIONES DE LA INSTRUCCION

#### A.1 Temperatura

##### 1.1.1 Muros

##### 1.1.1.1 Diferencias de temperatura

A menos que la estructura vaya a ser enterrada o aislada, y a falta de un análisis térmico basado en el conocimiento de las condiciones meteorológicas locales, los muros se calcularán para gradientes de temperatura lineal de:

- (a) Caso de depósito totalmente lleno — 30°C más caliente el exterior que el interior.  
20°C más frío el exterior que el interior.

- (b) Caso de depósito totalmente vacío — 20°C más caliente el exterior que el interior.  
12,5°C más frío el exterior que el interior.

Se observará que este criterio se ha establecido para localidades con temperatura climática correspondiente a latitudes entre 35-48° y cuando las circunstancias sean otras será preciso hacer un conveniente ajuste.

#### A.1.1.2 Temperatura global

En una pieza hiperestática, se tomará la temperatura datum como la temperatura media del líquido contenido, con una tolerancia de  $\pm 5^{\circ}\text{C}$ . Para cada combinación particular de cargas se utilizará la temperatura datum que produzca las tensiones máximas.

#### A.1.2 Cubierta

##### A.1.2.1 Diferencias de temperatura

La cubierta se calculará para un gradiente lineal de temperatura de

$$t_r = 32 \left[ 1 - \left( \frac{1.200 - b}{1.200} \right)^5 \right] ^{\circ}\text{C}$$

siendo  $b$  = espesor de la cubierta en mm.

(El precedente criterio de proyecto se ha tomado de los gradientes de temperatura recomendados para tableros de puente con la parte inferior ventilada).

PRIESTLEY, M.J.N. (1975): "Design Thermal Gradients from Concrete Bridges", NZ. Eng., 31,9, pp. 213-219).

##### A.1.2.2 Variación de temperatura global

Se fijarán las oportunas tolerancias para las tensiones y movimientos que resulten de la variación de la temperatura media de la cubierta en  $\pm 20^{\circ}\text{C}$ . Deberá tenerse en cuenta que la cubierta transmite empujes horizontales a los muros mediante apoyos hiperestáticos.

#### A.2 Terremoto

Se adoptarán las adecuadas medidas para resistir las presiones inducidas entre el líquido y la estructura. Además de los efectos volcantes sobre la estructura, deberán adoptarse las previsiones necesarias en la estructura para contrarrestar los incrementos de las tensiones de membrana y de flexión así como del cortante en la base, debido a las presiones inducidas por el terremoto.

Se le dotará de una adecuada altura suplementaria para evitar daños en las paredes y cubierta bajo oscilaciones de ondas sísmicas moderadas cuando el depósito se encuentre lleno. Bajo fuertes oscilaciones, es admisible se produzcan desperfectos en la cubierta, pero hay que tratar de limitar los daños en las paredes y conducciones con objeto de mantener su estado de servicio. (Para un fuerte terremoto se considerarán las acciones recomendadas por el código y para un terremoto moderado se tomará la mitad del valor de dicha acción).

#### A.3 Retracción

A falta de un control de la retracción, basado en una adecuada dosificación de las mezclas y un acondicionamiento de la obra, los muros se diseñarán para:

- (a) Caso de depósito lleno:  
(I) Diferencia de retracción

- Equivalente a un gradiente térmico de  
 $(0,04 b + 6)^{\circ}\text{C}$
- (II) Retracción global
  - Equivalente a un descenso de temperatura global de  
 $0,5 (0,04 b + 6)^{\circ}\text{C}$   
 siendo  $b$  = espesor del muro en mm;

(Debe tenerse en cuenta este apartado cuando la estructura ha permanecido llena durante un período de tiempo relativamente largo, o vacía en un breve plazo. Aproximadamente un 40 por 100 del valor recomendado se alcanzará al cabo de dos semanas de haber sido llenado el depósito).

(b) Caso de depósito vacío:

- (I) Retracción global
  - Equivalente a un descenso de temperatura global de  $(26 - 0,06 b)^{\circ}\text{C}$   
 siendo  $b$  = espesor del muro en mm.

(Debe tenerse en cuenta este apartado cuando se trate de una estructura que tenga coaccionados los movimientos de sus muros y que haya estado vacía por lo menos durante seis meses y bajo condiciones de clima medio).

Los efectos de la retracción, identificados en términos del equivalente térmico, se han deducido de la gama de espesores normales en muros ( $b$ ) y son válidos para  $150 < b < 250$  mm.

- (a) Si las tensiones debidas a retracción y temperatura son aditivas, se utilizará como valor para la retracción el máximo recomendado.
- (b) Si las tensiones por retracción y temperatura se contrarrestan, se utilizará como valor para la retracción la mitad del recomendado.

#### A.4 Fluencia

Se adoptarán las medidas oportunas para la redistribución de las tensiones inducidas por la fluencia en los depósitos de hormigón pretensado, facilitándose planos detallados de las juntas semi-deslizantes.

#### A.5 Efectos de la fisuración

Los momentos flectores a utilizar en el diseño de los muros del depósito se calcularán admitiéndose la hipótesis para rigideces de secciones no fisuradas y afectándolas del adecuado coeficiente, con objeto de tener en cuenta los efectos de la fisuración.

##### A.5.1 Cargas aplicadas

Para muros (dentro de una gama de espesores de 150 a 250 mm) sometidos a cargas actuantes de agua y pretensado, las tensiones se determinarán considerando el 80 por 100 del momento que resultaría del análisis elástico, en condiciones de no haberse fisurado aplicado a una sección de hormigón armado fisurada.

$$M_{\text{cálculo}} = 0,8 M_{\text{no fisurada}}$$

##### A.5.2 Curvaturas utilizadas

Para los muros sometidos a las curvaturas actuantes (deformación inducida) respecto a la temperatura y retracción, se determinarán las tensiones a partir de los momentos de las secciones fisuradas aplicados a una sección de hormigón armado fisurada.

$$M_{\text{cálculo}} = M_{\text{fisurada}} = M_{\text{no fisurada}} \times \frac{I_{\text{fisurada}}}{I_{\text{no fisurada}}}$$

### 13. REFERENCIAS

1. (1976): Draft code on "Concrete Structures for the Storage of Liquids", NZ 3802:1976, NZ Standards Institute, Wellington.
2. (1976): Code of Practice for "The Structural Use of Concrete for Retaining Aqueous Liquids", BS 5337:1976 British Standards Institution, London.
3. (1970): "Design and Construction of Circular Prestressed Concrete Structures", ACI Title No. 67-40 reported by ACI Committee 344, ACI Journal, September 1970.
4. PRIESTLEY, M.J.N. (1975): "Thermal Stresses in Cylindrical Prestressed Concrete Water Reservoirs", Research Report 75-13. Department of Civil Engineering. University of Canterbury.
5. PRIESTLEY, M.J.N. (1976): "Ambient Thermal Stresses in Circular Prestressed Concrete Tanks", ACI Journal, October 1976.
6. WOOD, J.H. and ADAMS, J.R. (1977): "Temperature Gradients in Cylindrical Reservoirs", 6th Australian Conference on Mechanics and Strengths of Materials, August 1977.
7. HOUSNER, G.W. (1957): "Dynamic Pressures on Accelerated Fluid Containers", Bulletin of the Seismological Society of America, Volume 47, 1957.
8. HOUSNER, G.W. (1963): Appendix F in "Nuclear Reactors and Earthquake", Atomic Energy Commission, Report No. TID-7024, 1963.
9. JACOBSEN, L.S. (1949): "Impulsive Hydrodynamics of Fluid Inside a Cylindrical Tank and of Fluid Surrounding a Cylindrical Pier", Bulletin of the Seismological Society of America, Volume 39, No. 3, July 1949.
10. WOOD, J.H. (1975): "Earthquake Stresses in Concrete Reservoirs". Paper presented at the NZPI, 11th AGM and Technical Conference, 7-9 November 1975.
11. CREASY, L.R. (1961): "Prestressed Concrete Cylindrical Tanks".
12. WOOD, J.H. (1977): Central Laboratories, Ministry of Works and Development, Gracefield, Wellington. Personal communication.
13. (1976): Code of Practice for "General Structural Design and Design Loadings for Buildings", NZS 4203: 1976, NZ Standards Institute, Wellington.
14. SKINNER, R.I. (1964): "Earthquake Generated Forces and Movements in Tall Buildings". NZ Department of Scientific and Industrial Research, Bulletin 166.
15. MEYERS, B.L. and BRANSON, D.E. (1972): "Design Aid for Predicting Creep and Shrinkage Properties of Concrete", ACI Journal, September 1972.
16. LEONHARDT, F. (1964): "Prestressed Concrete-Design and Construction", page 442.
17. PICKETT, G. (1946): "Shrinkage Stresses in Concrete" Parts 1 and 2 ACI Journal, January and February 1946.
18. FENWICK, R.C. (1974): "Creep and Shrinkage on Concrete Bridges", New Zealand Road Research Unit Bulletin No. 28, 1974.
19. TROXELL, G.E., DAVIS, H.E. and KELLY, J.W. (1968): "Composition and Properties of Concrete", page 234.
20. DEAN, J. (1978): "Crack Width Design Parameters for Reinforced and Prestressed Concrete Walls and Slabs". To be published shortly.
21. VESSEY, J.V. (1977): "A Critical Review of Code Requirements for Circular Prestressed Concrete Reservoirs". Paper presented at the NZPCI 13th AGM and Technical Conference, 30 September.
22. NAWY, E.G. and BLAIR, K.W. (1971): "Further Studies of Flexural Crack Control in Structural Slab Systems". ACI Publication SP-20.
23. BENNETT, E.W. and DAVE, N.J. (1969): "Test Performances and Design of Concrete Beams with Limited Prestress", The Structural Engineer, December 1969, No. 12, Vol. 47.
24. VESSEY, J.V. (1975): "Design of Circular Prestressed Concrete Reservoirs", Report to Chief Designing Engineer (Civil), Ministry of Works and Development, New Zealand 1975.

Traducido por  
C. Sánchez Castro

\* \* \*

## Segunda Conferencia Internacional sobre Proyecto de Pavimentos de Hormigón

Indianápolis, USA, 15-16 Abril 1981

Durante los días 14 a 16 del próximo mes de Abril tendrá lugar en Indianápolis, USA, la Segunda Conferencia Internacional sobre Proyecto de Pavimentos de Hormigón. Su propósito es la presentación de las informaciones más recientes sobre el proyecto y comportamiento en servicio de los pavimentos de hormigón tanto en carreteras y calles urbanas como en toda clase de aeropuertos.

Como se recordará, la Primera Conferencia sobre el mismo tema se celebró en 1977, en la Universidad de Purdue (Indiana, USA), con una asistencia procedente de 18 países que superó los 350 participantes, de los cuáles seis eran españoles.

La Conferencia ha sido patrocinada por una serie de importantes organizaciones americanas, estatales y privadas, entre las que pueden destacarse la Federal Highway Administration (FHA), la Federal Aviation Administration (FAA), el Transportation Research Board (TRB) y la Portland Cement Association (PCA). Han prestado también su colaboración, entre otros, el Cembureau, el American Concrete Institute (ACI), la American Society of Civil Engineers (ASCE) y la Permanent International Association of Road Congresses (PIARC).

Las sesiones de trabajo comenzarán el martes 14 de Abril, después de la sesión de apertura, aunque a lo largo de los días 13 y 14 los participantes podrán retirar la documentación de la Conferencia, entre la que se incluye el texto de las diversas ponencias, y efectuar su inscripción si no lo hubieran hecho previamente.

La primera y segunda sesiones tendrán lugar respectivamente durante la mañana y tarde del martes 14, estando ambas dedicadas a cuestiones generales sobre proyecto y comportamiento de pavimentos de hormigón. A las ocho de la tarde del mismo día comenzará la tercera sesión, en la que se tratará el tema del proyecto de pavimentos compuestos.

Durante la mañana y tarde del miércoles 15 se celebrarán simultáneamente sesiones dedicadas a pavimentos de aeropuertos y de carreteras. Finalizadas dichas sesiones tendrá lugar una recepción y cena ofrecida a los participantes por el Comité organizador. En la sesión de la mañana del jueves 16 se tratará el tema del control del comportamiento de los pavimentos, y en la de tarde el de la rehabilitación de pavimentos. Finalizada ésta última tendrá lugar la conferencia de clausura.

Las sesiones se desarrollarán en idioma inglés, aunque existe la posibilidad de que, al igual que en la Conferencia de 1977, haya un servicio de traducción simultánea al francés. Cada una de las ponencias será presentada por su autor, y después de su exposición se concederá un amplio espacio de tiempo para discusiones y preguntas.

La cuota de inscripción asciende a 90 dólares, estando incluida en ella la documentación con el texto de las ponencias.

La Conferencia se celebrará en el hotel Hyatt Regency de Indianápolis. Los participantes pueden igualmente alojarse en el mismo, con una tarifa reducida durante los días 13, 14 y 15 de Abril. Se recomienda efectuar la reserva antes del 15 de Marzo.

Para ampliar la panorámica de la técnica de los pavimentos de hormigón, la Portland Cement Association ha organizado el viernes 18 una jornada de trabajo en su sede central de Skokie, dedicada a una serie de temas relacionados con el empleo del hormigón en carreteras y aeropuertos no tratados en la Conferencia, y que se completará con varias visitas técnicas interesantes a obras situadas en los alrededores de Chicago. El coste de participación en esta jornada, no fijado todavía, no está incluido en la cuota de la Conferencia.

Los interesados en asistir a la Conferencia pueden ponerse en contacto con la:

Asociación Española Permanente de los Congresos de Carreteras  
c/ Monte Esquinza, 24  
MADRID-4

o bien con:

Carlos Jofré  
Servicio de Pavimentos Rígidos  
Instituto Eduardo Torroja de la Construcción y del Cemento  
Apartado 19002  
MADRID-33

quienes les facilitarán copia del programa completo de la Conferencia, así como de los formularios de inscripción y de reserva de alojamiento.

Se mantienen contactos con el Cembureau a fin de organizar los desplazamientos, dentro de los Estados Unidos, a Indianápolis y Chicago.

Para los miembros de ATEP y otras personas relacionadas con el hormigón pretensado la Conferencia puede resultar de especial interés debido al relanzamiento que están experimentando los pavimentos de hormigón pretensado, y del que es buena prueba la extensa relación de ponencias dedicadas específicamente a este tema que se cita a continuación:

- "Algunos métodos nuevos de construcción de pavimentos de aeropuertos en hormigón pretensado" - Ponentes: Katsuhisa Sato y Tsutomu Fukute, del Instituto de Investigación de Puertos, y Haruo Inukai, del Departamento de Carreteras, de Japón.
- "Comportamiento de pavimentos de hormigón pretensado con 26 y 20 años de antigüedad en el aeropuerto Huari Bumedian de Argel" - Ponentes: Mohamed Mellouk, del Departamento de Obras Públicas, y Michel Ray, del Instituto Argelino de Obras Públicas, de Argelia.
- "La aplicación del hormigón pretensado a la construcción de pavimentos de aeropuertos" - Ponentes: H. van Noortwijk y A. van de Meent, del aeropuerto de Schiphol (Amsterdam), de Holanda.
- "Desarrollo y estado actual de la construcción de pavimentos de hormigón pretensado para aeropuertos en Europa" - Ponente: Fritz Klunker, de Dyckerhoff und Widmann AG, de la República Federal Alemana.
- "Evaluación de Pavimentos en el aeropuerto internacional Dulles" - ponentes: Phil Smith y Harvey J. Treibig, de Austin Research Engineers, y John Fowler, de Howard, Needles, Tammen, and Bergendoff, de Estados Unidos.
- "Comportamiento de pavimentos de carreteras en hormigón pretensados en los Estados Unidos" - Ponentes: Wade L. Gramling, del Departamento de Transporte de Pensilvania; Gene E. Morris, del Departamento del Transporte de Arizona; y T. C. Paul Teng, del Departamento de Carreteras del Estado de Mississipi, de Estados Unidos.

Hay que destacar asimismo en la anterior relación la muy diferente procedencia de las ponencias, lo que demuestra el interés a escala internacional del tema de los pavimentos de hormigón pretensado.

**PUENTE DEL EBRO EN LA AUTOPISTA DE NAVARRA**  
**AÑO 1976-1978**

| <i>Dirección:</i> | <i>Proyecto:</i>  | <i>Construcción:</i>   |
|-------------------|---|--|
| AUDEBASA          | C. Fernández Casado<br>J. Manterola Armisen<br>L. Fernández Troyano | HUARTE Y CIA, S.A.<br>DRAGADOS Y CONSTRUCCIONES, S.A.<br>Pretensado: DIWIDAG |

### **SOLUCION ESTRUCTURAL**

El cruce del río Ebro de la autopista de Navarra se realiza 2 kilómetros aguas bajo del pueblo de Cas-tejón de Ebro, en la provincia de Navarra.

En esta zona el río tiene un cauce estable de aproximadamente 110 m de ancho, pudiendo en caso de avenidas aumentar su anchura inundando la margen izquierda.

El vano que salva el río tiene una luz entre ejes de cimentaciones de 146 m., prolongándose el puente con dos vanos de 32 y 25,60 m., hasta la defensa del margen izquierdo.

El principal problema que plantea esta disposición es debido a la disposición del vano principal, pues la orografía del terreno hace innecesario un vano de compensación a partir de la torre.

Por tanto la compensación de los tirantes del vano principal se ha realizado llevando los tirantes de con-trarresto a dos contrapesos situados a los lados de la autopista.

El equilibrio de las fuerzas horizontales que producen los tirantes se realiza a través de dos vigas que unen los contrapesos a la zapata de la torre, transmitiéndose por tanto al terreno en las pantallas de ci-mentación de la torre, únicamente cargas verticales.

La inclinación de la torre se debe también al equilibrio de fuerzas en el nudo de unión torre - dintel donde se componen los axiles de ambos, cambiando la resultante de dirección en la zona inferior de la torre; se ha dispuesto entonces una inclinación de la torre que la haga estable en todas las etapas de la construcción.

Los cables de atirantamiento se han situado en la mediana del puente, colocándose la torre también en ésta. Como los contrapesos se han colocado en los bordes de la autopista, se forman tres planos de ca-bles; el plano delantero es doble, pues los cables que atirantan el dintel van de dos en dos, separados entre sí aproximadamente un metro.

#### **DINTEL:**

El dintel es de hormigón pretensado formado por un cajón tricelular de 14 m de ancho prolongado por dos vuelos laterales de 7,2 m.

Debido al tamaño de los vuelos éstos se sustentan mediante cuchillos verticales separados entre sí, 3,20 m. El cuchillo se prolonga en el interior del cajón en un diafragma que rigidiza la sección y absorbe los cortantes transversales, ya que el puente está colgado únicamente del centro.

La célula central del cajón de dos metros de ancho aproximadamente sirve para alojar los anclajes de los cables de atirantamiento.

La construcción del dintel se realiza por voladizos sucesivos mediante dovelas prefabricadas, que se mon-tan mediante una grúa que se coloca sobre la parte de dintel ya montado. Cada dovela de 3,20 m de longitud se divide en dos semidovelas de 60 Tn. de peso que se montan independientes, hormigonándose "in situ" el empalme de losas superior e inferior, y la unión entre anclajes. Las dovelas se unen mediante resina epoxi, la armadura del dintel se compone de barras Diwidag situadas en los ocho nudos del cajón que se van tensando al colocar las dovelas, y un pretensado CTT situado en las losas que se tesan poste-riormente, en la zona de mayores esfuerzos. Los dos vanos laterales tienen la misma sección transversal que el vano principal, realizándose también mediante dovelas prefabricadas.

#### **TORRE:**

La torre se sitúa en la mediana, por lo que en su parte inferior tiene que tener un ancho máximo de 2 m., siendo necesario un ensanche transversal en la zona de anclajes para alojar los cables oblicuos que van a los contrapesos.

La torre se ha realizado en hormigón armado, pretensándose únicamente horizontalmente para absor-ber la componente oblicua de los cables que van a los contrapesos.

La construcción se hizo mediante un encofrado trepador de 2,5 m. de altura por tongada, que iba varian-do de forma manteniendo constante todos sus planos.

#### **CABLES:**

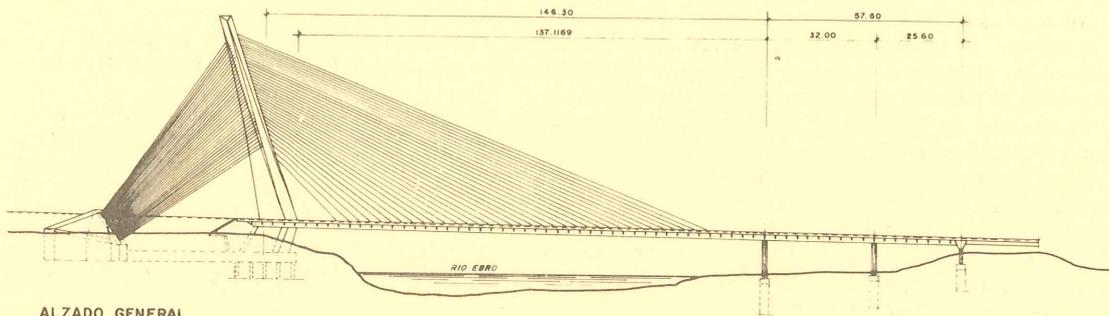
Los cables de atirantamiento son cables cerrados con las dos capas exteriores galvanizadas y posterior-mente pintadas.

El número de cables utilizados es de 140, con los siguientes diámetros: 60 mm., 72 mm., 80 mm. y 88 mm.

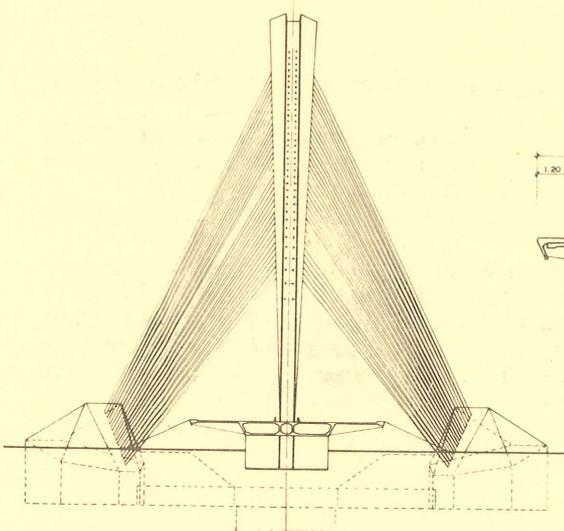
El anclaje de éstos se realiza mediante mazarotas rellenas de zamac, que es una aleación de estaño.

MEDICIONES - PUENTE DEL EBRO

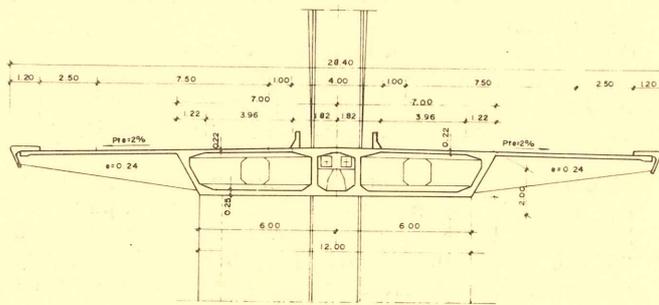
|                  | HORMIGON       |                                | ARMADURA ACTIVA ACERO 105 |                   |                   | ARMADURA ACTIVA ACERO 175 |                   |                   | ARMADURA PASIVA |                   |                   | ACERO EN CABLES CERRADO |                   |           |      |
|------------------|----------------|--------------------------------|---------------------------|-------------------|-------------------|---------------------------|-------------------|-------------------|-----------------|-------------------|-------------------|-------------------------|-------------------|-----------|------|
|                  | M <sup>3</sup> | M <sup>3</sup> /M <sup>2</sup> | KG                        | KG/M <sup>3</sup> | KG/M <sup>2</sup> | KG                        | KG/M <sup>3</sup> | KG/M <sup>2</sup> | KG              | KG/M <sup>3</sup> | KG/M <sup>2</sup> | KG                      | KG/M <sup>2</sup> |           |      |
| TRAMO ATIRANTADO | DINTEL         | 2.359,8                        | 0,54                      | 50.418,6          | 21,36             | 11,63                     | 35.525,8          | 15,05             | 8,19            | 151.288,4         | 64,10             | 34,89                   |                   |           |      |
|                  | TORRE          | 1.780,2                        | 0,41                      |                   |                   |                           | 7.031,2           | 3,95              | 1,62            | 145.702,0         | 81,85             | 33,61                   |                   |           |      |
|                  | ZAPATA         | 1.126,5                        | 0,26                      |                   |                   |                           | 14.974,1          | 13,29             | 3,45            | 81.596,0          | 72,43             | 18,39                   |                   |           |      |
|                  | CONTRAPESOS    | 5.119,9                        | 1,18                      |                   |                   |                           | 15.616,5          | 3,05              | 3,60            | 107.888,0         | 21,07             | 24,88                   |                   |           |      |
|                  | PANTALLAS      | 3.319,2                        | 0,76                      |                   |                   |                           |                   |                   |                 | 125.133,8         | 30,16             | 28,80                   |                   |           |      |
|                  | TIRANTES       |                                |                           |                   |                   |                           |                   |                   |                 |                   |                   |                         | 111,77            | 406,311,7 | 93,7 |
|                  | TOTAL          |                                | 3,15                      |                   |                   | 11,63                     |                   |                   | 16,86           |                   |                   |                         | 140,57            |           | 93,7 |
| TRAMO CONTINUO   | DINTEL         | 967,0                          | 0,58                      | 11.403,4          | 11,79             | 6,85                      | 22.802,0          | 23,57             | 13,69           | 59.108,4          | 61,12             | 35,50                   |                   |           |      |
|                  | PILAS          | 102,3                          | 0,06                      |                   |                   |                           |                   |                   |                 | 8.316,9           | 81,30             | 4,99                    |                   |           |      |
|                  | ZAPATAS        | 134,38                         | 0,08                      |                   |                   |                           |                   |                   |                 | 8.898,0           | 66,40             | 5,34                    |                   |           |      |
|                  | PANTALLAS      | 888,00                         | 0,53                      |                   |                   |                           |                   |                   |                 | 26.782,0          | 30,16             | 16,08                   |                   |           |      |
|                  | TOTAL          |                                | 1,25                      |                   |                   | 6,85                      |                   |                   | 13,69           |                   |                   |                         | 61,91             |           |      |



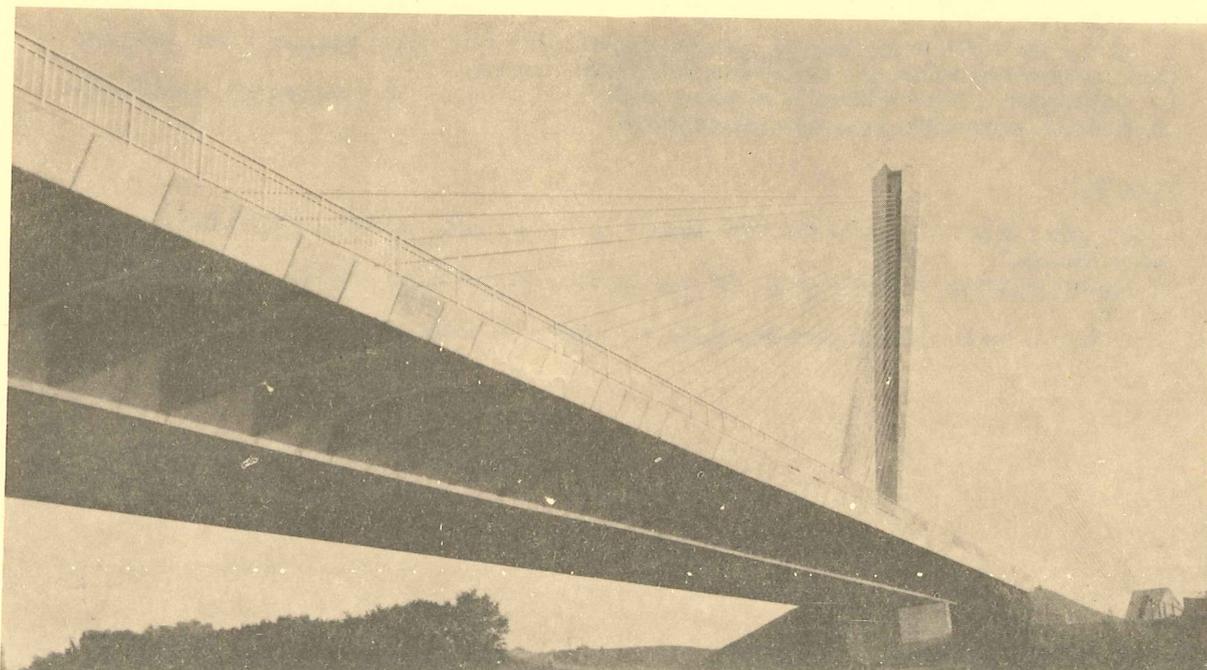
ALZADO GENERAL



ALZADO FRONTAL POR PILA Y ELEMENTOS DE ANCLAJE



SECCION TRANSVERSAL DEL DINTEL



**AUTOPISTA ELEVADA EN BUENOS AIRES (ARGENTINA)**  
**AÑO 1979-1980**

|  |   |   |
|--|---|---|
| <i>Dirección:</i>  | <i>Proyecto:</i>  | <i>Construcción:</i>  |
| Municipalidad de Buenos Aires<br>Dr. Laura<br>Ing. Máximo Fioravanti | C. Fernández Casado<br>J. Manterola Armisen<br>L. Fernández Troyano | COTHEI, Agrupación Huarte y Cía, S.A.<br>EACA<br>INDECO - E. Albert - C. Cortés |

**PLANTEAMIENTO GENERAL**

El conjunto formado por las autopistas Perito Moreno (AU-6) y 25 de Mayo (AU-1) tienen una longitud de 17,236 Km y atraviesan la ciudad de Buenos Aires de Este a Oeste desde la Avenida del General Paz hasta las inmediaciones del puerto. De estos 17,236 Km., 15 Km corresponden a un viaducto elevado de ocho carriles de circulación. La planificación de esta autopista ha sido realizada por la Municipalidad de Buenos Aires con la colaboración de ATEC.

**SOLUCION ADOPTADA**

Las condiciones más importantes que plantea este viaducto son las siguientes:

- 1 - Su gran longitud y superficie.
- 2 - Un plazo de realización de 2 años.
- 3 - La implantación del viaducto en una zona totalmente urbana.

Las dos primeras condiciones llevan a plantear una obra totalmente industrializada, la tercera condición obliga a una solución lo más flexible posible para facilitar el cruce recto, oblicuo, en curva con infinidad de calles y servicios, vías ferroviarias y de Metro. Las exigencias de luz no son importantes, no rebasan los 35 m y la altura a que se desarrolla oscila entre los 6 y 9 m en la mayoría del trazado. Únicamente en los nudos de General Paz, Ingeniero Huergo y 9 de Julio las pilas alcanzan 15 m de altura.

De los dos procedimientos generales de construcción, la prefabricación y la construcción "in situ", la primera presenta, en este caso, los siguientes inconvenientes:

- 1 - El innumerable número de luces de vigas necesarias para acoplarse a las exigencias funcionales de las calles.
- 2 - Dificultades de almacenamiento de las vigas para una adecuada distribución a lo largo de los diferentes tramos en construcción.
- 3 - Dificultades de transporte de piezas de gran envergadura por una ciudad con tráfico intenso.
- 4 - Dificultades en el montaje pues la traza está flanqueada por casas existentes que no permiten un acceso lateral.

La industrialización de la construcción "in situ", que es la solución adoptada, se realiza mediante cimbras autoportantes para la construcción del dintel. Tiene las siguientes ventajas:

- 1 - Absoluta flexibilidad en la colocación de las pilas.
- 2 - Menor fraccionamiento de la estructura lo que permite hacer unidades de obra mas grandes de una sola vez.
- 3 - Transporte mas simple de los materiales a la obra.

Con este procedimiento los rendimientos alcanzados han sido de un vano completo cada cuatro días lo que ha supuesto, habida cuenta del número de cimbras autoportantes empleadas, la construcción de 1 km de viaducto al mes.

Un segundo procedimiento de industrialización del puente ha sido la cimentación. Las posibilidades eran la zapata superficial o la cimentación semiprofunda. Se ha adoptado este último método fabricando pantalla-pilote unicas para cada pila, con lo que se evita el encepado, la interferencia con los servicios superficiales de la ciudad y una velocidad de ejecución de una pila por máquina y día.

**DESCRIPCION**

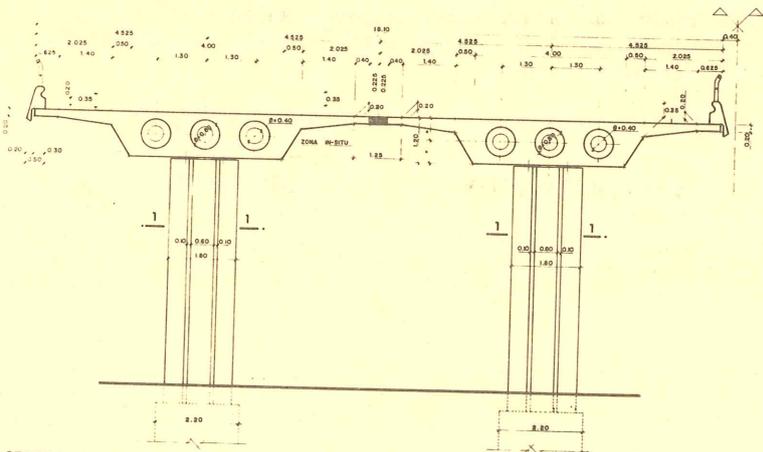
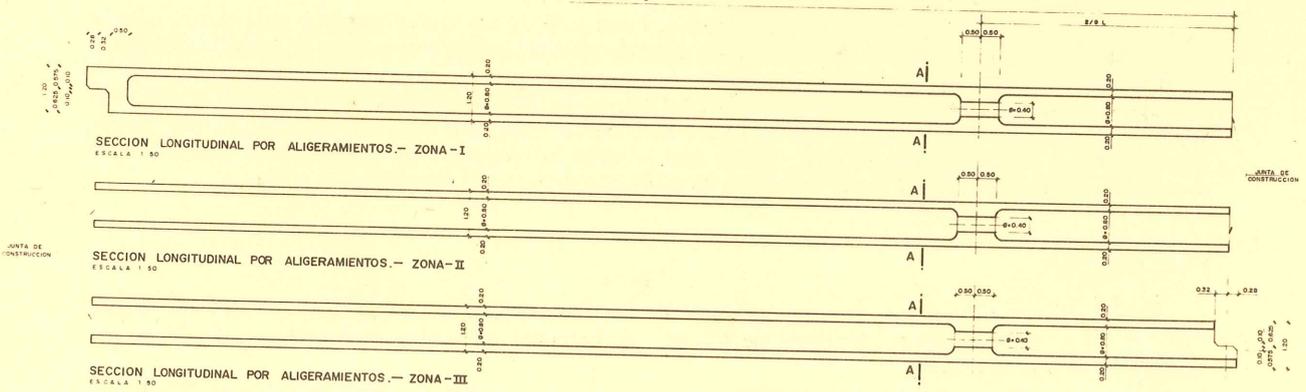
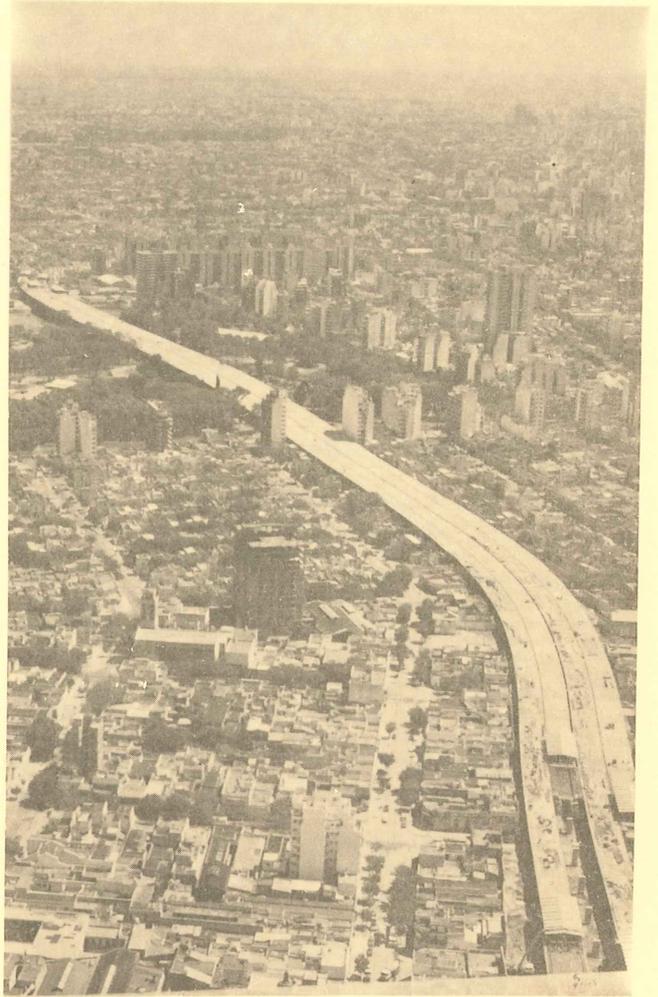
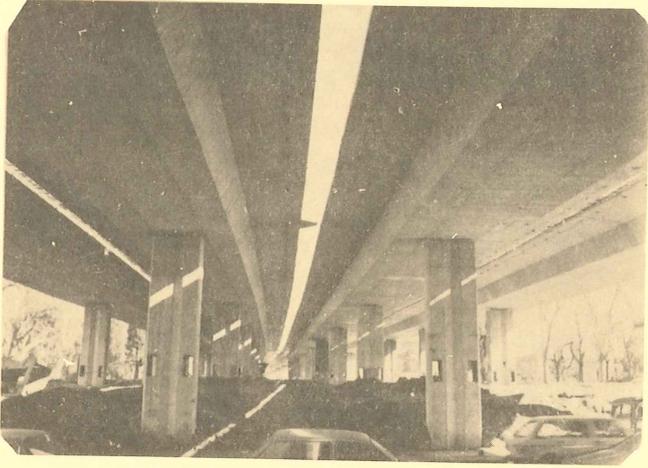
Tablero continuo de 38 m de anchura formado por cuatro cajones solidarizados dos a dos. Canto 1,20 m. Tres aligeramientos circulares de 0,8 m. de diámetro realizados mediante encofrado de goma hinchable y recuperable.

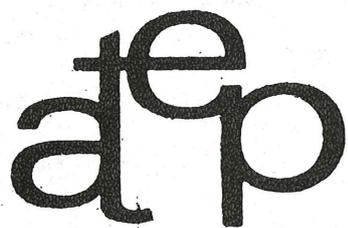
Longitudinalmente el tablero está formado por tramos de 7 vanos conectados entre sí por juntas a "media madera" situada a 2/9 de la luz. Este sistema permite realizar todos los apoyos con neopreno zunchado salvo los situados en la "media madera" que son de neopreno-teflón.

Las juntas de dilatación entre tramos quedan espaciados alrededor de 150 m lo que permite disponer una junta relativamente sencilla sin perturbar la rodadura.

**CUADRO DE CUANTIAS POR METRO CUADRADO DE ESTRUCTURA**

|           | HORMIGON                       | ARMADURA ACTIVA   |                   | ARMADURA PASIVA   |                   |
|-----------|--------------------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
|           | M <sup>3</sup> /M <sup>2</sup> | KG/M <sup>2</sup> | KG/M <sup>3</sup> | KG/M <sup>2</sup> | KG/M <sup>3</sup> |
| DINTEL    | 0,48                           | 10,3              | 21,46             | 40,6              | 84,5              |
| PILAS     | 0,08                           | —                 | —                 | 7,5               | 93,98             |
| PANTALLAS | 0,19                           | —                 | —                 | 11,0              | 57,9              |
| TOTAL     | 0,75                           | 10,3              | —                 | 59,1              | —                 |





**asociación técnica  
española del pretensado**