

# hormigón

## *y ACERO*

*nº 134*

*ASOCIACION TECNICA ESPAÑOLA DEL PRETENSADO.*

*DECLARADA DE UTILIDAD PUBLICA CON FECHA 4-3-77*

*INSTITUTO EDUARDO TORROJA DE LA CONSTRUCCION Y DEL CEMENTO.*

*COSTILLARES (CHAMARTIN). MADRID-33.*

## MIEMBROS PROTECTORES DE LA ASOCIACION TECNICA ESPAÑOLA DEL PRETENSADO

Dentro de nuestra Asociación existe una categoría, la de **"Miembro Protector"**, a la que pueden acogerse, previo pago de la cuota especial al efecto establecida, todos los Miembros que voluntariamente lo soliciten. Hasta la fecha de cierre del presente número de la Revista, figuran inscritos en esta categoría de **"Miembro Protector"** los que a continuación se indican, citados por orden alfabético.

**AGRUPACION DE FABRICANTES DE CEMENTO DE ESPAÑA.**— Velázquez, 23. Madrid-1.

**AGUSTI, S.A.**— Carretera de Barcelona, 36. Gerona.

**ALVI, S.A. (PREFABRICADOS ALBAJAR).**— Orense, 10. Madrid-20.

**CAMARA, S.A.**— Paseo de San Vicente, 4. Valladolid.

**CAMINOS Y PUERTOS, S.A.**— J. Lárzo Galdiano, 4. Madrid-16.

**CARLOS FERNANDEZ CASADO, S.A.**— Grijalba, 9. Madrid-6.

**CENTRO DE ESTUDIOS Y EXPERIMENTACION DE O.P. CENTRO BIBLIOGRAFICO.**— Alfonso XII, 3. Madrid-7.

**CENTRO DE TRABAJOS TECNICOS, S.L.**— Aribau, 185. Barcelona-21.

**DRAGADOS Y CONSTRUCCIONES, S.A.**— Avda. de América, 22. Madrid-2.

**ELABORADOS METALICOS, S.A.**— Apartado 553. La Coruña.

**ESTRUCTURAS Y GEOTECNIA BAUER, S.A.**— Pintor Juan Gris, 5. Madrid-20.

**E.T.S. INGENIEROS DE CAMINOS.**— Jorge Girona Salgado, 31. Barcelona-17.

**EUROPEA DE INYECCIONES, S.A. (EURINSA).**— López de Hoyos, 13. Madrid-6.

**FOMENTO DE OBRAS Y CONSTRUCCIONES, S.A.**— Balmes, 36. Barcelona-7.

**FORJADOS DOMO.**— Hermosilla, 64. Madrid-1.

**FREYSSINET, S.A.**— General Perón, 24. Madrid-20.

**HEREDIA Y MORENO, S.A.**— Princesa, 3. Madrid-8.

**HIDROELECTRICA DE CATALUÑA, S.A.**— Archs, 10. Barcelona-2.

**HIFORCEM.**— Apartado 41. Sevilla.

**HORMIGONES GERONA, S.A.**— Ronda San Antonio María Claret, 12. Gerona.

**IBERING, S.A.**— Plaza Gala Placidia, 5-7. Barcelona-6.

**IBERTECNICA.**— Plaza de Colón, 2. Madrid-1.

**INDUSTRIAS GALYCAS, S.A.**— Portal de Gamarra, 46. Vitoria.

**INGENIERO JEFE DE LA SECCION DE ESTRUCTURAS Y TUNELES.**— Ministerio de O.P. y Urbanismo. Dirección General de Carreteras. Madrid-3.

**INTECSA.**— Orense, 70. Madrid-20.

**INTEMAC.**— Monte Esquinza, 30. Madrid-4.

**JOSE ANTONIO TORROJA, OFICINA TECNICA.**— Zurbano, 41. Madrid-10.

**LABORATORIO CENTRAL DE ESTRUCTURAS Y MATERIALES.**— Alfonso XII, 3. Madrid-7.

**MEDITERRANEA DE PREFABRICADOS, S.A.**— Apartado, 34. BENICARLO (Castellón).

**NEXOR, S.A.**— Dato, 18-1.<sup>o</sup>. Vitoria.

**NUEVA MONTAÑA QUIJANO, S.A.**— Fábrica de Forjas de Buelna. LOS CORRALES DE BUELNA (Santander).

**PACADAR, S.A.**— Hermosilla, 57. Madrid-1.

**PRELOAD SISTEMAS, S.A.**— Avenida del Generalísimo, 30. Madrid-16.

**PRENSOLAND, S.A.**— Calle Industria, s/n. SAN MARTIN DE CENTELLAS (Barcelona).

**PROCEDIMIENTOS BARREDO.**— Raimundo Fernández Villaverde, 45. Madrid-3.

**S.A.E. BBR.**— Polígono Industrial Barcelonés. Calle Carrero Blanco, s/n. ABRERA (Barcelona).

**S.A. ECHEVARRIA.**— Apartado 46. Bilbao-8.

**TECNICAS DEL PRETENSADO, S.A. (TECPRESA).**— Velázquez, 105. Madrid-6.

**TRENZAS Y CABLES DE ACERO, S.A.**— Monturiol, 5. SANTA MARIA DE BARBARA (Barcelona).

**VICENTE PEIRO FAYOS.**— Quintana, 26. Madrid-8.

La Asociación Técnica Española del Pretensado se complace en expresar públicamente su agradecimiento a las empresas citadas, por la valiosa ayuda que le prestan, con su especial aportación económica, para el desenvolvimiento de los fines que tiene encomendados.



## **Son Instituciones Miembros Correspondientes del Instituto Eduardo Torroja de la Construcción y del Cemento**

- La Pontificia Universidad Católica de Chile (Santiago de Chile).
- La Facultad de Arquitectura de la Universidad del Valle de Calí (Colombia).
- El Departamento de Ingeniería de la Universidad Nacional del Sur. Bahía Blanca (República Argentina).
- La Facultad de Ingeniería de la Pontificia Universidad Católica del Perú (Lima).
- La Facultad de Ingeniería de la Universidad Central de Venezuela (Caracas).
- La Facultad de Ingeniería de la Universidad Católica de Córdoba (República Argentina).
- La Facultad de Arquitectura y Urbanismo. Universidad de Chile (Santiago de Chile).
- El Instituto de la Construcción de Edificios de la Facultad de Arquitectura. Montevideo (Uruguay).
- El Instituto Nacional de Tecnología Industrial. Buenos Aires (República Argentina).
- La Facultad de Arquitectura de la Universidad Nacional de Colombia (Medellín).
- La Universidad Autónoma - Guadalajara, Jalisco (México).
- El Departamento Técnico y Laboratorios de Aprovecho, Caracas (Venezuela).
- El Instituto de Ingeniería Civil de la Facultad de Ingeniería y Agrimensura de la Universidad de la República del Uruguay (Montevideo).
- El Centro Impulsor de la Habitación, A.C., de México.
- El Departamento de Investigación de la Dirección General de Tecnología del Ministerio del Bienestar Social de la República Argentina (Buenos Aires).
- El Departamento de Obras Civiles de la Universidad de Chile (Santiago de Chile).
- El Instituto Mexicano del Cemento y del Concreto, A.C. - IMCYC (México).
- La Escuela Politécnica del Ejército. Facultad de Ingeniería Civil. Av. Colombia y General Paz y Miño. Quito (Ecuador).
- La Universidad de Cuenca. Facultad de Arquitectura. Cuenca (Ecuador).
- El Instituto de Pesquisas Tecnológicas de Sao Paulo (Brasil).

# *hormigón y acero*

*n.º 134*

1<sup>er</sup> trimestre, 1980

## CUOTAS ANUALES

| CATEGORIAS                                                                                                              | ESPAÑA         | EXTRANJERO   |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------|--------------|
| Miembros "Personales adheridos" (personas naturales que sean Socios Adheridos al I.E.T.)* .....                         | 1.000,— ptas.  | 20,—dólares  |
| Miembros "Personales" (personas naturales que no sean Socios Adheridos del I.E.T.) .....                                | 2.000,— ptas.  | 40,—dólares  |
| Miembros "Colectivos" (personas jurídicas, sean o no Socios Adheridos del I.E.T.) .....                                 | 5.000,— ptas.  | 100,—dólares |
| Miembros "Protectores" (personas naturales o jurídicas que deseen prestar una ayuda económica especial a la A.T.E.P.) . | 10.000,— ptas. | 200,—dólares |

Ni la Asociación ni el Instituto, una de cuyas finalidades es divulgar los trabajos de investigación sobre la construcción y sus materiales, se hacen responsables del contenido de ningún artículo y el hecho de que patrocinen su difusión no implica, en modo alguno, conformidad con la tesis expuesta.

De acuerdo con las disposiciones vigentes, deberá mencionarse el nombre de esta Revista en toda reproducción de los trabajos insertos en la misma.

\* Conviene aclarar que el ser suscriptor de la Revista "Informes de la Construcción" no quiere decir que se es también Socio Adherido del Instituto Eduardo Torroja.

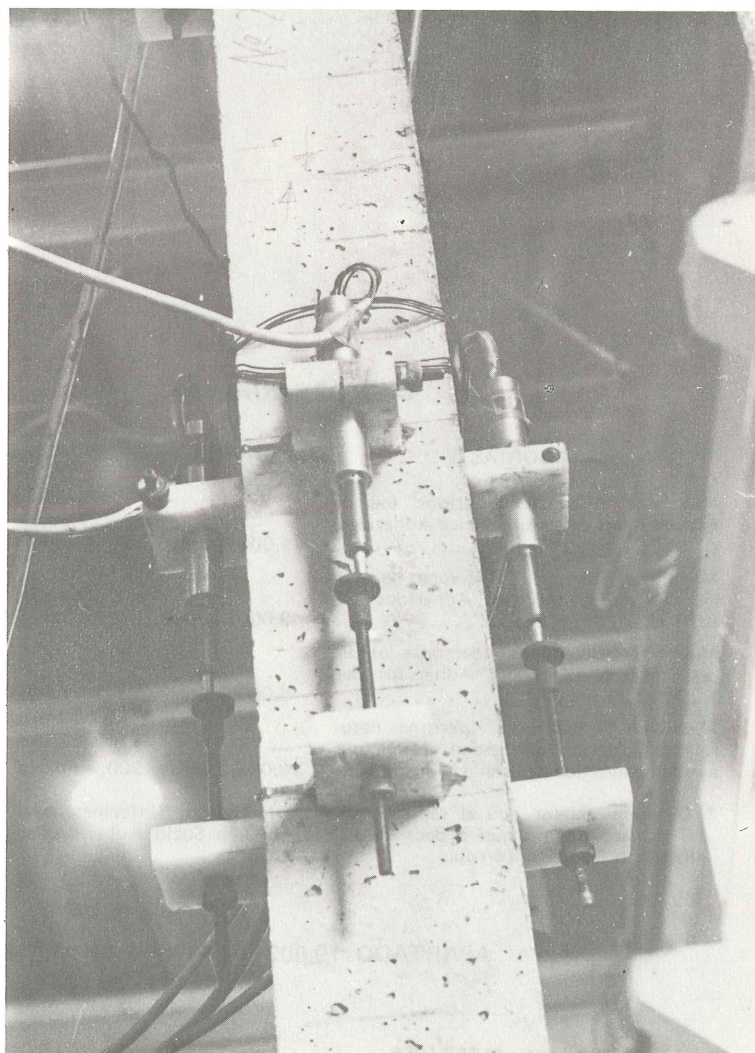
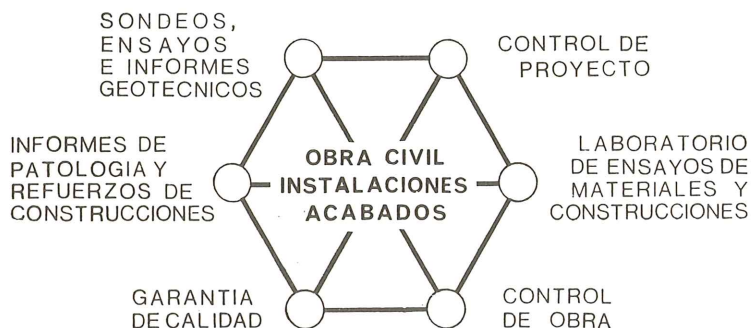
APARTADO 19.002 - COSTILLARES - CHAMARTIN - MADRID - 33



# INTEMAC



## INSTITUTO TECNICO DE MATERIALES Y CONSTRUCCIONES



Detalle de montaje de  
captadores inductivos de desplazamientos  
para un ensayo a compresión de  
pilar de hormigón armado.

### MADRID

#### Oficinas:

Monte Esquinza, 30 - 4.ª D  
Tels. (91) 410 51 58/62/66

#### Laboratorio

Carretera de Loeches, 7  
TORREJON DE ARDOZ  
Tels. 675 31 00/04/08

### BARCELONA

Pasaje Busquets, 37

CORNELLA DE LLOBREGAT

Tels. (93) 377 43 58/62

### SANTANDER

Félix Apellániz, 11

TORRELAVEGA

Tel. (942) 89 02 01

**Comité de Redacción  
de la Revista  
Hormigón y Acero**

ARENAS, Juan José  
AROCA, Ricardo  
BARREDO, Carlos  
CUVILLO, Ramón del  
CHUECA, Rafael  
ELICES, Manuel  
FERNANDEZ TROYANO, Leonardo  
FERNANDEZ VILLALTA, Manuel  
FISAC, Miguel  
JODAR, Juan  
JULIA, Manuel  
LLOMBART, José Antonio  
MANTEROLA, Francisco Javier  
MONEO, Mariano  
MORENO TORRES, Juan  
PIÑEIRO, Rafael  
ROMERO, Rafael  
SANCHEZ CASTRO, Carlos  
SANCHEZ GALVEZ, Vicente

# **hormigón y acero**

**n.º 134**

## **índice**

|                                                                                                                                      | <u>Pág.</u> |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------|
| <b>Informe resumido de las actividades desarrolladas por la Asociación Técnica Española del Pretensado durante el año 1979 .....</b> | <b>9</b>    |
| Compte rendu de l'activité de l'Association Technique Espagnole de la Précontrainte au cours de 1979.                                |             |
| Short report on the activity of the Spanish Technical Association of prestressing during 1979.                                       |             |
| <i>R. Piñeiro.</i>                                                                                                                   |             |
| <b>457-0-69 El sistema de ecuaciones en un nuevo método de elementos finitos .....</b>                                               | <b>23</b>   |
| Le système d'équations pour une nouvelle méthode d'éléments finis.                                                                   |             |
| System of equations for a new calculation method of finite elements.                                                                 |             |
| <i>J. M.<sup>a</sup> Urcelay.</i>                                                                                                    |             |
| <b>457-0-70 Pandeo por flexión de estructuras apor-<br/>ticadas planas .....</b>                                                     | <b>29</b>   |
| Le flambement par flexion des structures planes portiquées.                                                                          |             |
| Buckling of unbraced frames.                                                                                                         |             |
| <i>J. R. Atienza.</i>                                                                                                                |             |

|           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |     |
|-----------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 457-0-71  | <b>Comprobación y dimensionamiento de secciones de hormigón armado y pretensado de forma poligonal utilizando una calculadora programable HP 41 C .....</b>                                                                                                                                        | 47  |
|           | Vérification et dimensionnement des pièces polygonales en béton armé et précontraint à l'aide d'une calculatrice programmable HP 41 C.<br>Verification and design of reinforced and prestressed concrete sections by means of a programmable calculator HP 41 C.<br><i>H. Corres y A. Recuero.</i> |     |
| 457-8-75  | <b>Consideraciones sobre el número de probetas de hormigón que debe tomarse en cada amasada .....</b>                                                                                                                                                                                              | 65  |
|           | Quelques considérations sur le nombre d'éprouvettes en béton à prendre pour chaque malaxage.<br>Considerations on the number of concrete test pieces to be taken for each mixing.<br><i>J. Calavera.</i>                                                                                           |     |
| 591-2-155 | <b>Comportamiento aeroelástico de los tableros de puente .....</b>                                                                                                                                                                                                                                 | 69  |
|           | Comportement aéroélastique des tabliers de ponts.<br>Aeroelastic behaviour of bridge decks.<br><i>M. Juliá.</i>                                                                                                                                                                                    |     |
| 591-2-156 | <b>Comportamiento de los anclajes de los cables de continuidad de los puentes contruidos por voladizos sucesivos .....</b>                                                                                                                                                                         | 115 |
|           | Comportement des ancrages destinés aux câbles chapeau des ponts construits par encorbellemens successifs.<br>Behaviour of the anchorages of the continuity cables for the bridges constructed by successive corbels.<br><i>F. Millanes.</i>                                                        |     |
|           | <b>Notas de la F.I.P., N° 61. 1976 .....</b>                                                                                                                                                                                                                                                       | 137 |
|           | Notes de la F.I.P., N° 61, 1976.<br>F.I.P. Notes., N° 69, 1976.                                                                                                                                                                                                                                    |     |



**RELACION DE EMPRESAS QUE EN LA FECHA DE CIERRE DEL PRESENTE NUMERO,  
FIGURAN INSCRITAS EN LA ASOCIACION TECNICA ESPAÑOLA DEL PRETENSADO,  
COMO "MIEMBROS COLECTIVOS"**

**ESPAÑA**

AEDIUM, S.A.— Basauri (Vizcaya).  
AGROMAN, S.A.— Madrid.  
AGRUPACION NACIONAL DE LOS DERIVADOS DEL CEMENTO.—Madrid.  
ALBISA, S.A.—Algeciras (Cádiz).  
ARIDOS LIGEROS, S.A.—Madrid.  
AUTOPISTAS DEL ATLANTICO-CESA.—La Coruña.  
AUTOPISTAS, CONCESIONARIA ESPAÑOLA, S.A.—Barcelona.  
AZMA, S.A.—Madrid.  
BIGUETES, S.L. Elche.—Alicante.  
BUTSEMS, S.A.—Madrid.  
CAMARA OFICIAL DE COMERCIO, INDUSTRIA Y NAVEGACION.—Barcelona.  
CASA GARGALLO, S.A.—Madrid.  
CASTRO HERMANOS, S.L.— Mislata (Valencia).  
CASTRO MATELO, V., S.A.— Sigüeiro (La Coruña).  
CEMENTOS MOLINS, S.A.— Sant Vicenc dels Horts (Barcelona).  
CENTRO DE ESTUDIOS CEAC.—Barcelona.  
CIDESA, CONSTRUCCION INDUSTRIAL DE EDIFICIOS, S.A.—Barcelona.  
CIMENTACIONES ESPECIALES, S.A.—Madrid.  
COLEGIO DE INGENIEROS TECNICOS DE OBRAS PUBLICAS.—Madrid.  
COLEGIO OFICIAL DE APAREJADORES.—La Coruña.  
COLEGIO OFICIAL DE ARQUITECTOS DE CANARIAS. DEPARTAMENTO LABO-  
RATORIOS.—Sta. Cruz de Tenerife.  
COLEGIO OFICIAL DE ARQUITECTOS VASCO-NAVARRO.—Bilbao.  
COLEGIO OFICIAL DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS.—  
Málaga.  
CONSTRUCCIONES BIGAR, S.L.— Aranda de Duero (Burgos).  
CONSTRUCCIONES Y CONTRATAS, S.A.—Madrid.  
CONSTRUCTORA MAXACH, S.A.—Madrid.  
CONTROLEX.—Alicante.  
COTESA, COLOCACIONES TECNICAS, S.A.—Barcelona.  
CUBIERTAS M.Z.O.V., S.A.—Barcelona.  
CUBIERTAS M.Z.O.V., S.A.—Madrid.  
CUMBRE MODULAR, S.A.—Barcelona.  
DIRECCION GENERAL DE EMPLEO Y PROMOCION SOCIAL — BIBLIOTECA  
(SEAF-PPO).—Madrid.  
DIRECCION GENERAL FORTIFICACIONES Y OBRAS. MINISTERIO DEL EJER-  
CITO.—Madrid.  
DITECO, S.L.—Valencia.  
ELABORADOS DE HORMIGON, S.A.—Burgos.  
ELEMENTOS ESTRUCTURALES PREFABRICADOS (EEPSA).—Manresa (Barcelona).  
EMPRESA AUXILIAR DE LA INDUSTRIA (AUXINI).—Madrid.

ENAGA, S.A.— Madrid.  
 ESTEBAN ORBEGOZO, S.A.—Zumárraga (Guipúzcoa).  
 ESTUDIO PREST.—Barcelona.  
 ESTUDIOS Y PROYECTOS TECNICOS INDUSTRIALES, S.A.—Madrid.  
 E.T.S. DE ARQUITECTURA.—Barcelona.  
 E.T.S. DE ARQUITECTURA.—Sevilla.  
 EUROESTUDIOS, S.A.— Madrid.  
 FEDERACION NACIONAL DE ENTIDADES EMPRESARIALES DE DERIVADOS DEL  
 CEMENTO (ANDECE).— Madrid.  
 FERNANDEZ CONSTRUCTOR, S.A.— Madrid.  
 FORJADOS DOL.— Esquivias (Toledo).  
 FORMO, S.A.— Barcelona.  
 FORJAS Y ALAMBRES DEL CADAGUA.— Erandio (Bilbao)  
 GIJON E HIJOS, S.A.— Motril (Granada).  
 GOMHERSA.—Talavera de la Reina (Toledo).  
 HERRING LEVANTE, S.A.—Valencia.  
 HIDAQUE, S.A.—Granada.  
 HORMIGONES GERONA, S.A.—Gerona.  
 HORMYCER, S.L.—Madrid.  
 HORSA, S.A.—Viladecans (Barcelona).  
 HUARTE Y CIA, S.A.—Madrid.  
 IBERDUERO, S.A.—Bilbao.  
 IBERDUERO, S.A. (CENTRO DE DOCUMENTACION).— Bilbao.  
 IBERTECNICA, S.A.— Madrid.  
 IDASA, INGENIERIA DEL ATLANTICO, S.A.— La Coruña.  
 INBADELCA, S.A.—Baracaldo (Vizcaya).  
 INDUSTRIAS DEL CEMENTO. VIGUETAS CASTILLA, S.A.—Sestao (Vizcaya).  
 INDUSTRIAS VEYGA, S.A.— Tarrasa (Barcelona).  
 INFORMES Y PROYECTOS, S.A. (INYSA).—Madrid.  
 INGENIERIA Y CONSTRUCCIONES SALA AMAT, S.A.—Barcelona.  
 INSTITUTO NACIONAL DE REFORMA Y DESARROLLO AGRARIO.—Madrid.  
 JEFATURA PROVINCIAL DE CARRETERAS.—Valencia.  
 3ª JEFATURA REGIONAL DE CARRETERAS. SERVICIO DE CONSTRUCCION.—  
 Bilbao.  
 5ª JEFATURA REGIONAL DE CARRETERAS.—Barcelona.  
 JOSE MARIA ELOSEGUI CONSTRUCCIONES.—San Sebastián.  
 JULIAN ARUMI, S.L.—Vich (Barcelona).  
 JUNTA DEL PUERTO DE ALMERIA.—Almería.  
 LA AUXILIAR DE LA CONSTRUCCION.—Sta. Cruz de Tenerife.  
 LABORATORIO DE INGENIEROS DEL EJERCITO.—Madrid.  
 LABORATORIO GEOCISA. BIBLIOTECA.—COSLADA (Madrid)  
 LABORATORIO DEL TRANSPORTE Y MECANICA DEL SUELO.—Madrid.  
 LAING IBERICA, S. A.—Madrid.  
 LIBRERIA RUBIÑOS.—Madrid.  
 LUIS BATALLA, S.A. (LUBASA).—Castellón de la Plana.  
 MAHEMA, S. A.—Granollers (Barcelona).  
 MATERIALES PRETENSADOS, S.A. (MATENSA).—Madrid.  
 MATERIALES Y TUBOS BONNA, S.A.—Madrid.  
 MATUBO, S.A.—Madrid.  
 MECANOGUMBA, S.A.— Mollet del Vallés (Barcelona).  
 NUEVA CERAMICA CAMPO.— Lendo-Laracha (La Coruña).  
 OTEP INTERNACIONAL, S.A.— Madrid.

POSTELECTRICA, S.A.—Palencia.  
 POSTENSA, S.A.—Bilbao.  
 PRAINSA.—Zaragoza.  
 PREBETONG CANARIA, S.A.—Sta. Cruz de Tenerife.  
 PREFABRICADOS ALAVESES, S.A. (PREASA).Vitoria.  
 PREFABRICADOS DEL CEMENTO, S.A. (PRECESA).— León.  
 PREFABRICADOS DEL HORMIGON, S.A. CUPRE-SAPRE.— Valladolid.  
 PREFABRICADOS NAVARROS, S.A.— Olazagutia (Navarra).  
 PREFABRICADOS NOR-THOM, S.A.— Valladolid.  
 PREFABRICADOS POUSA, S.A.— Santa Perpetua de Moguda (Barcelona).  
 PRETENSADOS AEDIUM, S.L.— Mutilva Baja (Navarra).  
 PRODUCTOS DERIVADOS DEL CEMENTO, S.A. HORTE.— Valladolid.  
 PROFESA.— Barcelona.  
 PROTEC, S.L.— Gijón (Oviedo).  
 REALIZACIONES Y ESTUDIOS DE INGENIERIA, S.A.— Pinto (Madrid).  
 RENFE.— Madrid.  
 RUBIERA. CENTRO TECNICO DE CALCULO, S.A. - CETERSA.— Gijón (Oviedo).  
 RUBIERA MAHER, S.A.— Las Palmas de Gran Canaria.  
 RUBIERA PREFLEX, S.A.— Gijón (Oviedo).  
 RUBIERA R.L.M. "SOTECSA".— Gijón (Oviedo).  
 SAINCE.— Madrid.  
 SENER, S.A.— Las Arenas (Vizcaya).  
 SERVICIO DE ESTUDIOS TECNOLOGICOS-MOPU.— Madrid.  
 SERVICIO MILITAR DE CONSTRUCCIONES.— Barcelona.  
 SIKA, S.A.— Madrid.  
 SOCIEDAD ANONIMA ESPAÑOLA TUBO FABREGA.—Madrid .  
 SOCIEDAD ANONIMA FERROVIAL.— Madrid.  
 SOCIEDAD ANONIMA MATERIALES Y OBRAS.— Valencia.  
 SOCIEDAD FRANCO ESPAÑOLA DE ALAMBRES, CABLES Y TRANSPORTES  
 AEREOS, S.A.— Erandio (Bilbao).  
 SPANDECK CATALANA, S.A.— Barcelona.  
 SUBDIRECCION GENERAL DE TECNOLOGIA.— Sección de Documentación Normati-  
 va.— Ministerio de Obras Públicas y Urbanismo.— Madrid.  
 TEJERIAS "LA COVADONGA".— Muriedas de Camargo (Santander).  
 TEPSA.— Tarrasa (Barcelona).  
 TOSAM, S.L.— Segovia.  
 TUBERIAS Y PREFABRICADOS, S.A. (TYPASA).— Madrid.  
 TUBOS BORONDO.— Madrid.  
 UNION MADERERA CACEREÑA, S.L.— Cáceres.  
 VALLEHERMOSO, S.A.— Madrid.  
 VALLEHERMOSO, S.A.— San Juan de Aznalfarache (Sevilla).  
 VIAS Y OBRAS PROVINCIALES.— San Sebastián.  
 VIGAS REMARRO.— Motril (Granada).  
 VIGUETAS ASTURIAS, S.L.— Oviedo.  
 VIGUETAS ROSADO, S.A.— Cáceres.



## EXTRANJERO

BIBLIOTECA DE LA FACULTAD DE INGENIERIA.—Universidad de Buenos Aires.  
Buenos Aires, Argentina.  
BIBLIOTECA-UNIVERSIDAD CATOLICA.—Quito (Ecuador).  
CENTRO NACIONAL DE DOCUMENTACION CIENTIFICA Y TECNOLOGICA.— La  
Paz (Bolivia).  
CONSULBAIRES.— Buenos Aires (Argentina).  
ESCUELA DE CONSTRUCCION CIVIL.— Valparaiso (Chile).  
FACULTAD DE INGENIERIA. BIBLIOTECA.— Caracas (Venezuela).  
INSTITUTO DE MATERIALES Y SUELOS.— Facultad de Ingeniería y Arquitectura. Uni-  
versidad Nacional de San Juan. (Rep. Argentina).  
LABORATORIO DE ENGENHARIA DE ANGOLA.— Luanda (Rep. P. de Angola).  
R.S.W. "PRASA- KSIAZKA- RUCH".— 00-958. Warszawa (Polonia).  
SCIENCE REFERENCE LIBRARY.— Londres (Inglaterra).  
UNIVERSIDAD DE LOS ANDES. FACULTAD DE INGENIERIA.— Mérida (Venezuela).  
UNIVERSIDAD CATOLICA MADRE Y MAESTRA.— Santiago de los Caballeros. (Repúbli-  
ca Dominicana).  
UNIVERSIDAD DE CHILE. (Departamento de Tecnologías).— Valparaiso (Chile).  
VIPRET, S.A.I.C.— Buenos Aires (República Argentina).

## AVISO IMPORTANTE

### DISCUSION DE LOS ARTICULOS ORIGINALES PUBLICADOS EN LA REVISTA "HORMIGON Y ACERO"

Todos los artículos originales que se publican en "Hormigón y Acero", quedan sometidos a discusión y al comentario de nuestros lectores. La discusión debe limitarse al campo de aplicación del artículo, y ser breve (cuatro páginas mecanografiadas a doble espacio, como máximo, incluyendo figuras y tablas).

Debe tratarse de una verdadera discusión del trabajo publicado y no ser una ampliación o un nuevo artículo sobre el mismo tema; el cual será siempre aceptado para su publicación en nuestra Revista, pero con tal carácter.

Debe ofrecer un interés general para los lectores. De no ser así, se trasladará al autor del artículo al que se refiera, para que la conteste particularmente.

Los comentarios deben enviarse, por duplicado, a la Secretaría de la A.T.E.P., Apartado 19.002, Madrid-33, dentro del plazo de tres meses contados a partir de la fecha de distribución de la Revista.

El autor del artículo cerrará la discusión contestando todos y cada uno de los comentarios recibidos.

Los textos, tanto de las discusiones y comentarios como de las contestaciones de los autores de los correspondientes artículos, se publicarán conjuntamente en una Sección especial que aparecerá en las últimas páginas de la Revista.

# Informe resumido de las actividades desarrolladas por la Asociación Técnica Española del Pretensado durante el año 1979

Por: R. Piñeiro  
Vocal Secretario de la ATEP

Termina un nuevo año, y con él ya son treinta los que han transcurrido desde que en 1949 inició su andadura nuestra Asociación, por iniciativa del inolvidable Maestro D. Eduardo Torroja y dentro del Instituto que entonces él dirigía y que hoy se honra en llevar su nombre. Los que paso a paso hemos vivido la evolución de la A.T.E.P. durante todos estos años, no podemos dejar de asombrarnos del desarrollo logrado. Lo que empezó siendo un reducido grupo de técnicos (que, ilusionados con las posibilidades que se auguraban a la que, en aquella época, se consideraba nueva y revolucionaria modalidad constructiva, decidieron unirse para, trabajando en estrecha colaboración, estudiar las peculiaridades de esta técnica del pretensado y procurar su más amplia y rápida difusión), se ha transformado, con el transcurso del tiempo, en lo que hoy es la A.T.E.P.; una Asociación llena de vitalidad, con más de mil Miembros distribuidos, no sólo por toda España sino también por varios países extranjeros, especialmente de la América de habla hispana.

Naturalmente, todo ello se debe sólo al entusiasmo con que, cuantos integran la A.T.E.P. (cada uno dentro de sus posibilidades y de su específico campo de actuación), han venido prestando su valiosa colaboración para llevar a buen término las diferentes y cada día más interesantes y numerosas actividades que la Asociación viene desarrollando de conformidad con lo dispuesto en sus Estatutos. Por eso para todos ha supuesto una gran satisfacción el que, por acuerdo del Consejo de Ministros, se haya reconocido a la A.T.E.P. como Asociación "de utilidad pública"; lo que constituye, evidentemente, el más claro indicio de la eficacia de la labor que viene realizando en pro del avance de la técnica del pretensado y, en definitiva, del desarrollo científico de nuestro país.

Nuestra revista, ha sido siempre el normal vínculo de relación entre todos los Asociados y, por este motivo, en el primer número de cada año, se incluye un breve resumen de las principales actividades desarrolladas durante el año anterior, para general conocimiento e información. A muchos lo que en estos resúmenes se dice les es ya conocido; pero a otros y en especial a los recientemente inscritos en la Asociación, les sirve para tener una idea de lo que se hace y de cómo se hace; de los problemas que se presentan y de las medidas que se adoptan para solucionarlos, cuando ello es posible; de los éxitos que se van cosechando y de las aspiraciones que resultan frustradas; en definitiva, de quiénes somos, de cómo somos y de cómo actuamos.



Y es por ésto por lo que esta costumbre establecida, la seguimos manteniendo a lo largo de los años.

Al hacer la valoración de sus inconvenientes y de sus ventajas, se ha estimado que éstas resultaban superiores a aquéllos. Lamentaríamos habernos equivocado.

Y hecha esta justificación, vamos a intentar exponer, del modo más resumido posible, lo que ha sido para la A.T.E.P. el año 1979.

Si tuviéramos que calificarlo con una sola palabra, tendríamos que decir que ha sido un año "difícil". Creemos que en esto no habrá discusión. En todos los campos de la actividad nacional, se ha tropezado con dificultades, evidentemente; pero quizás uno de los sectores más afectados haya sido precisamente el de la construcción. Y ello, como es lógico, ha repercutido en nuestra Asociación. No vamos a hacer un análisis de estas dificultades, ni de sus causas, ni de sus posibles remedios. Ni nos compete, ni es éste el lugar apropiado para ello. Si nos hemos referido a esta situación es porque, como consecuencia de ella, algunas empresas, pioneras en la aplicación de la técnica del pretensado en España, integradas en nuestra Asociación desde que se creó en 1949, y que desde entonces venían prestándonos siempre una muy eficaz colaboración, se han visto forzadas a suspender sus actividades, a causa de dificultades económicas insuperables y, por consiguiente, a darse de baja en la A.T.E.P. Y esto, sinceramente, nos duele; porque siempre es lamentable tener que decir adiós a los buenos y leales amigos, sobre todo cuando la separación no es voluntaria sino que viene impuesta por adversas circunstancias. Pero en fín; seamos optimistas y confiemos en que 1980 habrá de ser más propicio y en que a lo largo de él podrán irse solucionando los problemas que ahora nos agobian.

Por motivos económicos, también, no resultó posible organizar, como en anteriores ocasiones, la participación de una delegación española en las Jornadas Argentinas del Hormigón Pretensado que, coincidiendo con una reunión del Consejo Administrativo de la F.I.P., se celebraron en la ciudad de Rosario, Provincia de Santa Fé, durante los días 1 al 5 de octubre. Dadas las íntimas y amistosas relaciones que en todo momento, desde hace años, se vienen manteniendo con la Asociación Argentina del Pretensado, existía un especial interés en, accediendo a la solicitud formulada por dicha Asociación, procurar que una amplia representación de la A.T.E.P. interviniese activamente en las citadas Jornadas, aportando comunicaciones. Con tal objeto, se procuró dar la mayor difusión entre nuestros Asociados al anuncio de estas reuniones; pero el resultado fue prácticamente nulo y no pudo constituirse la correspondiente delegación española.

No obstante, y a pesar de las poco favorables condiciones imperantes, nuestra Asociación pudo continuar desarrollando sus habituales actividades, con el decidido e inestimable estímulo y apoyo de sus Miembros, como enseguida veremos.

Pero antes de entrar en el detalle de estas actividades, queremos dedicar un comentario especial a algunas de ellas que destacan por su indudable importancia.

En primer lugar, hemos de referirnos a las elecciones celebradas para la renovación de la mitad de los Vocales que constituyen nuestra Junta de Gobierno. De acuerdo con lo dispuesto en los Estatutos, en su Artículo 12º, había que sustituir a los Miembros de la misma Señores D. Ramón del Cuvillo, D. Francisco Esteban, D. Francisco Javier Jiménez Atienza y D. Manuel de la Torre, que habían cumplido ya sus seis años en el cargo, por otros cuatro Miembros de la A.T.E.P. elegidos por votación entre todos los Asociados.

Esta votación se efectuó siguiendo las normas al efecto establecidas. Se fijó como plazo límite para la presentación de candidaturas, la del 17 de marzo; y dentro del mismo se recibieron tres candidaturas distintas, en cada una de las cuales, de conformidad con lo dispuesto, se incluían los nombres de cuatro Miembros de la A.T.E.P. Posteriormente, se estableció un nuevo plazo, hasta el 20 de junio, para el envío de las correspondientes papeletas de vota-



ción, y el día 25 del mismo mes se realizó el escrutinio público de los 1.460 votos recibidos, en total. Como resultado de este escrutinio, quedaron designados, en sustitución de los cesados, los siguientes cuatro Miembros, citados por orden alfabético: D. Ginés Aparicio Soto; D. Juan José Arenas de Pablo; D. Rafael Piñero Abril y D. Juan Bautista Ripoll Gómez.

A los cuatro Vocales salientes, se les concedió el título de Miembros de Honor de la A.T.E.P., en reconocimiento a la eficaz labor desarrollada durante sus seis años de permanencia en la Junta de Gobierno, y como prueba de agradecimiento por los servicios que, con tanto entusiasmo y desinterés, habían venido prestando a la Asociación.

Como resultado de estas elecciones, en reunión celebrada el 17 de setiembre, quedó constituida la nueva Junta de Gobierno de la Asociación en la forma que a continuación se indica:

Presidente: D. Francisco Arredondo Verdú

Vicepresidente: D. José Antonio Torroja Cavanillas

Vocales:

D. Ginés Aparicio Soto

D. Juan José Arenas de Pablo

D. José Calavera Ruiz

D. Francisco Javier Manterola Armisen

D. Alfredo Páez Balaca

D. Jacinto Pellón Díaz

D. Florencio del Pozo Frutos

D. Juan Bautista Ripoll Gómez

Vocal Secretario: D. Rafael Piñero Abril

Oportunamente, se envió una circular a todos los Miembros de la Asociación informándoles del resultado de las elecciones y de cómo ha quedado formada la Nueva Junta de Gobierno.

También merece la pena dedicar un breve comentario a la publicación del Manual H.P. 5-79 de la A.T.E.P. La elaboración de este Manual, a causa sin duda de una equivocada programación de los trabajos necesarios para su redacción, ha exigido mucho más tiempo del previsto y resultado mucho más laboriosa de lo normal. Felizmente, una vez superadas las dificultades con que se ha tropezado, se ha podido concluir su edición y en la actualidad se encuentra ya a la venta.

En este Manual, que lleva por título "Recomendaciones para la disposición y colocación de armaduras", se han recopilado todas aquellas normas que la práctica ha demostrado deben tenerse en cuenta para conseguir una adecuada disposición de las armaduras en los elementos pretensados, tanto si se trata de armaduras pretesas como postesas, incluyéndose así mismo las armaduras pasivas que suelen acompañar a las activas.

Por la íntima relación existente entre tales armaduras y otra serie de dispositivos tales como los anclajes, empalmes, vainas, separadores, etc., se recogen también en este Manual las recomendaciones correspondientes a su colocación.

En todos los casos se tratan por separado las fases de proyecto, ejecución y control.

Con este nuevo Manual de la serie que, desde hace años, viene editando nuestra Asociación, se cubre una nueva etapa del proceso general constructivo de las estructuras pretensadas. Etapa realmente importante si se tiene en cuenta que para que un elemento pretensado pueda cumplir, con las necesarias garantías de seguridad y durabilidad, la función a que va destinado, la magnitud y punto de aplicación de la resultante de las fuerzas de pretensado introducidas, deben coincidir exactamente con lo previsto en el proyecto; por lo que la colocación de las armaduras debe ser cuidadosamente realizada en obra.

A la consecución de este objetivo pueden contribuir, de un modo importante, las recomendaciones contenidas en este Manual; por lo que se espera que habrá de tener la misma favorable acogida que todos los anteriores, no sólo entre nuestros Asociados, sino también entre cuantos profesionales desarrollan sus actividades en el campo de las construcciones pretensadas.

El cuidado con que ha sido realizada esta edición, con la inclusión de varias figuras para aclarar conceptos, y el precio realmente económico que ha sido fijado para esta publicación, estamos seguros que habrán de contribuir también a su aceptación, por lo que el éxito de venta ha de ser grande y se confía en que la edición se verá rápidamente agotada.



*Edificio  
Utande*

Una vez más hemos de dejar constancia de nuestro agradecimiento a cuantos han colaborado en la realización de este Manual, aportando sus conocimientos, experiencias e ideas, con total desinterés y con el único objetivo de contribuir al perfeccionamiento de las realizaciones pretensadas en nuestro país. La eficaz labor, en equipo realizada, resulta digna del mayor elogio y es una prueba más de lo que se puede conseguir cuando los interesados en alcanzar un objetivo están convencidos de que realmente merece la pena lograrlo y dispuestos, por lo tanto, a poner todo su esfuerzo y entusiasmo, sin reticencias, para llegar al final, haciendo caso omiso de los inconvenientes y dificultades que puedan surgir a lo largo del camino. Si todos y siempre actuásemos así, ¡cuánto mejor irían las cosas!. Es una lección que no conviene olvidar.

En otro orden de cosas, debemos comentar también que se ha hecho necesario proceder a una revisión de las cuotas que se venían cobrando a los Miembros de la A.T.E.P. Como todos sabemos, el término “revisión” es un inocente eufemismo, que ya a nadie engaña, utilizado para indicar un alza de precios. Es decir, que en definitiva, lo que se ha hecho es elevar las cuotas. ¿Razones? las de siempre y en este caso, tan evidentes que hasta parece inútil justificarlas. Se venían manteniendo, sin variación, desde 1977; y debido a los importantes incrementos que desde entonces han experimentado todos los costes, se habían quedado totalmente desfasadas, hasta el extremo de que las cuotas de los Miembros Personales, apenas cubrían el 50 por 100 de los gastos de papel e imprenta correspondiente a la edición de la Revista “Hormigón y Acero”. La situación era tan claramente anormal que hasta los mismos Miembros de la A.T.E.P., en diversas ocasiones, verbalmente e incluso por escrito habían sugerido la necesidad de realizar esta revisión. Dicen que “como muestra basta un botón”. Pues bien; he aquí un párrafo, copiado textualmente, de una carta enviada por un Asociado residente en Sevilla: “La cuota es muy pequeña, hay que aumentarla o establecer prestaciones aparte de la cuota, para que tenga más ayuda la Asociación”.

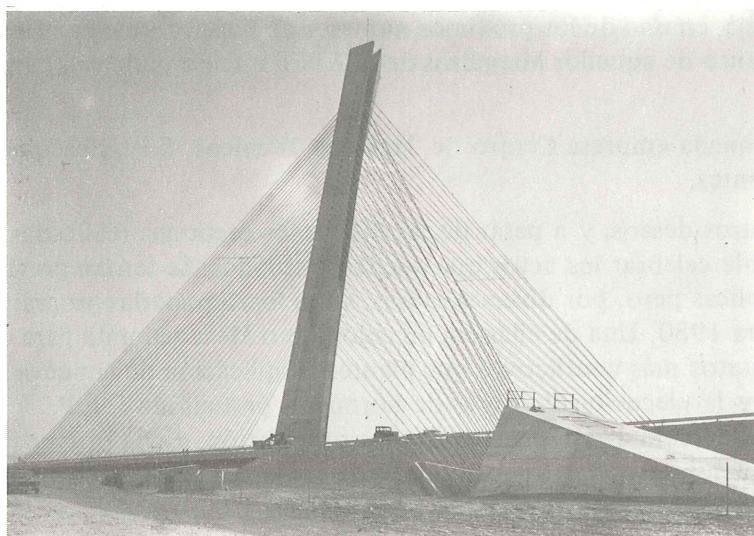


No vamos a insistir más en el tema. En definitiva, para 1980 han quedado establecidas, por acuerdo unánime de la Junta de Gobierno, las siguientes cuotas para las distintas categorías de Miembros:

|                             | España         | Extranjero        |
|-----------------------------|----------------|-------------------|
| Miembro "Personal Adherido" | 1.000,— ptas.  | 20,— dólares USA  |
| Miembro "Personal"          | 2.000,— ptas.  | 40,— dólares USA  |
| Miembro "Colectivo"         | 5.000,— ptas.  | 100,— dólares USA |
| Miembro "Protector"         | 10.000,— ptas. | 200,— dólares USA |

Queremos destacar, antes de pasar a otro tema, que las subidas aprobadas han sido las mínimas imprescindibles para poder hacer frente a las más perentorias necesidades económicas de la Asociación, y que todos lamentamos que haya sido necesario adoptar este impopular acuerdo.

Y después de comentados estos temas de carácter general, seleccionados (entre los abordados durante 1979) por considerar que son los de mayor interés y los que más directamente pueden afectar a todos los Miembros e incluso al futuro desarrollo de nuestra Asociación, vamos a iniciar la ordenada y resumida enumeración de las principales actividades de la A.T.E.P., a lo largo del pasado año, dentro de su programa de trabajos habituales.



*Puente  
atirantado  
sobre el  
río Ebro.*

## 1.— REUNIONES PUBLICAS ORGANIZADAS POR LA ASOCIACION

Durante 1979 sólo se han celebrado dos reuniones públicas, organizadas por la A.T.E.P., y ambas en los locales del Instituto Eduardo Torroja. Fueron las siguientes:

**29 de enero**

El Dr. Ingeniero de Caminos D. Leonardo Fernández Troyano, pronunció una conferencia sobre el tema: "Puente atirantado sobre el río Ebro, en Navarra", en la que expuso diversos aspectos del proyecto y la construcción de esta singular obra que, por sus especiales características, ha merecido unánimes elogios no sólo en España sino también en el extranjero. La intervención del Sr. Fernández Troyano, que fue ilustrada con un gran número de muy buenas diapositivas, resultó altamente interesante y muy del agrado del numeroso público que llenaba al Sala. Al terminar la conferencia, se entabló un animado y prolongado coloquio, y el conferenciante fue calurosamente felicitado.



En este día, la ATEP, en colaboración con la empresa Centro de Trabajos Técnicos, S. L., de Barcelona, organizó una reunión pública en la que intervinieron, sucesivamente, los Señores A. Fuentes, Catedrático de la "Ecole Nationale des Ponts et Chaussées" y J. Mathivat, Profesor del "Centre des Hautes Etudes de la Construction" y Director de Cursos de la "Ecole Nationale des Ponts et Chaussées".

El primero, habló en castellano sobre "Cálculo y colocación en obra de barras precomprimidas: Reducción de la flecha en el caso de forjados". Este procedimiento de las barras precomprimidas, que en Francia se utiliza ya con bastante frecuencia, resulta interesante por su originalidad, y parece ofrecer apreciables ventajas, especialmente en el campo de los forjados de grandes luces. El Sr. Fuentes analizó diversos ejemplos de obras construídas por este método y contestó amablemente, a las numerosas consultas que se le hicieron al final de su intervención.

Por su parte, el Sr. Mathivat se ocupó del tema: "Puentes atirantados para grandes luces". En su conferencia, que pronunció en francés, hizo una crítica de los diversos tipos de puentes atirantados, destacando las ventajas e inconvenientes de cada uno de ellos desde el punto de vista de su aplicación en el caso de grandes luces. Comentó también varios ejemplos de puentes construídos o proyectados de acuerdo con este método. Su intervención, que fue ilustrada con diapositivas, fue muy aplaudida. Por su interés, se tiene previsto reproducir el texto de la misma, en uno de los próximos números de nuestra Revista "Hormigón y Acero", para conocimiento de aquellos Miembros de la ATEP que no pudieron participar en esta reunión.

Al final, la mencionada empresa Centro de Trabajos Técnicos, S.L., obsequió con un coctail a todos los asistentes.

En contra de nuestros deseos, y a pesar de las diferentes gestiones realizadas, durante 1979 sólo ha sido posible celebrar los actos que quedan reseñados. Se tenían previstas algunas otras reuniones públicas pero, por diversas causas, no se logró poderlas programar y han quedado pendientes para 1980. Una de ellas era un coloquio o Mesa redonda para discutir y aclarar los diferentes puntos más conflictivos que plantea la aplicación de la nueva "Instrucción para el proyecto y la ejecución de obras de hormigón pretensado", E.P.-77. Puesto que, de acuerdo con el Artículo 1 del Decreto de su promulgación, dicha Instrucción debía entrar en vigor, con carácter de obligatoriedad, el 22 de junio de 1979, se estimaba que tal discusión podría resultar francamente interesante y provechosa.

No obstante, en los ambientes técnicos del país empezaron a surgir dudas sobre la obligatoriedad de la E.P.-77, dada la ambigüedad con que está redactado el Decreto de su promulgación y la aparente contradicción que se presenta entre lo que se dice en su Artículo 1 y en los Artículos 3 y 4. En vista de ello, se consideró oportuno esperar a que la Comisión Permanente del Hormigón se definiese sobre el tema, antes de celebrar el coloquio. Por eso se ha ido aplazando este acto.

En estos momentos parece que la Comisión Permanente ha adoptado ya una postura definitiva, y que próximamente se publicará en el B.O.E. un nuevo Decreto, confirmando la entrada en vigor con carácter obligatorio de la E.P.-77 e incluyendo algunas modificaciones que deben introducirse en el texto originalmente aprobado. Por consiguiente, una vez que se conozca el contenido de este nuevo Decreto, se podrá ya programar el coloquio que se tenía previsto, y que nos gustaría poder celebrar no sólo en Madrid, sino también en algunas otras Capitales, dando así satisfacción a las peticiones que nos han sido reiteradamente formuladas y cumpliendo, al mismo tiempo, uno de los propósitos de la Asociación, expuesto ya en diversas ocasiones: repetir fuera de Madrid alguno de los Actos que aquí se organizan. Ojalá las circunstancias nos permitan ver cumplidos nuestros deseos.

## 2.— PUBLICACIONES

A continuación, y de acuerdo con la costumbre establecida, se incluyen para general conocimiento los índices de los números de "Hormigón y Acero" publicados y distribuidos durante el año 1979.

Número extraordinario 130—131—132, dedicado a la IX Asamblea Técnica Nacional de la A.T.E.P. Corresponde a los trimestres primero, segundo y tercero de 1979

- "Informe resumido de las actividades desarrolladas por la Asociación Técnica Española del Pretensado durante el año 1978", por R. Piñeiro.
- "Informe general sobre la IX Asamblea Técnica Nacional de la A.T.E.P.", por R. Piñeiro.
- "Discurso pronunciado en la Sesión de Apertura de la IX Asamblea Técnica Nacional de la A.T.E.P.", por J.A. Torroja.
- "Determinación de las tensiones en las cabezas de anclaje", por J. Domínguez y E. Alarcón.
- "Ensayos comparativos de adherencia por los métodos beam-test y pull-out sobre barras corrugadas de grandes diámetros", por J. Calavera, A. Delibes, G. González Isabel y J.M. Izquierdo.
- "Variabilidad y predicción de los resultados de ensayos de relajación", por J.M. Gállego y C. de la Peña.
- "Influencia de la oxidación y de las manchas de mortero sobre la adherencia de armaduras de hormigón", por J. Calavera, A. Delibes, J.M. Izquierdo y J.M. Fernández París.
- "Comportamiento a temperatura del gas natural licuado, de un sistema tendón-anclaje, postesado a 165 t.", por M. Elices y V. Sánchez Gálvez.
- "Elementos precomprimidos utilizados para pretensar estructuras", por R. Martí Ayxela.
- "Influencia de la modalidad del ataque en la corrosión fisurante bajo tensión, en aceros para pretensado o postensado", por J. Climent.
- "Realización del ensayo en modelo reducido del puente para ferrocarril del acceso a Vigo de la Autopista del Atlántico", por A. Delibes.
- "Nuevo sistema de anclaje para armaduras postesas", por Ricardo Barredo.
- "Expresiones analíticas para fenómenos diferidos del hormigón", por F. del Pozo Vindel.
- "Últimas investigaciones sobre tubos pretensados de gran diámetro: Aceros, permeabilidad, protección, pruebas y métodos de cálculo", por J.I. Rodríguez Mira.
- "Consideraciones sobre tensiones de corte en la superficie de contacto de piezas compuestas", por J. Calavera y E. González Valle.
- "Contribución a la interpretación de la susceptibilidad al hidrógeno de los aceros de pretensado o postensado, con el ensayo de tiocianato amónico", por J. Climent.
- "Influencia de los estados previos de carga del hormigón sobre su microfisuración y resistencia", por J. Calavera, A. Delibes, J.M. Fernández París y J.M. Izquierdo.



- “Estudio analítico de la influencia de las deformaciones diferidas en estructuras lineales isostáticas de hormigón”, por J. Murcia.
- “El coeficiente de seguridad y el momento de rotura nominales como bases de juicio para el control de piezas mediante ensayos de rotura por flexión”, por J. Calavera.
- “Estado de la normativa nacional e internacional de aceros para hormigón armado y pretensado”, por E. Ema.



Sr.  
Mathivat.

- “Nuevo Manual de la A.T.E.P. sobre colocación de armaduras”, por R. del Cuvillo.
- “Colección de puentes de hormigón pretensado”, por R. del Cuvillo.
- “Cálculo en estado límite de inestabilidad, de soportes de hormigón armado”, por J. J. Arenas.
- “Comentarios a una normativa sobre elementos prefabricados de hormigón pretensado para la edificación”, por J.M. Simón Serra.
- “Contribución española al ensayo FIP de corrosión bajo tensión”, por M. del Campo, J. Climent, M. Elices y V. Sánchez Gálvez.
- “Aportes a la normativa de pretensado en centrales nucleares”, por A. Vives.
- “El viaducto de Serín”, por C. Álvarez Penalva.
- “Dos pasos elevados sobre la autopista de La Paz, en Madrid”, por J.J. Arenas y A.C. Aparicio.
- “Puente del eje Cuzco-Barajas, enlace de Santamarca, en la Autopista de La Paz, en Madrid”, por J.J. Arenas y A.C. Aparicio.
- “Los puentes curvos del enlace de Santamarca, de la Autopista de La Paz, en Madrid”, por J.J. Arenas y A.C. Aparicio.
- “Algunos casos de refuerzo de estructuras por pretensado o por pre-deformación”, por C. Barredo.
- “El viaducto de Catoira sobre el río Ulla”, por R. Chueca y J.M. Villar.
- “Pasarela colgada, en La Avenida de La Paz (Madrid)”, por C. Fernández Casado.

- “Puente sobre el río Júcar”, por C. Fernández Casado.
- “Acueducto de Alcanadre”, por C. Fernández Casado.
- “Puente atirantado sobre el río Ebro, en Navarra”, por C. Fernández Casado, L. Fernández Troyano y J. Manterola.
- “Edificio, en La Castellana, para el Banco de Madrid”, por A. Gallego.
- “Montaje de apoyos en obras de hormigón pre y postensado”, por J. Grote y E. Vivó.
- “Puente de Rande”, por F. del Pozo Frutos.
- “Dos puentes con condicionantes estéticos”, por F. del Pozo Vindel.
- “Puentes por voladizos sucesivos”, por F. del Pozo Vindel.
- “Tipología estructural de los puentes de la Autopista del Atlántico”, por Rafael Barredo.



*Sr.  
Fuentes*

- “Programa de cálculo de estructuras, desarrollado para el proyecto de algunos puentes de la Autopista del Atlántico”, por F. Da Cunha.
- “Puente de San Vicente de Trasmánó. Aplicación al diseño de los programas de cálculo desarrollados por IDASA”, por R. Márquez.
- “La Construcción de la cúpula de contención de la central nuclear de Ascó”, por A. Vives.
- “Proyecto y construcción de un puente sobre el río Paraguay”, por A. Fernández.
- “Obras especiales del acceso a Vigo. Autopista del Atlántico”, por M. Taboada.
- “Solución losa-celosía, en puentes para ferrocarril con gran esviaje”, por F.J. Rui-Wamba.
- “El enlace de Buenos Aires, en la Autopista del Atlántico”, por F.J. Rui-Wamba.



- “Edificio de exposición para UTANDE, SUMINISTROS TECNICOS”, por D. Tabuyo.
- “Dos pasarelas sobre la Avenida de La Paz”, por J.A. Torroja.
- “Los puentes del enlace Marqués de Torroja a la Avenida de La Paz y el paso superior de Vilaseca”, J.M. Villar, R. Chueca y J.A. Torroja.
- “Pasos superiores en la Autopista Bilbao-Zaragoza”, por C. Siegrist.
- “Depósito elevado de agua, de 3.600 m<sup>3</sup>, en Getafe”, por A. Murciano y J.A. Olabarría.
- “Construcción de naves y edificios industriales”, por G. Lozano.
- “Discurso de Clausura de la IX Asamblea Técnica Nacional de la A.T.E.P.”, por F. Arredondo.



*Sr.  
Fernández  
Troyano*

#### Número 133. Cuarto trimestre de 1979

- “Comprobación de una sección rectangular de hormigón armado con ayuda de una calculadora programable HP-67”, por A. Recuero y J. P. Gutierrez.
- “Una expresión simplificada de la matriz de rigidez de la barra prismática de directriz circular”, por A. Samartín y J.R. González Cangas.
- “Bases para un nuevo método de elementos finitos”, por J. M. Urcelay.
- “Tolerancias en estructuras de hormigón”, por Comisión de la F.I.P. sobre “Práctica constructiva”.
- “Ensayo a flexión de vigas de hormigón de áridos ligeros”, por J. Alonso.
- “Comentario al Título 2º, “De la realización del proyecto”, de la Instrucción E.P.-77”, por J.A. Torroja.
- “Comportamiento sísmico de estructuras aporticadas prefabricadas pretensadas: Estudio experimental de uniones exteriores viga-columna”, por H. Corres, J.A. Alvarez Baleriola y R. Fernández.

- “Los puentes pretensados en el último Congreso de la F.I.P. (Londres 1978). Continuación”, por C. Fernández Casado.
- “Extrapolación de las pérdidas de pretensado por relajación en aceros envejecidos”, por V. Sánchez Gálvez.

Se ha publicado además, como ya hemos comentado, el Manual H.P.5-79 de la A.T. E.P., “Recomendaciones para la disposición y colocación de armaduras”.

Y antes de pasar al punto siguiente, queremos hacer algunas consideraciones en relación con nuestra Revista “Hormigón y Acero”. En primer lugar debemos hacer público, para satisfacción de todos los interesados, el éxito obtenido con la publicación del número extraordinario en el que se recogían los textos de todas las comunicaciones presentadas en la última Asamblea Técnica Nacional celebrada por nuestra Asociación, en La Coruña, durante los días 2 al 6 de octubre de 1978. Muchas han sido las felicitaciones que, con motivo de esta publicación, hemos recibido, tanto de diversos puntos de España como del extranjero. Y, como es lógico, a vosotros os las trasladamos ya que es a vosotros a quienes en justicia os corresponden. Realmente ha resultado un volumen excepcional y no es de extrañar que haya sido tan favorablemente acogido.

Todos sabéis, porque oportunamente os lo hemos comunicado, la serie de problemas que hemos tenido para su distribución. Pero, felizmente, al final han podido ser superados; e incluso con la publicación del número siguiente, el 133, correspondiente al último trimestre del año, hemos logrado volver a recuperar la normalidad en los plazos previstos para enviaros la Revista.

Lo que hace falta, y perdonad la insistencia, es que no decaiga vuestro espíritu de colaboración y continuéis enviándonos artículos originales que nos permitan mantener el alto nivel técnico en el que, gracias a vuestro esfuerzo, se ha colocado “Hormigón y Acero”. El prestigio alcanzado en España y fuera de ella, resulta ya indiscutible y constantemente nos llegan nuevas pruebas de ello. Como ejemplo citaremos el caso de la petición formulada por la Dirección del Instituto Ibero-Americano de Berlín, cuyo objetivo, según sus manifestaciones, es difundir la cultura y civilización ibero-americanas en los países de Europa. Nos solicitó (y naturalmente su petición ha sido aceptada), que le enviásemos nuestras publicaciones para incorporarlas a su biblioteca que cuenta con más de 430.000 volúmenes.

### 3.— DISTRIBUCION DE LIBROS

Por las razones que se indicaban en el “Resumen de actividades” correspondiente al año 1978, publicado en el número extraordinario 130-131-132 de nuestra Revista “Hormigón y Acero”, teníamos pendientes de oferta a los Asociados, treinta y tres publicaciones de la F.I.P.

Con el objeto de evitar más retrasos, y a pesar de las complicaciones que ello suponía, se decidió realizar los trámites necesarios para poder efectuar su distribución de una sola vez. Pasada la oportuna comunicación a nuestros Asociados, se recibieron peticiones por un total de 778 ejemplares, de acuerdo con el siguiente detalle:

- 46 ejemplares de: “FIP Recommendations for the design of aseismic prestressed concrete structures”.
- 30 ejemplares de: “FIP Recommendations for the design of prestressed concrete oil storage tanks”.
- 34 ejemplares de: “FIP Guides to Good Practice. Maintenance of prestressed concrete structures”.



- 38 ejemplares de: “FIP Guides to Good Practice. Recommendations for segmental construction in prestressed concrete”.
- 37 ejemplares de: “FIP Guides to Good Practice. Basic reinforced concrete and prestressed concrete construction”.
- 20 ejemplares de: “FIP Guides to Good Practice. Grouting of vertical ducts”.
- 25 ejemplares de: “FIP – The design and construction of prestressed concrete reactor vessels”.
- 27 ejemplares de: “FIP – Proposal for a standard for acceptance tests and verification of epoxy bonding agents for segmental construction”.
- 26 ejemplares de: “FIP State of Art Report.— Lightweight aggregate concrete for marine structures”.
- 14 ejemplares de: “FIP State of Art Report.— Principles of thermal insulation with respect to lightweight concrete”.
- 12 ejemplares de: “FIP State of Art Report.— Concrete Containments”.
- 24 ejemplares de: “FIP Report on prestressing steel. 2.— Anchorage and application of pretensioned 7—wire strands”.
- 24 ejemplares de: “FIP Report on prestressing steel. 3.— Losses of prestress in tendons due to steam curing of concrete”.
- 43 ejemplares de: “FIP Technical Report: Bridge decks with pretensioned precast beams”.
- 34 ejemplares de: “FIP Technical Report: Shear at the interface of precast and in situ concrete”.
- 19 ejemplares de: “FIP 8th Congress.— Proceeding’ s Part. 1”.
- 21 ejemplares de: “FIP 8th Congress.— Proceeding’ s Part. 2”.
- 18 ejemplares de: “FIP 8th Congress.— Proceeding’ s Part. 3”.
- 19 ejemplares de: “FIP 8th Congress.— Proceeding’ s Part. 4”.
- 21 ejemplares de: “FIP 8th Congress.— Proceeding’ s Part. 5. Special lectures. Summary of Technical Session and General Report”.
- 13 ejemplares de: “FIP/CEB Report on methods of assessments of the fire resistance of concrete structural members”.
- 15 ejemplares de: “Concrete Society Technical Report n° 15.— Assessment of fire-damaged concrete structures and repair by gunite”.
- 21 ejemplares de: “Concrete Society Technical Report n° 16.— Structural lightweight-aggregate concrete for marine and offshore applications”.
- 24 ejemplares de: “Pile design and construction practice”.
- 14 ejemplares de: “Formwork construction and practice”.
- 9 ejemplares de: “Scaffold falsework design”.
- 17 ejemplares de: “An introduction to prestressed concrete”.
- 47 ejemplares de: “Concrete bridge designers Manual”.
- 14 ejemplares de: “Examples of the design of buildings to CP 110 and allied codes”.

- 6 ejemplares de: "Precast concrete cladding".
- 19 ejemplares de: "Desing charts for water retaining structures to BS 5337".
- 34 ejemplares de: "The finite-strip method in bridge engineering".
- 13 ejemplares de: "Winter concreting".

Una vez más ha quedado demostrada la favorable acogida que tiene este servicio que desde hace años viene prestando la A.T.E.P. Y es natural que así ocurra puesto que de esta forma se pueden adquirir, pagándolas en moneda nacional y además a precio especial, todas aquellas publicaciones que la F.I.P. y sus organizaciones afines vienen editando para su distribución, con carácter exclusivo, entre los Miembros de la Federación, a través de los Grupos Nacionales a ella afiliados.

En esta ocasión, las gestiones para efectuar la correspondiente importación resultó más laboriosa de lo normal, dado el elevado número de libros solicitados cuyo importe total sobrepasaba las 3.200 £ (cerca de medio millón de pesetas). Afortunadamente, todos los problemas pudieron resolverse de modo satisfactorio, y en el plazo de unos meses se consiguió completar la distribución de todos los volúmenes solicitados.

Por primera vez en esta oportunidad, se modificó el procedimiento que se venía utilizando en la distribución, y en lugar de enviar los ejemplares contra reembolso, se pidió que los interesados abonasen previamente el importe correspondiente y, una vez recibido dicho importe, se les remitieron las publicaciones como impresos certificados.

Los envíos contra reembolso, habían dado siempre lugar a numerosas devoluciones, con los consiguientes trastornos y retrasos, al no retirar los interesados los correspondientes envíos dentro de los plazos señalados. Con el nuevo sistema adoptado, se eliminaron estos inconvenientes y, en vista del éxito logrado, en el futuro seguiremos siempre el mismo procedimiento.

#### 4.— OTRAS ACTIVIDADES

Con independencia de cuanto queda reseñado, la ATEP ha continuado realizando todas aquellas actividades que sus Estatutos le señalan y colaborando, dentro de sus posibilidades, en los trabajos que relacionados con la técnicas del pretensado vienen desarrollándose en el seno de otros Organismos u Organizaciones, tanto nacionales como internacionales. Con estas colaboraciones se pretende contribuir a la difusión y perfeccionamiento de nuestra técnica.

En este aspecto merece destacarse: La labor realizada en los Organos Directivos de la FIP y en gran parte de sus Comisiones Técnicas en las cuales la ATEP está representada; su colaboración con los Grupos Nacionales afines de los países latinoamericanos; sus trabajos en la Comisión Permanente del Hormigón, en los Grupos encargados de redactar y revisar las diferentes Normas UNE relativas a los aceros para armaduras de pretensado y los correspondientes métodos de ensayo, en la Comisión CTT 36/SC 16 integrada en la ISO, en la Comisión y el Comité del Sello de Conformidad CIETAN para viguetas pretensadas, etc.

También durante 1979 estuvo representada en la Comisión encargada de revisar, completar y perfeccionar la normativa vigente para tubos de presión contruídos en hormigón armado o pretensado. Esta Comisión ha culminado su labor con la redacción de una propuesta de Instrucción para este tipo de tubos, Instrucción que, en estos momentos, se encuentra en imprenta y se piensa publicar, con el carácter de recomendaciones, como "Instrucción del Instituto Eduardo Torroja para tubos de hormigón armado o pretensado". En ella se abordan, dándoles un tratamiento unitario, coherente y actual, todos los problemas relativos tanto al proyecto como a la ejecución y el control de estas piezas.



Por último, y dentro de este campo de las colaboraciones, debemos señalar que varios de los Miembros de nuestra Asociación forman parte del Comité de Construcción de la Asociación Española para el Control de la Calidad y de algunos de los Grupos de Trabajo formados en el seno de la misma para el estudio de temas concretos.

\*\*\*

Y para terminar, vamos a hacer algunas consideraciones y comentarios sobre el año que ahora se inicia. Las previsiones no son muy halagüeñas y el porvenir no se presenta fácil ni claro. Esto es evidente. Pero también lo es que las circunstancias adversas son las que realmente ponen a prueba la unión y solidaridad entre los componentes de los grupos sociales integrados por personas íntimamente ligadas entre sí, bien sea por vínculos familiares, de amistad, profesionales, etc.; con necesidad y aspiraciones comunes; con los mismos problemas; con análogos objetivos... Siempre hemos dicho que éstas eran, precisamente, las características fundamentales de nuestra Asociación. Y es ésto lo que nos permite ser optimista respecto a nuestro futuro inmediato. Sabemos perfectamente que no habrá de faltarnos vuestra eficaz colaboración de las que tantas y tan valiosas pruebas tenemos. Que en estos momentos en que tan necesaria resulta la ayuda de todos para superar las dificultades y los obstáculos a los que hemos de enfrentarnos, habréis de multiplicar vuestros esfuerzos para lograr, entre todos, continuar nuestro camino y salir adelante; con la vista siempre puesta en ese objetivo fundamental por el que desde hace tantos años venimos trabajando: La difusión y el progreso de la técnica del pretensado.

La primera tarea de la que pensamos ocuparnos en 1980, es la preparación del nuevo Manual H.P.6 de la A.T.E.P. Publicado ya el H.P.5 relativo a la colocación de armaduras, se quiere abordar ahora el estudio de la conservación de la estructuras pretensadas, según se tenía previsto. El tema es de gran actualidad e indudable trascendencia para nuestra técnica. Pero también de gran complejidad. Conscientes de ello, vamos a irlo abordando por partes. En principio, se limitará al campo de los puentes pretensados, por entender que es el más urgente, enfocándolo principalmente a cómo vigilar la conservación, no sólo de su estructura sino también de sus apoyos, juntas, etc. En fecha inmediata, se pasará una circular para que todos aquellos que se encuentren interesados en el problema y dispuestos a colaborar en su estudio, nos lo comuniquen con el objeto de poder constituir la correspondiente Comisión de redacción. Esperamos vuestra ayuda.

#### **Próximo Congreso Internacional sobre "Sistemas de Sellado de Juntas en Estructuras de Hormigón"**

Durante la semana del 28 de setiembre al 2 de octubre de 1981, se celebrará en Niagara Falls, Nueva York, el Congreso Internacional arriba mencionado.

En el curso del mismo se tratarán, entre otros, los siguientes temas: Soluciones cinemáticas para puentes; Juntas en pavimentos para aeropuertos y autopistas; Juntas en edificios; Juntas para depósitos de agua; Juntas en otros tipos de estructuras.

Los interesados en recibir mayor información sobre este Congreso, deberán dirigirse directamente a:

Watson Bowman Associates  
P. O. Box 9  
Amherst, New York 14120  
U.S.A.

# El sistema de ecuaciones en un nuevo método de elementos finitos

José María Urcelay  
Doctor Ingeniero de Caminos  
Instituto Eduardo Torroja

## SINOPSIS

En este trabajo se estudia la formación del sistema de ecuaciones, en un nuevo método de elementos finitos presentado por el autor en otro trabajo, en el que se aplica el método a una placa provista de vigas y soportes.

## INTRODUCCION

1. El método al que este trabajo se refiere es el presentado en otro trabajo<sup>1</sup> del autor donde se aplica el método a una placa provista de vigas y soportes. Para entender lo que sigue es conveniente consultar el trabajo anterior cuya notación se conserva y del que el presente trabajo es continuación.

2. El sistema de ecuaciones de que se trata es un sistema de ecuaciones lineales en el que  $\{\lambda\}$  es el vector desconocido. Una vez obtenido este vector quedan determinados los desplazamientos y los esfuerzos en cualquier punto de los elementos.

3. Las ecuaciones que forman el sistema son de dos clases. Las de una de las clases son las incluidas en la expresión

$$[V] \{\lambda\} = \{O\} \quad (1)$$

donde las filas de la matriz  $[V]$ , que es conocida, son linealmente independientes. Estas ecuaciones expresan las condiciones de contorno que se consideran. De estas condiciones unas pueden referirse a puntos aislados que son nudos, como por ejemplo el caso de un apoyo puntual en un nudo en el que es  $w = 0$ . Las restantes condiciones de contorno se refieren a todos los puntos de fronteras de elementos y son aplicables por ejemplo a los bordes.

4. Las ecuaciones de la otra clase se refieren a todos los elementos. Para un elemento  $C$  las ecuaciones son las incluidas en la expresión

$$[U^C] \{\lambda\} = \{\rho^C\} \quad (2)$$

donde la matriz  $[U^C]$  y el vector  $\{\rho^C\}$  son conocidos. Estas ecuaciones expresan que los mo-



mentos  $M_{rs}$  considerados de la carga  $q_w^C$  son iguales que los de las cargas que realmente actúan en C. Se recuerda que la carga  $q_w^C$  es la definida en C por los desplazamientos mediante la correspondiente ecuación diferencial. La carga  $q_w^C$  sustituye a todas las cargas que actúan en C, no sólo a las cargas dadas sino también a las que se desconocen por depender de  $\{\lambda\}$ . Las cargas que actúan en C no incluyen las correspondientes a los esfuerzos en las fronteras de C, que están en equilibrio con  $q_w^C$ .

5. Diversos ejemplos de cargas dependientes de  $\{\lambda\}$  pueden citarse. Uno de ellos es el de las cargas transmitidas a la placa por vigas y soportes. Otro ejemplo es el de las cargas aplicadas para conseguir la continuidad de esfuerzos en fronteras entre elementos mediante la neutralización de las cargas parásitas que, si no, resultarían aplicadas.

También puede citarse el caso de las cargas que pueden aplicarse en los bordes para que se cumplan condiciones de contorno referentes a esfuerzos, por ejemplo para hacer que el esfuerzo cortante correspondiente sea nulo en un borde libre. En este caso la expresión (1) se referirá únicamente a condiciones de contorno de naturaleza geométrica.

6. Las cargas concentradas transmitidas por apoyos puntuales son desconocidas y han sido eliminadas antes de obtener (2). Estas cargas se obtienen una vez conocido el vector  $\{\lambda\}$ .

7. Hay dos modos de formar el sistema, directamente o minimizando el error  $\epsilon$ . A continuación se estudian estas dos maneras.

## SISTEMA DIRECTO

8. Este puede formarse directamente y es como sigue:

$$\begin{bmatrix} U_d \\ V \end{bmatrix} \{\lambda\} = \begin{bmatrix} \rho_d \\ O \end{bmatrix} \quad (3)$$

donde las filas de  $[U_d]$  y los elementos de  $\{\rho_d\}$  son los de  $[U^C]$  y  $\{\rho^C\}$  para todos los elementos. Las filas de la matriz de coeficientes y en particular las de  $[U_d]$  deben ser linealmente independientes.

El objetivo de la expresión (3) es el de indicar las ecuaciones que constituyen el sistema pero no el orden de estas ecuaciones. Con respecto a este orden es claro que las ecuaciones incluidas en (1) no deben estar dispuestas como se indica en (3) sino que cada una de ellas debe colocarse con las ecuaciones (2) del mismo elemento para disminuir la anchura de banda.

9. Como el número de ecuaciones debe ser el mismo que el de incógnitas es evidente que en general no se podrán utilizar las mismas parejas de valores de  $r, s$ , para todos los elementos. Si se desea puede hacerse que la máxima diferencia entre los números de elementos de los vectores  $\{\eta^C\}$  de dos elementos de placa cualesquiera, no sea mayor que 1. Esta diferencia no significa sino que las cargas  $q_w^C$  de diferentes elementos de placa no están sometidas al mismo número de condiciones. Ni estas condiciones ni su número necesitan ser los mismos, con la excepción siguiente.

10. En cada elemento de placa el correspondiente vector  $\{\eta^C\}$  debe contener al menos los elementos referentes a los momentos  $M_{00}$ ,  $M_{01}$  y  $M_{10}$  con objeto de que la carga  $q_w^C$  y las sustituidas por ella tengan la misma resultante tanto en magnitud como en posición. El número de incógnitas debe ser suficiente para que puedan considerarse estos tres momentos en cada elemento de placa.

11. Conviene advertir que la carga  $q_w^C$  puede ser nula en todos los puntos de C y que el que lo sea no impide el establecimiento de ecuaciones incluidas en (3) y por lo tanto linealmente independientes, siempre que en C actúen cargas dependientes de  $\{\lambda\}$ .

12. La matriz de coeficientes de (3) puede no ser simétrica. Conviene observar que esta matriz puede no ser una matriz de rigidez al menos según la definición usual de matriz de rigidez. Para asegurarse de esto es suficiente considerar el caso de la viga, y en él formar  $\{\lambda\}$  con los valores de  $w$ ,  $dw/dx$ ,  $d^2w/dx^2$  y  $d^3w/dx^3$  en los nudos. La matriz resultante no es simétrica. Si entonces se ponen los valores de  $d^2w/dx^2$  y  $d^3w/dx^3$ , en función de los de  $w$  y  $dw/dx$  y luego se escriben los esfuerzos en los nudos en función de  $d^2w/dx^2$  y  $d^3w/dx^3$ , puede obtenerse la matriz de rigidez usual, como se verá en otro trabajo.

13. Naturalmente el sistema (3) puede transformarse en otro que sea simétrico. Para ello basta premultiplicar los dos miembros de (3) por la matriz transpuesta de la de coeficientes.

## SISTEMA OBTENIDO MINIMIZANDO $\epsilon$

14. De acuerdo con el trabajo anterior minimizar  $\epsilon$  es lo mismo que minimizar la suma de los cuadrados de los residuos de las ecuaciones incluidas en el sistema

$$[U] \{\lambda\} = \{\rho\} \quad (4)$$

que está formado por una expresión como la (2) para cada elemento.

15. Por otra parte deben cumplirse las ecuaciones incluidas en (1), que expresan las condiciones de contorno. Por consiguiente el número de filas de  $[U]$  que sean linealmente independientes entre sí y de las filas de  $[V]$ , debe ser igual o mayor que el número de filas de la matriz  $[U_d]$  de (3). Cumplida esta condición, la matriz  $[U]$  puede contener filas que sean combinaciones lineales de las restantes filas de  $[U]$  y de las filas de  $[V]$ . Por consiguiente pueden utilizarse para todos los elementos de la placa las mismas parejas de valores de  $r$ ,  $s$ . En cualquier caso, el vector  $\{\eta^C\}$  de cada elemento de placa debe contener los elementos correspondientes a los momentos  $M_{00}$ ,  $M_{01}$  y  $M_{10}$  y las ecuaciones referentes a estos tres momentos deben cumplirse exactamente por la misma razón que en § 10.

La libertad para la elección de los vectores  $\{\eta^C\}$  para los elementos de placa puede permitir mejorar un sistema mal condicionado.

16. Si todas las filas de  $[U]$  son linealmente independientes y el número de estas filas es el mismo que el de las de  $[U_d]$  será  $\epsilon = 0$ , pudiéndose utilizar el sistema directo.

17. La expresión (4) puede escribirse como sigue:

$$\begin{bmatrix} U' \\ U'' \end{bmatrix} \{\lambda\} = \begin{Bmatrix} \rho' \\ \rho'' \end{Bmatrix} \quad (5)$$

siendo  $[U'']$  la matriz correspondiente a las ecuaciones de (4) que deben cumplirse exactamente. Estas ecuaciones son las referentes al menos a los momentos  $M_{00}$ ,  $M_{01}$  y  $M_{10}$  en cada elemento de placa, de acuerdo con § 15.

18. El problema consiste en obtener  $\{\lambda\}$  de modo que sea mínima la suma de los cuadrados de los residuos de

$$[U'] \{\lambda\} = \{\rho'\} \quad (6)$$

con la condición de que la expresión

$$\begin{bmatrix} U' \\ V \end{bmatrix} \{\lambda\} = \begin{Bmatrix} \rho' \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (7)$$

se cumpla exactamente.

Las filas de la matriz de (7) deben ser linealmente independientes como lo son las de  $[V]$ . El número de las ecuaciones incluidas en la expresión (7) debe ser menor que el de elementos de  $\{\lambda\}$  con objeto de que la minimización referente a (6) pueda llevarse a cabo.



19. Designando

$$\{\theta'\} = [U'] \{\lambda\}; \{\theta''\} = \begin{bmatrix} U'' \\ V \end{bmatrix} \{\lambda\}; \{\xi''\} = \begin{bmatrix} \rho'' \\ O \end{bmatrix} \quad (8)$$

la minimización condicionada anterior equivale a la minimización de S siendo

$$S = \{\theta' - \rho'\}^T \{\theta' - \rho'\} + \{\theta'' - \xi''\}^T \{\xi\} \quad (9)$$

donde  $\{\xi\}$  es un vector cuyos elementos son los correspondientes multiplicadores de Lagrange.

20. Puede demostrarse fácilmente que la suma S es mínima cuando

$$[U']^T [U'] \{\lambda\} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} U'' \\ V \end{bmatrix}^T \{\xi\} = [U']^T \{\rho'\} \quad (10)$$

Puesto que debe cumplirse (7) el sistema que se busca será el siguiente

$$\begin{bmatrix} [U']^T [U'] & \frac{1}{2} \begin{bmatrix} U'' \\ V \end{bmatrix}^T \\ \frac{1}{2} \begin{bmatrix} U'' \\ V \end{bmatrix} & O \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda \\ \xi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} [U']^T \{\rho'\} \\ \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \rho'' \\ O \end{bmatrix} \end{Bmatrix} \quad (11)$$

Como puede verse, este sistema es simétrico. Tiene los inconvenientes de que el número de sus incógnitas ha aumentado debido a  $\{\xi\}$  y de que su formación es laboriosa.

21. Una manera de evitar estos inconvenientes consiste en tratar los residuos de (7) como los de (6), asignando pesos adecuados a todos ellos.

Es decir que el problema consiste en obtener  $\{\lambda\}$  de modo que la suma de los productos de los cuadrados de los residuos de

$$\begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} \{\lambda\} = \begin{bmatrix} \rho \\ O \end{bmatrix} \quad (12)$$

por los pesos respectivos, sea mínima. Los pesos de los cuadrados de los residuos de las ecuaciones de (7) deben ser mucho mayores que los de (6).

La solución así determinada, aunque aproximada, puede diferir muy poco de la solución exacta dada por (11).

Por razones de coherencia debe modificarse la definición del error  $\epsilon$  y definirlo como raíz cuadrada de la suma de los productos de los cuadrados de los residuos de (12) por sus pesos.

22. La minimización del error  $\epsilon$  así definido conduce al sistema

$$\begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix}^T [K] \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} \{\lambda\} = \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix}^T [K] \begin{bmatrix} \rho \\ O \end{bmatrix} \quad (13)$$

donde [K] es una matriz cuadrada cuyos únicos elementos no nulos, que son los de la diagonal principal, son los pesos de los cuadrados de los residuos de las ecuaciones de (12). El sistema (13) es simétrico y su formación es mucho más simple que la de (11).

23. Para indicar los elementos de la matriz de coeficientes de (13) a los que cada ecuación de (12) contribuye, se considera esta ecuación como una matriz de una sola fila. Los citados elementos son las intersecciones de las columnas de los elementos no nulos de la ecuación con las filas de los elementos no nulos de la ecuación transpuesta.

Por ejemplo la expresión (2) puede escribirse

$$[\underline{U}^C] \{\underline{\lambda}^C\} = \{\underline{\rho}^C\} \quad (14)$$

de acuerdo con (28) del trabajo<sup>1</sup> anterior. Los elementos de  $[U^C]$  que no pertenecen a  $[\underline{U}^C]$  y que por tanto son nulos no pueden contribuir a la matriz de coeficientes de (13).

24. Para disminuir el número de incógnitas se podrían eliminar algunas de ellas una vez puestas en función de las restantes. Esta eliminación da lugar a complicaciones salvo en casos especiales.

### ELECCION DE PAREJAS DE $r, s$

25. Entre las parejas de los exponentes  $r, s$  a elegir para los momentos  $M_{rs}$  es conveniente incluir todas las parejas posibles hasta un cierto valor  $g$  de la suma  $r + s$ . Si para todas estas parejas se cumplen las igualdades en cuestión de los correspondientes momentos  $M_{rs}$  en un sistema de ejes coordenados, se cumplirán también en cualquier otro sistema de ejes coordenados.

Si por ejemplo se consideran 9 parejas, estas parejas podrían ser las siguientes

|       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|
|       |       | 0 ; 0 |       |       |
|       | 1 ; 0 |       | 0 ; 1 |       |
| 2 ; 0 |       | 1 ; 1 |       | 0 ; 2 |
|       | 2 ; 1 |       | 1 ; 2 |       |
|       |       | 2 ; 2 |       |       |

Las tres primeras parejas son todas las posibles para  $g = 1$ . Estas 3 parejas deben incluirse siempre entre las consideradas en cada elemento para que la carga  $q_w^C$  y las sustituidas por ella tengan la misma resultante en magnitud y posición. Las 6 primeras parejas son todas las posibles para  $g = 2$ .

Para las 3 últimas parejas se conservan las igualdades de los correspondientes momentos  $M_{rs}$  solamente en ejes paralelos a los adoptados.

Si se consideraran 7 parejas en vez de 9 y para ello se suprimieran las 2;1 y 1;2 entonces la igualdad de los momentos  $M_{rs}$  correspondientes a la pareja restante 2;2 no se conserva para ejes diferentes de los adoptados.

### REFERENCIA

1. J.M. Urcelay. Bases para un nuevo método de elementos finitos. Hormigón y Acero, n° 133, 4º trimestre 1979.

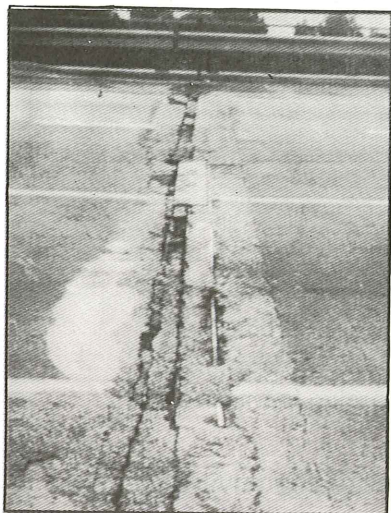


# PUENTE NUEVO O PUENTE VIEJO

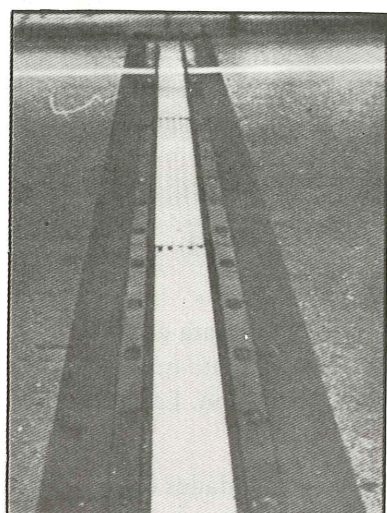
Juntas PUENTEFLEX + Instalaciones **texsa / cotesa** =  
= Garantía de mayor rendimiento y estética

## PUENTE VIEJO:

antes



después

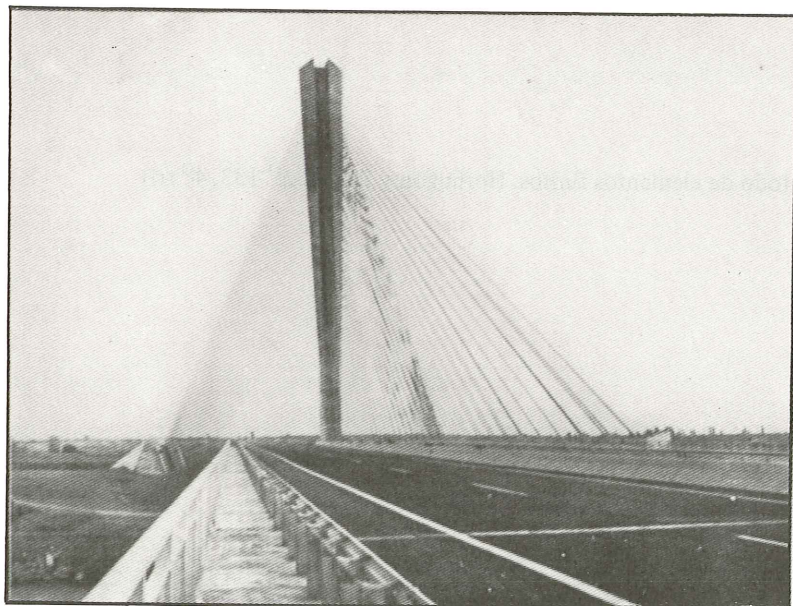


Puente del Bruch  
Gerona



Juntas SR-2  
60 mm movimiento

## PUENTE NUEVO:



Puente sobre el río Ebro  
Castellón - Autopista de  
Navarra



Juntas SR-4  
120 mm movimiento

FABRICADAS EN ESPAÑA BAJO LICENCIA DE

DISTRIBUIDORES Y COLOCADORES  
EXCLUSIVOS

**texsa / cotesa**

Parcerisas, 27 - BARCELONA-4  
Teléf. 331 40 00



**PUENTEFLEX, S. A.**

Apartado 18144 - MADRID  
Teléf 232 38 38

## **Pandeo por flexión de estructuras aporticadas planas**

**José Ramón Atienza Reales**  
**Doctor Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos**  
**Catedrático de Estructuras y Puentes Metálicos de la E.T.S. de Ingenieros de**  
**Caminos, Canales y Puertos de Santander**

### **RESUMEN**

Las estructuras aporticadas no arriostradas frente al desplazamiento en el plano del entramado pueden pandear masivamente hacia un costado cuando las cargas actuantes alcanzan un valor crítico.

Este fenómeno de inestabilidad ha sido estudiado ampliamente en los últimos decenios y en la actualidad se dispone de varios métodos para obtener soluciones rigurosas o aproximadas de las cargas críticas.

En este artículo efectuamos un planteamiento teórico general del problema, esbozando algunos de los métodos rigurosos que existen para resolverlo. Analizamos los métodos aproximados que se han propuesto hasta la fecha con el mismo fin, y terminamos describiendo un método aproximado que hemos desarrollado para el estudio del pandeo por flexión en el plano medio de entramados de una altura.

### **INTRODUCCION**

Una de las características más importantes de la ingeniería del siglo XX es la construcción de estructuras cada vez más esbeltas, en las que los problemas de inestabilidad elástica adquieren una importancia capital.

La primera investigación teórica sobre estos fenómenos de inestabilidad se debe a Euler, que la realizó en el año 1744. En aquella época los principales materiales de construcción que se empleaban eran la madera y la piedra. La escasa resistencia de esta clase de materiales daba origen a estructuras poco esbeltas, en las que, lógicamente, no existían problemas de pandeo.



Por esta razón, el trabajo de Euler permaneció olvidado durante un siglo. Hubo de esperarse hasta la segunda mitad del siglo XIX para que los estudios del pandeo de los elementos comprimidos adquiriesen un interés práctico excepcional. Es en esta época cuando se comienza la construcción en gran escala de puentes de acero para las vías férreas.

A partir de entonces, espoleados los investigadores por necesidades prácticas de carácter urgente, se han publicado numerosísimos trabajos de investigación teórica y de carácter experimental sobre estos temas.

En este artículo vamos a estudiar el pandeo por flexión en el plano medio de estructuras aporticadas no arriostradas frente al desplazamiento en su propio plano.

Concretando más, diremos que lo que pretendemos obtener es la menor carga crítica de un pórtico plano.

La determinación de esta magnitud sirve para estimar la carga de colapso del entramado, empleando la aproximación de Rankine-Merchant (1), así como para obtener las longitudes de pandeo de los pilares.

## RESUMEN GENERAL DE LAS TEORIAS SOBRE LA INESTABILIDAD DE PORTICOS

Para estudiar la estabilidad elástica de un entramado, existen, fundamentalmente, dos tipos de métodos: Los métodos analíticos, iniciados por Zimmerman en el año 1902, y los métodos energéticos, que comienzan en 1927 con Kasarnowsky.

Los métodos analíticos reducen el problema a la resolución de sistemas de ecuaciones simultáneas y a la evaluación de los determinantes asociados a ellas.

La aparición y el desarrollo de los modernos computadores digitales ha significado un aumento muy notable de la importancia de los métodos analíticos para el estudio de la estabilidad elástica de los entramados, en detrimento de los métodos energéticos, que actualmente se encuentran en completo desuso.

No obstante, los métodos energéticos siguen siendo insustituibles en el estudio de la estabilidad elástica de elementos bidimensionales (placas y láminas).

Existen dos clases de métodos analíticos: El de bifurcación de equilibrio y el de perturbación de equilibrio. Ambos son una generalización de los métodos desarrollados por Euler y Timoshenko para el estudio de la estabilidad de la barra aislada.

Analicemos, brevemente, ambos métodos.

El comportamiento de un pórtico descrito por diagrama, carga-deformación, puede predecirse, con diversos grados de exactitud, en función del conocimiento que tengamos de las propiedades de la estructura. La discrepancia entre el comportamiento real y el predicho depende de lo adecuado que sea el modelo que ideemos.

Si empezamos trabajando con un modelo muy simple, extrapolando al pórtico las hipótesis simplificadoras que hizo Euler para el estudio de la estabilidad de la barra aislada, conseguimos que la estructura quede idealizada de forma que las condiciones de equilibrio vengan expresadas por un sistema de ecuaciones homogéneas.

Así, pues, en las estructuras aporticadas planas, cuando aplicamos el método de bifurcación de equilibrio para estudiar su estabilidad elástica, hacemos las siguientes hipótesis simplificadoras:

- El material estructural se supone continuo, homogéneo, isótropo, perfectamente elástico, admitiéndose una dependencia lineal entre tensiones y deformaciones.
- Se supone que el sistema estructural no tiene ninguna imperfección geométrica y que está cargado de forma que los únicos esfuerzos que actúan en la estructura son esfuerzos axiales (cargas gravitatorias actuando directamente en los nudos del entramado).
- Se admite que las nuevas formas de equilibrio son lo suficientemente próximas a la forma inicial para que pueda aplicarse la teoría de las pequeñas deformaciones.
- Debido a la proximidad existente entre la forma inicial sin deformación y las nuevas formas de equilibrio deformadas, se desprecia el cambio de posición de los elementos estructurales y la variación en el punto de aplicación de las cargas. Por consiguiente, las ecuaciones de compatibilidad y equilibrio se establecen en la estructura no deformada, en vez de hacerlo en la deformada.
- Por último, se desprecian los acortamientos de las barras sometidas a esfuerzos axiales y se desprecian las deformaciones por cortante frente a las deformaciones por flexión del sistema estructural.

Con estas simplificaciones se puede obtener la ecuación matricial que relaciona los movimientos de los nudos con las fuerzas actuantes en los mismos. Como veremos más adelante (ecuación II), se trata de un sistema de ecuaciones homogéneas, puesto que no se aplican momentos exteriores en los nudos y tampoco existen cargas horizontales que soliciten a las distintas plantas.

La solución de este modelo matemático conduce a un análisis de autovalores y autovectores, el resultado se ha representado en la figura 1.

En el diagrama se observa que, para cargas pequeñas, el sistema no experimenta ningún desplazamiento hasta el momento en que se alcanza la menor carga crítica,  $P_{c1}$ . En este

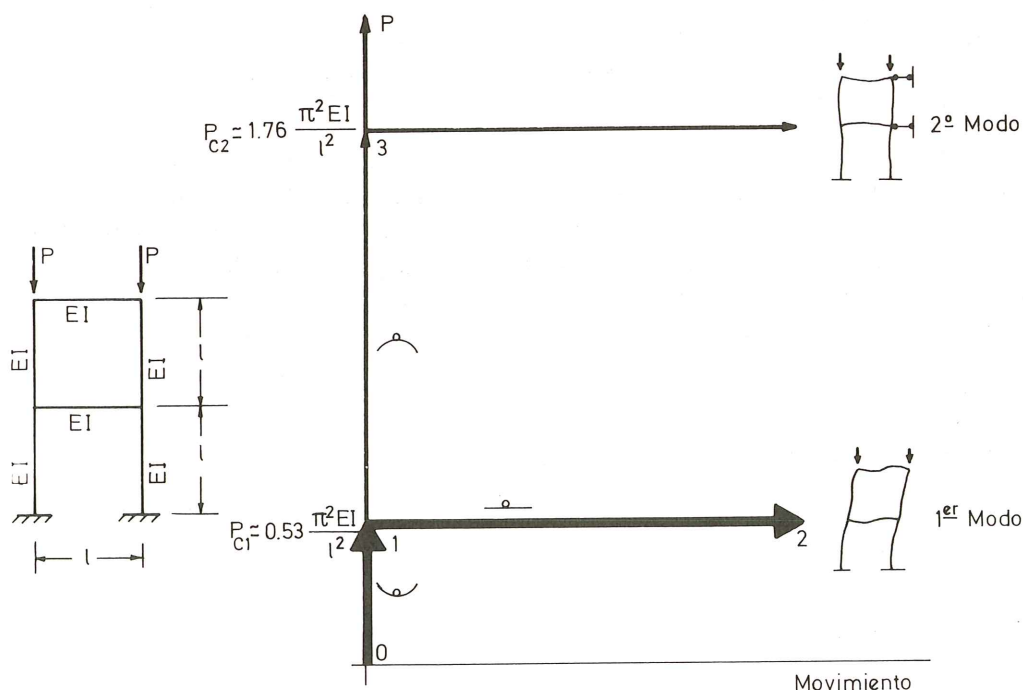


Figura 1



punto existe una bifurcación en el diagrama de equilibrio y el sistema puede seguir el camino 1-2 o el camino 1-3.

Por el camino 1-2 los esfuerzos axiles permanecen constantes, y, dentro de la teoría de las pequeñas deformaciones, cualquier deformación definida por el primer modo de pandeo es posible, mientras que, por el camino 1-3 los esfuerzos axiles continúan creciendo mientras que el entramado no sufre ningún desplazamiento.

Al alcanzarse las diversas cargas críticas van apareciendo nuevos puntos de bifurcación en el diagrama de equilibrio.

Estos puntos de bifurcación resultan de la elección de un modelo matemático demasiado simple. En los pórticos reales no se presentan estos estados de bifurcación de equilibrio, puesto que no son geoméricamente perfectos, no se pueden cargar de forma que sólo existan esfuerzos axiles en sus barras, y el material estructural no tiene un comportamiento elástico y lineal.

Podemos complicar un poco el modelo admitiendo que la sollicitación no es un esfuerzo axil únicamente, sino que, además, existen unos momentos flectores primarios producidos por las cargas exteriores. En este nuevo modelo seguiremos admitiendo que el material estructural tiene un comportamiento elástico y lineal, despreciaremos las deformaciones por axil y cortante frente a las deformaciones de flexión, y seguiremos escribiendo las ecuaciones de equilibrio en la posición sin deformar. Por último, supondremos que los esfuerzos axiles que solicitan a las barras del entramado son los que se obtienen haciendo un análisis lineal del sistema estructural.

En estas condiciones la respuesta de la estructura viene dada por la curva continua de la figura 2.

Como puede apreciarse, la estructura se deforma desde el instante en que se le aplican las cargas. Las deformaciones aumentan, al principio lentamente, y van creciendo cada vez más de prisa a medida que las cargas verticales se aproximan a la menor carga crítica, llegando las deformaciones a ser infinitas en ese instante.

Hemos llegado a un extremo en el que las matemáticas que veníamos empleando ya hace tiempo que dejaron de representar el verdadero comportamiento del sistema estructural, porque las hipótesis en que se apoya el análisis, la teoría de las pequeñas deformaciones y el comportamiento elástico, han dejado de ser válidas.

Sin embargo, hemos obtenido un resultado muy útil, puesto que en él tiene su fundamento un nuevo método para obtener la menor carga crítica, el de perturbación de equilibrio. Este método consiste en estudiar el comportamiento del sistema estructural frente a una fuerza perturbadora, a medida que crecen de forma paulatina los esfuerzos axiles. Es conveniente que la fuerza perturbadora excite el modo de pandeo correspondiente a la carga crítica menor. Esta fuerza perturbadora puede ser de valor reducido y constante.

Finalmente, si mejoramos todavía más el modelo matemático, teniendo en cuenta el comportamiento elasto-plástico del material estructural, la respuesta del sistema es la representada por la curva discontinua de la figura 2.

La carga máxima que es capaz de resistir el entramado viene definida por el punto más alto del diagrama, carga-deformación. Para obtener este punto es necesario efectuar un análisis elasto-plástico, no lineal, del sistema estructural.

Existen algunos estudios sobre el tema, entre los que podemos citar los de Jennings (2) y Majid (3), que estudiaron algunos pórticos simples hasta la rotura, empleando una

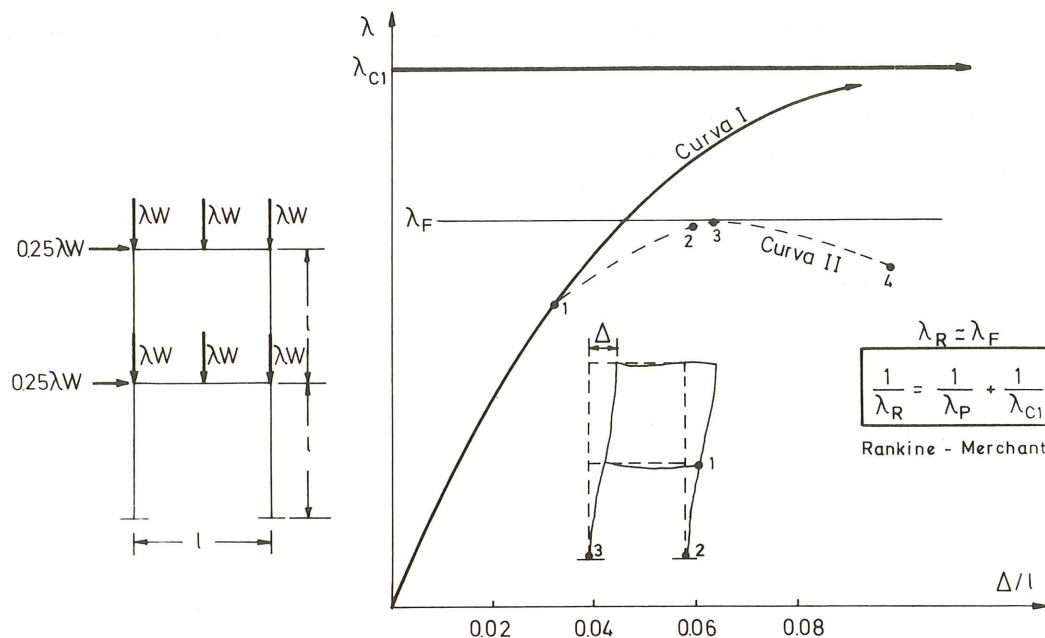


Figura 2

técnica iterativa, paso a paso, bastante laboriosa, puesto que por este procedimiento tiene que estudiarse donde y cuando se van formando las distintas rótulas plásticas a medida que se incrementan las cargas de forma paulatina. El proceso ha de continuarse hasta el momento en que, por haberse formado un número suficiente de rótulas plásticas, la estructura se convierte en un mecanismo.

Afortunadamente, empleando la aproximación de Rankine-Merchant (1), se puede obtener con facilidad una buena estimación de la carga de colapso del entramado.

La fórmula de Rankine-Merchant, es:

$$\frac{1}{\lambda_R} = \frac{1}{\lambda_P} + \frac{1}{\lambda_{C1}} \quad (I)$$

Donde:

$\lambda_{C1}$  = Menor carga crítica elástica

$\lambda_P$  = Carga de rotura rígida-plástica.

El término,  $\lambda_R$ , recibe el nombre de factor de carga de Rankine-Merchant, pues la expresión anterior es similar a la fórmula empírica de Rankine para el diseño de piezas aisladas comprimidas, y fue Merchant (1) el primero en demostrar teóricamente que la carga de Rankine es una estimación excelente, del lado de la seguridad, de la carga de colapso del entramado. La confirmación experimental de la validez de la afirmación anterior se debe a Salem (4).

Empleando esta aproximación, la carga de colapso del entramado se obtiene a partir de dos magnitudes que son mucho más fáciles de calcular. Estas magnitudes son: La carga de rotura rígido-plástica y la menor carga crítica elástica.



El cálculo de la primera se reduce a la resolución de un problema de programación lineal. El objeto de este artículo es precisamente el estudio de la segunda de las magnitudes citadas.

El procedimiento que se aplica en la práctica para determinar esta última magnitud lo explicaremos con la ayuda del pórtico simple representado en la figura 3.

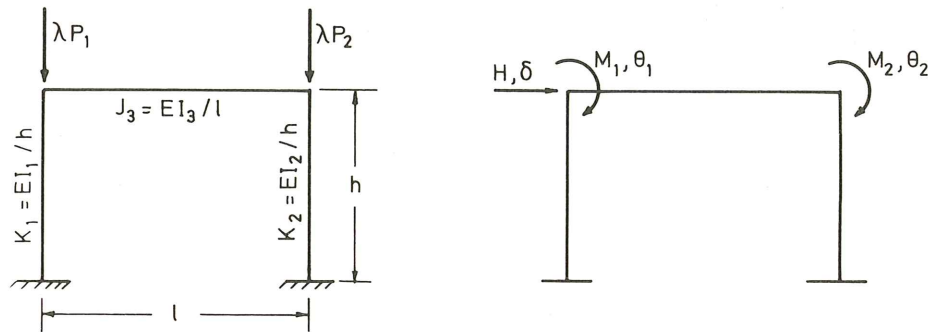


Figura 3

Basándonos en las técnicas generales del cálculo matricial de estructuras (5), podemos deducir la ecuación matricial que relaciona las fuerzas actuantes en los nudos con los movimientos de los mismos. Esta ecuación, es:

$$\begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ H \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 4K_1 + 4J_3 & 2J_3 & -6K_1/h \\ 2J_3 & 4K_2 + 4J_3 & -6K_2/h \\ -6K_1/h & -6K_2/h & \frac{12}{h^2}(K_1 + K_2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \delta \end{Bmatrix} \quad (\text{II})$$

La ecuación anterior se ha obtenido aplicando la teoría lineal clásica, en la que no se tiene en cuenta la disminución de la rigidez a flexión de los soportes, provocada por el esfuerzo axial a que están sometidos.

Para estudiar la estabilidad elástica del entramado es preciso considerar los efectos secundarios provocados por la existencia del esfuerzo axial. En este caso la matriz de rigidez se transforma, en:

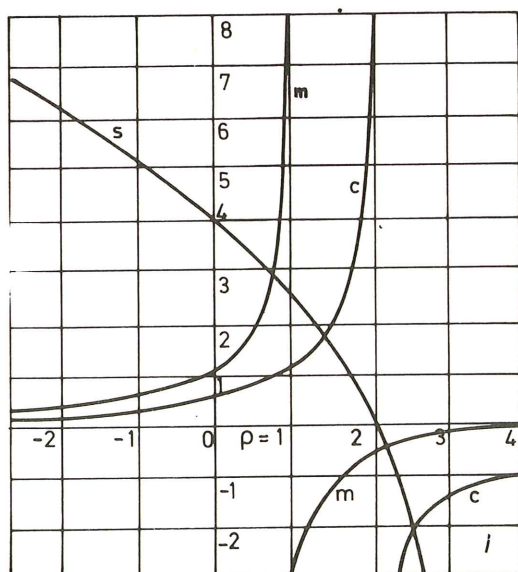
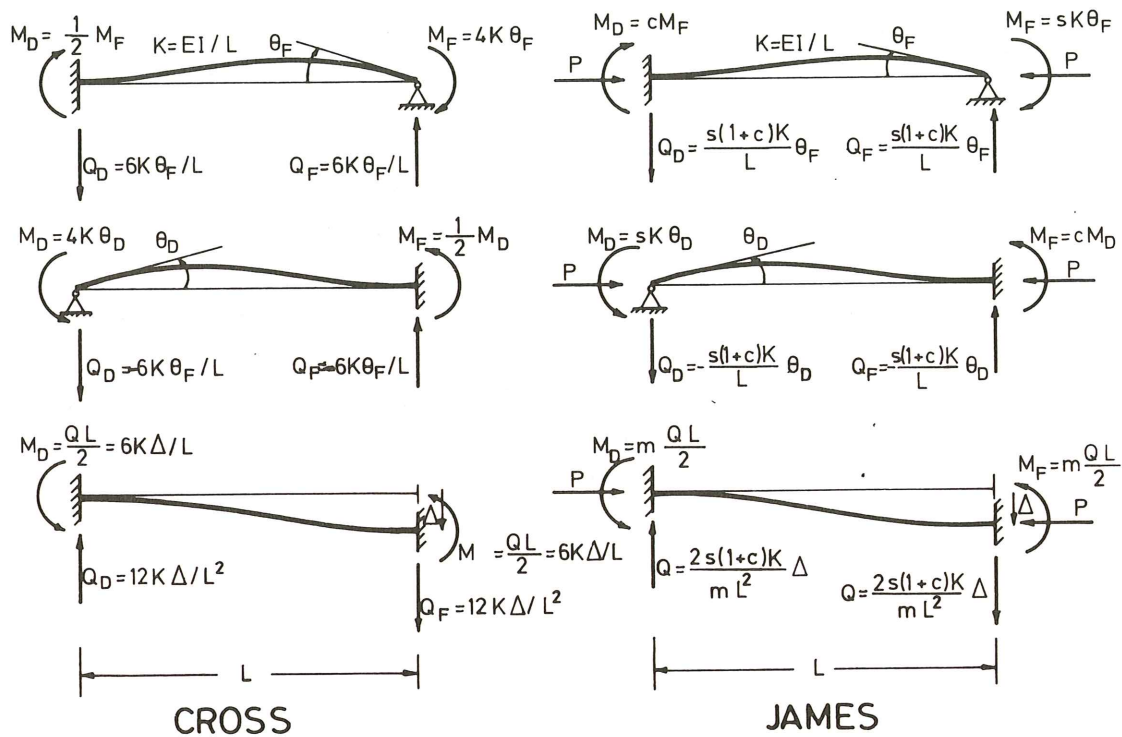
$$\begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ H \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 K_1 + 4J_3 & 2J_3 & -\frac{S_1(1+C_1)K_1}{h} \\ 2J_3 & S_2 K_2 + 4J_3 & -\frac{S_2(1+C_2)K_2}{h} \\ -\frac{S_1(1+C_1)K_1}{h} & -\frac{S_2(1+C_2)K_2}{h} & \frac{2S_1(1+C_1)K_1}{m_1 h^2} + \frac{2S_2(1+C_2)K_2}{m_2 h^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \delta \end{Bmatrix} \quad (\text{III})$$

Donde aparecen las funciones de estabilidad, s, c y m.

Estas funciones fueron definidas por primera vez en 1935 por James (6), que amplió el método de la distribución de momentos, debido a Cross.

En el método de Cross, (1930), se obtiene la deformación final de la estructura mediante aproximaciones sucesivas, procediendo por superposición de operaciones del tipo de las representadas en la figura 4. Estas operaciones se ordenan de forma que, al finalizar el proceso, se consigue satisfacer todas las ecuaciones de equilibrio.

James demostró que la existencia de un esfuerzo axial constante,  $P$ , actuando sobre la barra, no altera los principios fundamentales del método de Cross. La diferencia estriba en que cambian los coeficientes de rigidez y de transmisión de la barra en la forma representada en el gráfico de la figura 4.



$s$  = Coeficiente de rigidez  
 $c$  = Coeficiente de transmisión  
 $m$  = Función de desplazamiento transversal

Figura 4

$$s = \frac{L \sqrt{\frac{P}{EI}} - \operatorname{sen} L \sqrt{\frac{P}{EI}}}{\operatorname{sen} L \sqrt{\frac{P}{EI}} - L \sqrt{\frac{P}{EI}} \cos L \sqrt{\frac{P}{EI}}}$$

$$c = \frac{(1 - L \sqrt{\frac{P}{EI}} \cot L \sqrt{\frac{P}{EI}}) \frac{L}{2} \sqrt{\frac{P}{EI}}}{\operatorname{tg} \frac{L}{2} \sqrt{\frac{P}{EI}} - \frac{L}{2} \sqrt{\frac{P}{EI}}}$$

$$m = \frac{2 s (1 + c)}{2 s (1 + c) - \pi^2 \rho}$$

$$\rho = \frac{P}{\pi^2 EI / l^2}$$



Para aplicar el método de bifurcación de equilibrio a este entramado, habría que generar la matriz de rigidez del mismo y calcular su determinante. El proceso se repite varias veces, a medida que se incrementan las cargas verticales de forma paulatina, hasta que se anula por primera vez el determinante de la matriz de rigidez, momento en el que se ha alcanzado el valor de la menor carga crítica.

Para aplicar el método de la perturbación de equilibrio, se genera la matriz de rigidez del pórtico, y se invierte para calcular el desplazamiento transversal provocado por una fuerza perturbadora,  $H$ , que excita el primer modo de pandeo. Como en el caso anterior, el proceso se repite varias veces, a medida que crece el parámetro,  $\lambda$ , que multiplica a las cargas verticales, hasta que el desplazamiento transversal se hace infinito.

La determinación de la menor carga crítica elástica de un entramado tiene una aplicación inmediata en el campo de las estructuras metálicas ya que sirve para diseñar sus pilares, puesto que permite conocer las longitudes de pandeo de los mismos.

La longitud de pandeo de un soporte, es, como sabemos, la longitud de una barra, sujeta articulada en ambos extremos, que tiene la misma carga crítica que la pieza real que se considera.

El concepto, longitud de pandeo, sólo tiene significado físico cuando la barra está sometida exclusivamente a esfuerzos axiales, y es la longitud teórica que existe entre los puntos de inflexión de su elástica en el instante de pandeo. (Figura 5).

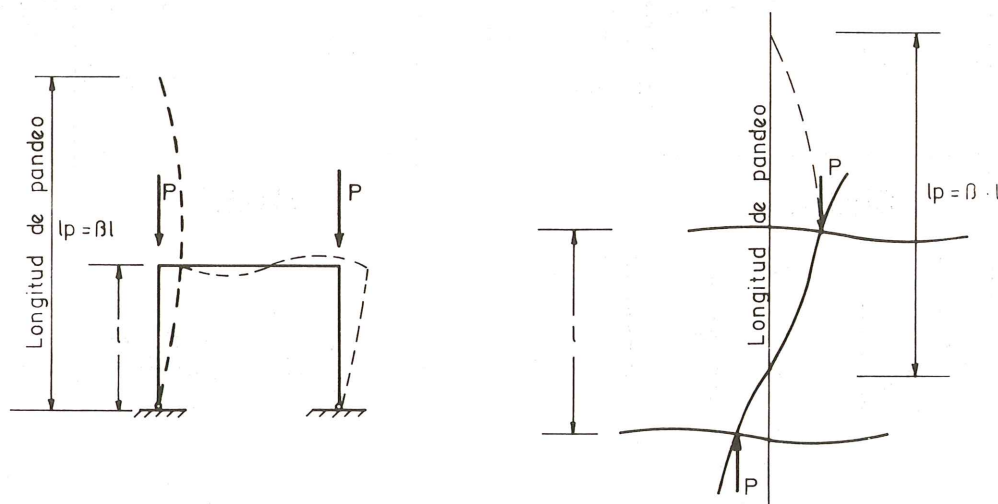


Figura 5

El coeficiente,  $\beta$ , por el que hay que multiplicar la longitud real del soporte para obtener su longitud de pandeo, es:

$$\beta = \sqrt{1/\rho} \quad (\text{IV})$$

Donde,  $\rho$ , viene definido por el cociente entre el esfuerzo axial del pilar, en el instante en que se produce el pandeo masivo del pórtico, y la carga crítica del mismo, en el supuesto de que el pilar estuviera articulada en sus extremos.

## MÉTODOS APROXIMADOS PARA LA DETERMINACION DE LAS LONGITUDES DE PANDEO EN LOS SOPORTES DE ESTRUCTURAS APORTICADAS

Para determinar la longitud de pandeo de los pilares es necesario estudiar la estabilidad elástica del entramado completo. Estos análisis son demasiado complejos, incluso cuando se llevan a cabo en un ordenador. Normalmente su aplicación no es viable en los proyectos ordinarios. Por esta razón las normas de construcción suelen recurrir a métodos aproximados.

A continuación analizamos algunos de los métodos aproximados que se han propuesto hasta la fecha.

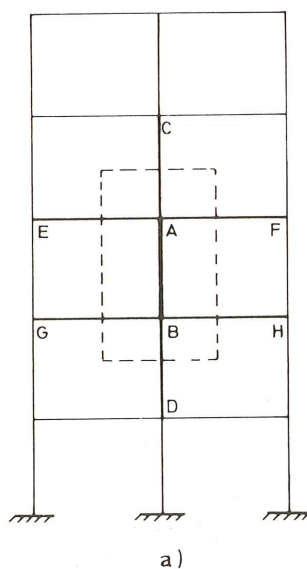
El más importante, por su universalidad, es el de Julian y Lawrence, que fue formulado en el año 1959 y se desarrolló para incorporarlo al "Boston Building Code". Más tarde fue recogido por el "Manual of American Institute of Steel Construction", por las normas francesas de construcción metálica "Regles C M-66", y por la norma española "MV 103-1972".

En el método de Julian y Lawrence se parte de las siguientes hipótesis simplificadoras:

- 1ª.— Para estudiar el pandeo del pilar A-B (figura 6a), sólo se considera la influencia de las vigas y pilares que se unen directamente con el pilar cuya estabilidad analizamos despreciando la influencia del resto de las barras.
- 2ª.— Se supone que los puntos de inflexión en la elástica de los dinteles, en el instante del pandeo masivo del pórtico, están en el centro de los vanos.
- 3ª.— Se admite que el momento con el que los dinteles coaccionan el giro del nudo se reparte entre los pilares, que se unen en dicho nudo, en proporción directa a sus rigideces respectivas,  $EI/L$ .

$$\text{Grado de empotramiento en el nudo superior : } G_s = \frac{J_3 + J_4}{J_3 + J_4 + K_s + K}$$

$$\text{Grado de empotramiento en el nudo inferior : } G_i = \frac{J_1 + J_2}{J_1 + J_2 + K_i + K}$$



a)

$$J_1 = EI_{GB} / L_{GB}$$

$$J_2 = EI_{BH} / L_{BH}$$

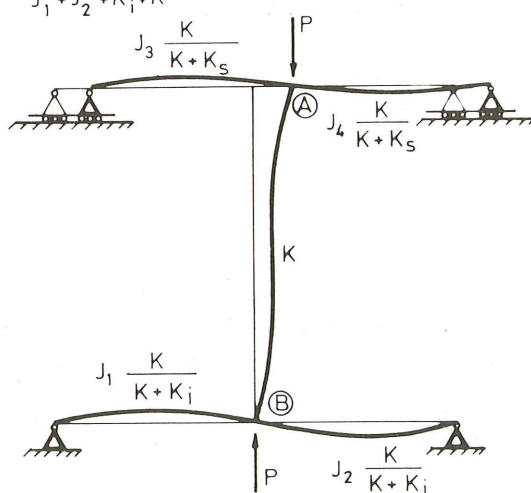
$$J_3 = EI_{EA} / L_{EA}$$

$$J_4 = EI_{AF} / L_{AF}$$

$$K = EI_{AB} / L_{AB}$$

$$K_s = EI_{AC} / L_{AC}$$

$$K_i = EI_{BD} / L_{BD}$$



b)

Figura 6



Con estas simplificaciones, la determinación de la longitud de pandeo del pilar AB se reduce a estudiar la estabilidad de la subestructura de la figura 6b.

Para ello podemos aplicar cualquiera de los dos métodos analíticos que conocemos. El de bifurcación de equilibrio o el de perturbación de equilibrio. Ambos métodos conducen a la misma ecuación básica:

$$\left( S + 6 \frac{G_i}{1 - G_i} \right) \left( S + 6 \frac{G_s}{1 - G_s} \right) - \\ - S^2 C^2 + m s (1 + C) \left( S C - S - 3 \frac{G_i}{1 - G_i} - 3 \frac{G_s}{1 - G_s} \right) = 0 \quad (V)$$

donde:

$$C = \frac{(1 - L_{AB} \sqrt{P/EI_{AB}} \cot L_{AB} \sqrt{P/EI_{AB}}) (L_{AB}/2) \sqrt{P/EI_{AB}}}{\operatorname{tg} \frac{L_{AB}}{2} \sqrt{P/EI_{AB}} - \frac{L_{AB}}{2} \sqrt{P/EI_{AB}}}$$

$$S = \frac{L_{AB} \sqrt{P/EI_{AB}} - \operatorname{sen} L_{AB} \sqrt{P/EI_{AB}}}{\operatorname{sen} L_{AB} \sqrt{P/EI_{AB}} - L_{AB} \sqrt{P/EI_{AB}} \cos L_{AB} \sqrt{P/EI_{AB}}}$$

$$m = \frac{2 S (1 + C)}{2 S (1 + C) - P L_{AB}^2 / EI_{AB}}$$

$$G_s = \frac{J_3 + J_4}{J_3 + J_4 + K_s + K}$$

$$G_i = \frac{J_1 + J_2}{J_1 + J_2 + K_i + K}$$

$$\rho = \frac{P L_{AB}^2}{\pi^2 EI_{AB}}$$

$$\beta = \sqrt{1/\rho}$$

La expresión anterior es una ecuación trascendente, que hemos resuelto por tanteos en función de la variable  $\rho$ , obteniendo una tabla de coeficientes  $\beta$  para pilares de estructuras aporticadas sin recuadros arriostrados (tabla 1).

La comparación de esta tabla con la propuesta en el artículo 3.4.4. de la norma, MV 103-1972, nos permite detectar la existencia de ligeros errores en la norma española.

Las hipótesis simplificadoras, que han servido de base para el análisis anterior, sólo son correctas cuando se aplican a entramados del tipo de los representados en la figura 7. Es decir, cuando se aplican a entramados que puedan generarse por superposición de un marco único, rectangular y simétrico.

TABLA 1

| Grado de empotramiento en el nudo inferior: $G_i$ | Grado de empotramiento en el nudo superior: $G_s$ |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|---------------------------------------------------|---------------------------------------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
|                                                   | 0                                                 | 0,1  | 0,2  | 0,3  | 0,4  | 0,5  | 0,6  | 0,7  | 0,8  | 0,9  | 1    |
| 0                                                 | —                                                 | 4,27 | 3,18 | 2,73 | 2,48 | 2,33 | 2,22 | 2,14 | 2,08 | 2,04 | 2,00 |
| 0,1                                               | 4,27                                              | 2,87 | 2,38 | 2,13 | 1,98 | 1,87 | 1,80 | 2,75 | 2,71 | 1,67 | 1,65 |
| 0,2                                               | 3,18                                              | 2,38 | 2,04 | 1,84 | 1,72 | 1,63 | 1,57 | 1,53 | 1,49 | 1,47 | 1,44 |
| 0,3                                               | 2,73                                              | 2,13 | 1,84 | 1,67 | 1,56 | 1,49 | 1,43 | 1,39 | 1,36 | 1,33 | 1,31 |
| 0,4                                               | 2,48                                              | 1,98 | 1,72 | 1,56 | 1,46 | 1,39 | 1,33 | 1,30 | 1,27 | 1,24 | 1,22 |
| 0,5                                               | 2,33                                              | 1,87 | 1,63 | 1,49 | 1,39 | 1,32 | 1,27 | 1,23 | 1,20 | 1,18 | 1,16 |
| 0,6                                               | 2,22                                              | 1,80 | 1,57 | 1,43 | 1,33 | 1,27 | 1,22 | 1,18 | 1,15 | 1,13 | 1,11 |
| 0,7                                               | 2,14                                              | 1,75 | 1,53 | 1,39 | 1,30 | 1,26 | 1,18 | 1,14 | 1,11 | 1,09 | 1,07 |
| 0,8                                               | 2,08                                              | 1,71 | 1,49 | 1,36 | 1,27 | 1,20 | 1,15 | 1,11 | 1,08 | 1,06 | 1,04 |
| 0,9                                               | 2,04                                              | 1,67 | 1,47 | 1,33 | 1,24 | 1,18 | 1,13 | 1,09 | 1,06 | 1,04 | 1,02 |
| 1                                                 | 2,00                                              | 1,65 | 1,44 | 1,31 | 1,22 | 1,16 | 1,11 | 1,07 | 1,04 | 1,02 | 1,00 |

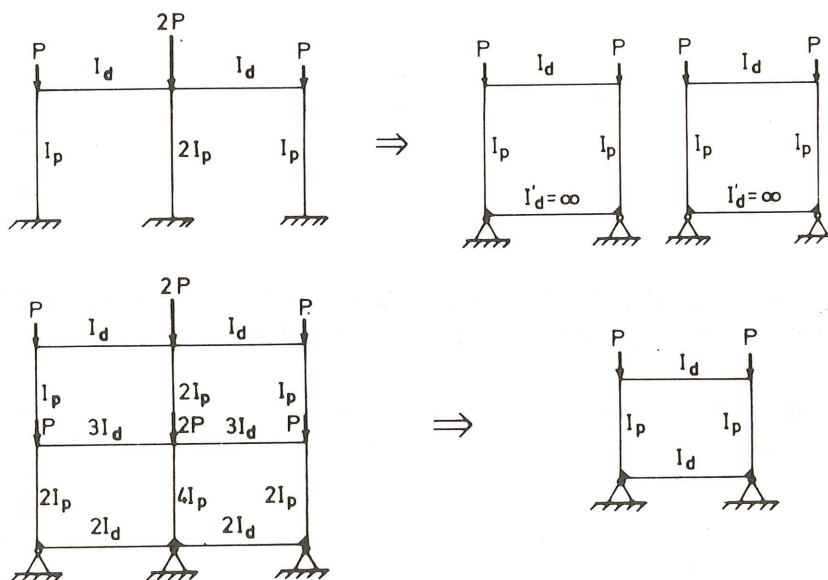


Figura 7

Sin embargo, en la práctica, los proyectistas se encuentran en muchos casos con entramados asimétricos. En estos casos, si se dimensionan los soportes con las longitudes de pandeo indicadas en las tablas o ábacos que proporcionan las normas de construcción vigentes en diversos países, se efectúa un diseño incorrecto, puesto que las normas citadas se basan en la hipótesis de que no existe coacción por parte de los pilares más rígidos para evitar el pandeo con desplazamiento lateral de los pilares más flexibles.

Para considerar la asimetría de los entramados reales se han desarrollado varios métodos aproximados, entre los que podemos citar los trabajos de Bowles (7), Leo Kirste (8), Zweig (9) y Kuang-Han Chu (10).



De todos los métodos aproximados que se han desarrollado hasta la fecha, el que proporciona mejores resultados es el propuesto en 1969 por Kuang-Han Chu y Hsue-Lien Chou, del Instituto Tecnológico de Illinois.

Estos investigadores, para considerar la asimetría de los entramados reales, estudiaron la estabilidad elástica de un marco asimétrico con esfuerzos axiales distintos en los dos soportes (Figura 8).

En su estudio deducen la ecuación del pandeo de este sistema estructural y obtienen, en forma de ábaco, el coeficiente corrector que debe emplearse para obtener las verdaderas longitudes de pandeo en los pilares pertenecientes a entramados asimétricos.

Este método sólo es correcto cuando se aplica a entramados que se pueden generar por superposición de un marco único, rectangular y asimétrico (figura 8-b).

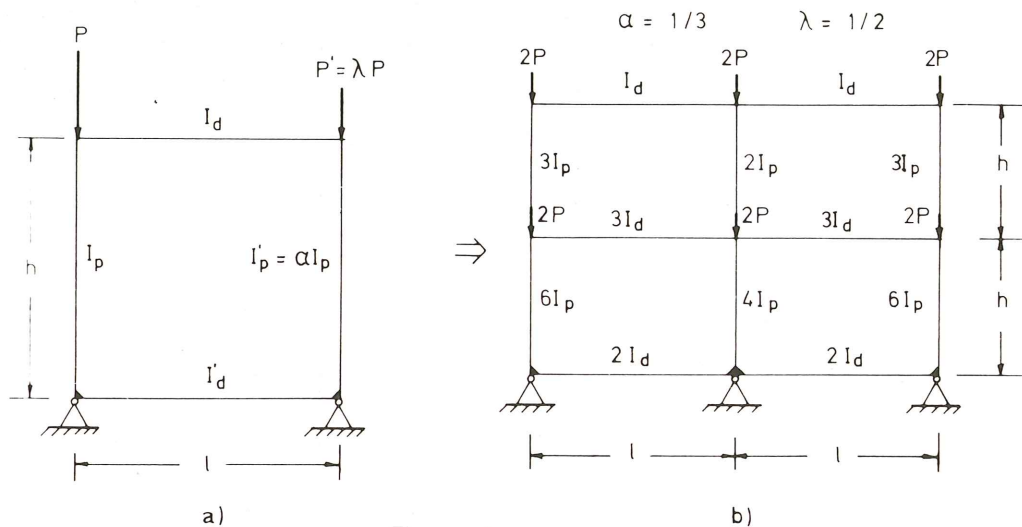


Figura 8

### METODO PROPUESTO PARA EL ESTUDIO APROXIMADO DEL PANDEO POR FLEXION EN ESTRUCTURAS APORTICADAS PLANAS DE UNA ALTURA

El método que hemos desarrollado parte de la hipótesis de que los puntos de inflexión en la elástica de los dinteles, en el instante del pandeo con desplazamiento lateral, están en el centro de los vanos.

De acuerdo con esta hipótesis, el entramado de la figura 9-a se puede descomponer en las subestructuras de la figura 9-b.

Para analizar la estabilidad elástica de este sistema empleamos el método de perturbación de equilibrio. Este método, como hemos visto, consiste en estudiar el comportamiento del sistema estructural frente a una fuerza perturbadora constante, a medida que crecen de forma paulatina las cargas verticales.

La fuerza perturbadora, que debe excitar el primer modo de pandeo es, en nuestro caso, la carga horizontal,  $H$ , que actúa al nivel del dintel.

Cuando se alcanza la carga crítica, la rigidez del entramado con respecto a la fuerza perturbadora debe anularse.

La rigidez del entramado se obtiene sumando las rigideces de cada una de las sub-

estructuras en que lo hemos descompuesto. Se puede demostrar (11) que la rigidez proporcionada por cada una de estas subestructuras viene definida, con suficiente exactitud, por la expresión:

$$\text{Rig}_i = \frac{E I_i}{h_i^3} (A_i - B_i \rho_i) \quad (\text{VI})$$

Donde:

$E$  = Módulo de elasticidad del material estructural.

$I_i$  = Momento de inercia del soporte, medido con respecto al eje central y principal normal al plano en el que tiene lugar el pandeo.

$h_i$  = Altura del soporte.

$\rho_i$  = Es el cociente  $(P/P_{Cl})_i$

$P$  = Esfuerzo axial que actúa sobre el pilar.

$P_{Cl}$  = Carga crítica del pilar en el supuesto de que estuviera biarticulado en sus extremos.

A y B son dos coeficientes que dependen del grado de vinculación del soporte al resto de la estructura y que hemos tabulado (tabla 2), en función de los grados de empotramiento del soporte en sus extremos.

En la tabla 2 se puede consultar también el campo de validez del ajuste lineal propuesto. Dentro de este campo de validez, el error máximo que se comete al estimar la rigidez de la subestructura, empleando la expresión VI, es inferior al 3,4 por 100.

TABLA 2

| COEFICIENTE A = $\frac{G (G_i + G_s + 4 G_i G_s)}{1 + G_i + G_s}$ |                                                  |       |       |       |       |       |       |       |        |        |        |
|-------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|--------|--------|
| Grado de empotramiento en el nudo inferior: $G_i$                 | Grado de empotramiento en el nudo superior $G_s$ |       |       |       |       |       |       |       |        |        |        |
|                                                                   | 0                                                | 0,1   | 0,2   | 0,3   | 0,4   | 0,5   | 0,6   | 0,7   | 0,8    | 0,9    | 1      |
| 0                                                                 | 0                                                | 0,545 | 1     | 1,385 | 1,714 | 2     | 2,25  | 2,471 | 2,667  | 2,842  | 3      |
| 0,1                                                               | 0,545                                            | 1,2   | 1,754 | 2,229 | 2,64  | 3     | 3,318 | 3,6   | 3,853  | 4,08   | 4,286  |
| 0,2                                                               | 1                                                | 1,754 | 2,4   | 2,96  | 3,45  | 3,882 | 4,267 | 4,610 | 4,92   | 5,2    | 5,455  |
| 0,3                                                               | 1,385                                            | 2,229 | 2,96  | 3,6   | 4,165 | 4,667 | 5,116 | 5,52  | 5,886  | 6,218  | 6,522  |
| 0,4                                                               | 1,714                                            | 2,64  | 3,45  | 4,165 | 4,8   | 5,368 | 5,88  | 6,343 | 6,764  | 7,148  | 7,5    |
| 0,5                                                               | 2                                                | 3     | 3,882 | 4,667 | 5,368 | 6     | 6,571 | 7,091 | 7,565  | 8      | 8,4    |
| 0,6                                                               | 2,25                                             | 3,318 | 4,267 | 5,116 | 5,88  | 6,571 | 7,2   | 7,774 | 8,3    | 8,784  | 9,231  |
| 0,7                                                               | 2,471                                            | 3,6   | 4,61  | 5,52  | 6,343 | 7,091 | 7,774 | 8,4   | 8,976  | 9,508  | 10     |
| 0,8                                                               | 2,667                                            | 3,853 | 4,92  | 5,886 | 6,764 | 7,565 | 8,3   | 8,976 | 9,6    | 10,178 | 10,714 |
| 0,9                                                               | 2,842                                            | 4,08  | 5,2   | 6,218 | 7,148 | 8     | 8,784 | 9,508 | 10,178 | 10,8   | 11,379 |
| 1                                                                 | 3                                                | 4,286 | 5,455 | 6,522 | 7,5   | 8,4   | 9,231 | 10    | 10,714 | 11,379 | 12     |



TABLA 2. Continuación

| COEFICIENTE B                                     |                                                  |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
|---------------------------------------------------|--------------------------------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| Grado de empotramiento en el nudo inferior: $G_i$ | Grado de empotramiento en el nudo superior $G_s$ |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
|                                                   | 0                                                | 0,1    | 0,2    | 0,3    | 0,4    | 0,5    | 0,6    | 0,7    | 0,8    | 0,9    | 1      |
| 0                                                 | 9,870                                            | 9,936  | 10,106 | 10,327 | 10,578 | 10,839 | 11,089 | 11,338 | 11,570 | 11,793 | 12     |
| 0,1                                               | 9,936                                            | 9,891  | 9,960  | 10,111 | 10,308 | 10,536 | 10,761 | 10,987 | 11,213 | 11,42  | 11,625 |
| 0,2                                               | 10,106                                           | 9,960  | 9,949  | 10,032 | 10,183 | 10,366 | 10,577 | 10,765 | 10,982 | 11,191 | 11,389 |
| 0,3                                               | 10,327                                           | 10,111 | 10,064 | 10,064 | 10,161 | 10,305 | 10,476 | 10,665 | 10,854 | 11,049 | 11,243 |
| 0,4                                               | 10,578                                           | 10,308 | 10,161 | 10,183 | 10,218 | 10,328 | 10,479 | 10,637 | 10,823 | 11,008 | 11,2   |
| 0,5                                               | 10,839                                           | 10,536 | 10,305 | 10,366 | 10,305 | 10,407 | 10,532 | 10,693 | 10,876 | 11,045 | 11,245 |
| 0,6                                               | 11,089                                           | 10,761 | 10,476 | 10,577 | 10,476 | 10,479 | 10,646 | 10,806 | 10,958 | 11,137 | 11,332 |
| 0,7                                               | 11,338                                           | 10,987 | 10,665 | 10,765 | 10,665 | 10,637 | 10,806 | 10,936 | 11,099 | 11,275 | 11,449 |
| 0,8                                               | 11,570                                           | 11,213 | 10,854 | 10,982 | 10,854 | 10,823 | 10,958 | 11,099 | 11,260 | 11,436 | 11,611 |
| 0,9                                               | 11,793                                           | 11,42  | 11,049 | 11,191 | 11,049 | 11,008 | 11,137 | 11,275 | 11,436 | 11,614 | 11,793 |
| 1                                                 | 12                                               | 11,625 | 11,243 | 11,389 | 11,243 | 11,2   | 11,332 | 11,449 | 11,611 | 11,793 | 12     |

| CAMPO DE VALIDEZ                                  |                                                  |                |                |                |                |                |                |                |                |                |                |
|---------------------------------------------------|--------------------------------------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| Grado de empotramiento en el nudo inferior: $G_i$ | Grado de empotramiento en el nudo superior $G_s$ |                |                |                |                |                |                |                |                |                |                |
|                                                   | 0                                                | 0,1            | 0,2            | 0,3            | 0,4            | 0,5            | 0,6            | 0,7            | 0,8            | 0,9            | 1              |
| 0                                                 | $\beta = 1$                                      | $\beta > 3,02$ | $\beta > 2,25$ | $\beta > 1,93$ | $\beta > 1,76$ | $\beta > 1,65$ | $\beta > 1,57$ | $\beta > 1,51$ | $\beta > 1,47$ | $\beta > 1,44$ | $\beta > 1,41$ |
| 0,1                                               |                                                  | $\beta > 2,03$ | $\beta > 1,69$ | $\beta > 1,51$ | $\beta > 1,40$ | $\beta > 1,33$ | $\beta > 1,27$ | $\beta > 1,24$ | $\beta > 1,21$ | $\beta > 1,18$ | $\beta > 1,16$ |
| 0,2                                               |                                                  |                | $\beta > 1,44$ | $\beta > 1,30$ | $\beta > 1,20$ | $\beta > 1,16$ | $\beta > 1,11$ | $\beta > 1,08$ | $\beta > 1,06$ | $\beta > 1,04$ | $\beta > 1,02$ |
| 0,3                                               |                                                  |                |                | $\beta > 1,18$ | $\beta > 1,10$ | $\beta > 1,05$ | $\beta > 1,01$ | $\beta > 0,98$ | $\beta > 0,96$ | $\beta > 0,94$ | $\beta > 0,93$ |
| 0,4                                               |                                                  |                |                |                | $\beta > 1,03$ | $\beta > 0,98$ | $\beta > 0,94$ | $\beta > 0,92$ | $\beta > 0,89$ | $\beta > 0,88$ | $\beta > 0,86$ |
| 0,5                                               |                                                  |                |                |                |                | $\beta > 0,93$ | $\beta > 0,90$ | $\beta > 0,87$ | $\beta > 0,85$ | $\beta > 0,83$ | $\beta > 0,82$ |
| 0,6                                               |                                                  |                |                |                |                |                | $\beta > 0,86$ | $\beta > 0,83$ | $\beta > 0,81$ | $\beta > 0,80$ | $\beta > 0,78$ |
| 0,7                                               |                                                  |                |                |                |                |                |                | $\beta > 0,81$ | $\beta > 0,78$ | $\beta > 0,77$ | $\beta > 0,76$ |
| 0,8                                               |                                                  |                |                |                |                |                |                |                | $\beta > 0,77$ | $\beta > 0,75$ | $\beta > 0,74$ |
| 0,9                                               |                                                  |                |                |                |                |                |                |                |                | $\beta > 0,73$ | $\beta > 0,72$ |
| 1                                                 |                                                  |                |                |                |                |                |                |                |                |                | $\beta > 0,70$ |

Así, pues, la condición de pandeo masivo de todo el entramado:

$$Rig = \sum_i Rig_i = \sum_i \frac{EI_i}{h_i^3} (A_i - B_i \rho_i) = 0 \quad (VII)$$

se convierte en una ecuación lineal de primer grado, cuya resolución es elemental.

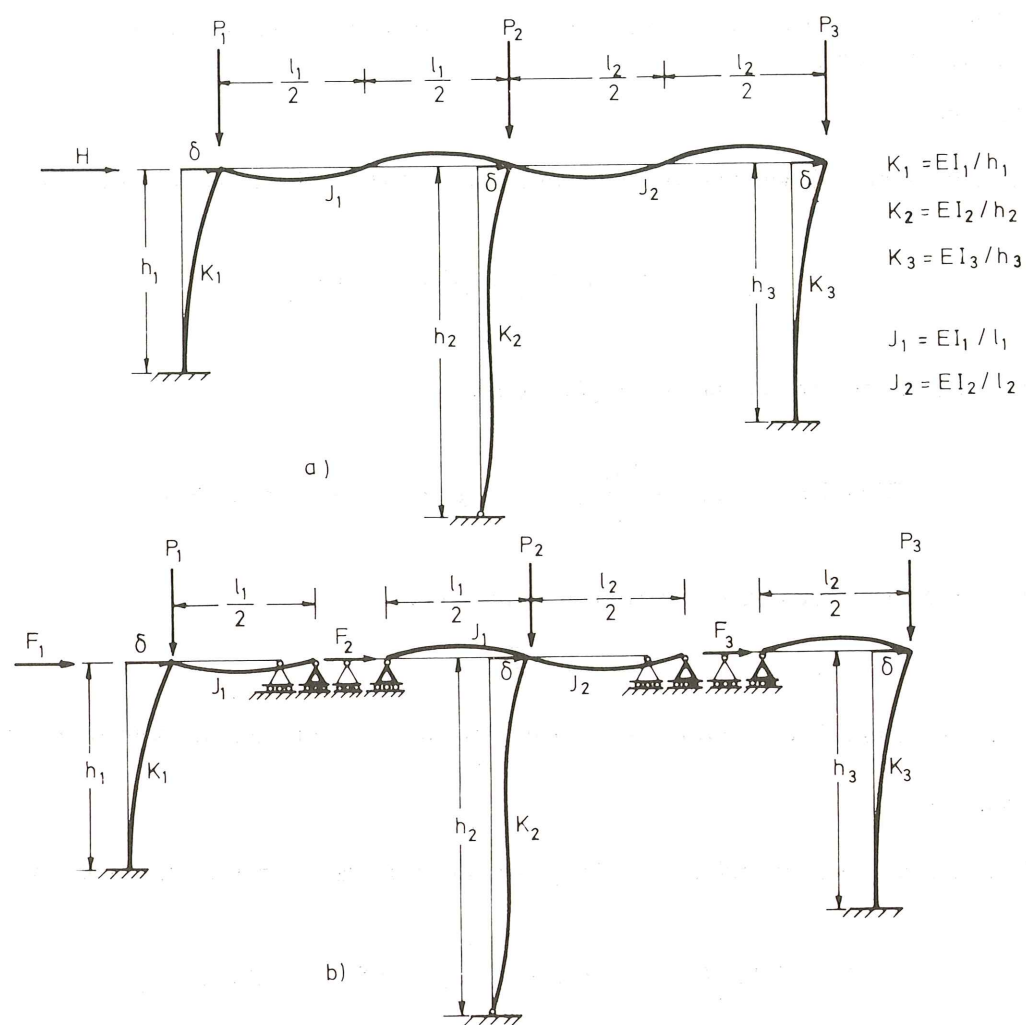
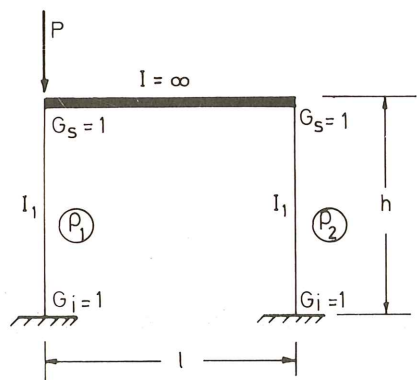


Figura 9



$$\rho_1 = \frac{P}{\pi^2 EI_1 / h^2}$$

$$\rho_2 = 0$$

Figura 10



*Ejemplos numéricos:* A modo de ejemplo, vamos a aplicar el método expuesto a algunos pórticos sencillos.

*Ejemplo 1.*

Las condiciones de vinculación de los pilares de la figura 10, en sus extremos, son:

$$G_s = G_i = 1 \rightarrow \text{Rig}_i = \frac{EI_i}{h_i^3} (12 - 12 \rho_i)$$

La ecuación de pandeo masivo del pórtico es:

$$\text{Rig} = \text{Rig}_1 + \text{Rig}_2 = \frac{EI_1}{h^3} (12 - 12 \rho_1 + 12) = 0 \rightarrow \rho_1 = 0,5$$

El coeficiente  $\beta$ , de pandeo del soporte comprimido, es:

$$\beta = \sqrt{1/\rho_1} = 1,41$$

Valor que coincide con el obtenido por Alfred Zweig y Albert Kahn. (Ver referencia 9).

*Ejemplo 2.*

Las condiciones de vinculación de los pilares de la figura 11, en sus extremos, son:

$$G_s = 0,2, \quad G_i = 1 \rightarrow \text{Rig}_i = \frac{EI_i}{h_i^3} (5,455 - 11,389 \rho_i)$$

La ecuación de pandeo masivo de todo el entramado, es:

$$R_{ig} = \frac{EI_1}{h^3} [2 (5,455 - 11,389 \rho) + 2 (5,455 - 11,389 \cdot 2,5 \rho)] = 0$$

Luego  $\rho = 0,27$

El coeficiente  $\beta$ , de pandeo de los soportes, es:

$$\beta_1 = \beta_3 = \sqrt{1/\rho} = 1,91$$

$$\beta_2 = \sqrt{1/2,5 \cdot \rho} = 1,21$$

Valores que pueden deducirse a partir de las fórmulas contenidas en la tabla 3.2 de la norma MV 103-1972. (Véase DIN 4114).

Obsérvese que la aplicación del método de Julian y Lawrence, (tabla 3.4 de la norma MV 103-1972), a los pórticos que acabamos de analizar conduce a resultados bastantes incorrectos.

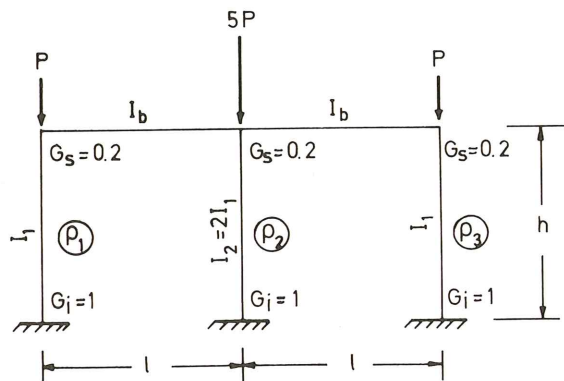
a) Pórtico de la figura 10:

$$G_s = G_i = 1 \rightarrow \beta = 1 \quad (\text{Valor correcto: } 1,41)$$

b) Pórtico de la figura 11:

$$G_s = 0,2, \quad G_i = 1 \rightarrow \beta_1 = \beta_3 = 1,43 \quad (\text{valor correcto: } 1,91)$$

$$\beta_2 = 1,43 \quad (\text{valor correcto: } 1,21)$$



$$\lambda = \frac{I_b h}{I_1 l} = 0.25$$

$$\rho_1 = \rho_3 = \frac{P}{\pi^2 E I_1 / h^2} = \rho$$

$$\rho_2 = \frac{5P}{\pi^2 E I_2 / h^2} = 2.5 \rho$$

Figura 11

## CONCLUSIONES

A continuación comparamos entre sí los tres métodos aproximados que estudiamos en este artículo:

- 1°.— El método de Julian y Lawrence.
- 2°.— El método de Kuang-Han Chow.
- 3°.— El método ideado por nosotros.

El primero de estos métodos se funda en el estudio del pandeo de un marco rectangular y simétrico. Por consiguiente, sólo es correcto cuando se aplica a entramados que pueden generarse por superposición de un marco único, rectangular y simétrico. (Figura 7).

El método de Kuang-Han Chow, que aparece diez años después, es una mejora del anterior. Se basa en el estudio del pandeo del marco asimétrico. En consecuencia, sólo puede aplicarse a entramados que puedan generarse por superposición de un marco único, rectangular y asimétrico. (Figura 8).

El fundamento de nuestro método radica en el estudio del pandeo de toda una planta. La diferencia de su fundamento es importante. Mientras que los autores de los métodos anteriores estudian únicamente el pandeo de un marco, nosotros estudiamos el pandeo masivo de un conjunto de marcos que forman una planta.

Por consiguiente, el método que exponemos es correcto cuando se aplica a pórticos de una sola planta, y lo será, también, cuando se aplique a entramados de varias plantas que puedan generarse por superposición de una planta tipo única.

En nuestro método se tiene en cuenta la coacción que proporcionan los pilares más rígidos para evitar el pandeo con desplazamiento transversal de los soportes más flexibles. Cir-

cunstancia que no se ha tenido en cuenta en la preparación de la tabla 3.4 de la norma básica española, MV 103-1972, "Cálculo de las estructuras de acero laminado en edificaciones".

Consecuentemente, aplicando esta tabla pueden cometerse errores importantes en la estimación de las longitudes de pandeo de los soportes. Errores que aumentan a medida que aumenta la asimetría del sistema estructural objeto del análisis.

## REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- (1) Merchan, W. "The failure load rigid jointed frameworks as influenced by stability" *The Structural Engineer* 32,84 (1954).
- (2) A. Jennings, "An elastic-plastic analysis by computer for framed structures loaded up to collapse". *The Structural Engineer* 12,43 (1965).
- (3) K. I. Majid, "Matrix methods of analysis and design by computers: Non-linear structures". Butterworths (1972).
- (4) Salem, A.H., "Frame instability in the plastic range" Manchester-College of Technology (1958).
- (5) R.K. Livesley, "Métodos matriciales para cálculo de estructuras" Editorial Blume (1970).
- (6) James, B.W. "Principal effects of axial load by moment distribution analysis of rigid structures" National Advisory Committee for Aeronautics, Technical Note No. 534.
- (7) Bowles, R.E. "Critical loads of tall building frames", *Structural Engineer* 36,187.
- (8) Leo Kirste, "Simplified calculus of the stability of multystory frames" *International Association for Bridge and Structural Engineering*, Vol 16.
- (9) Alfred Zweig and Albert Kahn, "Buckling analysis of one-story frames". A.S.C.E. Sept. 1968.
- (10) Kuang-Han Chu and Hsueh. Lien Chow, "Effective column length in unsymmetrical frames". *International Association for Bridge and Structural Engineering*, Vol 29/1.
- (11) J. R. Atienza, "Método para el estudio del pandeo por flexión en el plano medio de entramados de una altura" Tesis dirigida por D. Juan Batanero García Geraldo (Valencia - 1976).

## Horizonte 2000 para la industria del hormigón preparado

Este es el título del tema general del VIº Congreso ERMCO, que se celebrará en Bruselas del 22 al 26 de septiembre de 1980. Como su título indica los temas principales a tratar en esta convención son los relativos al porvenir del Hormigón Preparado en el futuro, sin olvidar, dentro del programa otros interesantes puntos relativos a su tecnología, así como los aspectos económicos y comerciales.

La Asociación Belga del Hormigón Preparado nos comunica que los interesados en recibir una amplia información, en español, sobre este Congreso pueden dirigirse a la Secretaría del VIº Congreso ERMCO, A.P.B.P. — B.V.S.B., Mechelsesteenweg, 363. B — 1950 Kraai-nem — Belgique.



# **Comprobación y dimensionamiento de secciones de hormigón armado y pretensado de forma poligonal utilizando una calculadora programable HP 41 C**

Hugo Corres Peiretti, Ing. de Caminos  
Alfonso Recuero Fornies, Dr. Ing. Caminos  
Instituto Eduardo Torroja

## **RESUMEN**

Se presenta un sistema de programas para la comprobación, con una calculadora HP 41C, del estado límite último de secciones poligonales de hormigón armado y pretensado sometidas a solicitaciones normales, de acuerdo con las instrucciones EH73 y EP77. Se consideran distintos tipos de aceros para las armaduras activas y pasivas.

El sistema constituye una ayuda eficaz para el dimensionamiento, ya que permite modificar la sección de hormigón, así como la cuantía y posición de las armaduras y las características de los materiales.

## **1. INTRODUCCION**

El creciente aumento de posibilidades de las calculadoras programables de bolsillo hace cada día más interesante su uso por parte de los profesionales, tanto en oficina como en obra; pues permiten ejecutar fácilmente procesos de cálculos largos y complicados.

No obstante, el obtener el máximo rendimiento posible de este tipo de máquinas exige una programación cuidadosa y un perfecto conocimiento de todas sus posibilidades, lo cual no está en muchas ocasiones al alcance de cualquier usuario.

Resulta de gran interés entonces, la difusión de aquellas aplicaciones que hayan sido debidamente comprobadas y depuradas, y puedan resultar de interés general.

Normalmente para lograr la máxima eficacia en la utilización de las posibilidades de este tipo de calculadoras es necesario emplear ciertas técnicas de programación que hacen difícil la interpretación de los programas. Por tal motivo, en este trabajo, los autores han considerado preferible sacrificar la mejor utilización de la memoria a cambio de conseguir una mayor facilidad en la comprensión de los listados.

El sistema de programas que aquí se describe ha tenido su origen en los trabajos preliminares de publicaciones, que los autores preparan en colaboración con Rafael Fernández Sánchez, para el cálculo de estructuras de hormigón armado, pretensado y mixtas, y que serán editadas por el Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos con la colaboración de la firma Hewlett Packard. Este sistema permite la comprobación del estado límite último de secciones de forma poligonal de hormigón armado y pretensado sometidas a solicitaciones normales. En esencia, obtiene puntos del diagrama de interacción (N, M) de la sección, entrando con la profundidad de la fibra neutra o con un valor del axil N.

Permite, asimismo, la modificación de la sección de hormigón, así como la de las armaduras, o las características de los materiales, constituyendo de este modo una ayuda eficaz para el dimensionamiento de secciones.

## 2. HIPOTESIS DE CALCULO

Las hipótesis de cálculo adoptadas para la realización del presente sistema de programas están contenidas en las Instrucciones EH-73 y EP-77 y son las siguientes:

- 1 — Las deformaciones del hormigón siguen una ley plana.
- 2 — Bajo las solicitaciones las armaduras tienen la misma deformación que el hormigón que las envuelve.
- 3 — Como diagrama tensión-deformación del hormigón, se adopta el parábola-rectángulo de la figura 1. La máxima deformación del hormigón es  $-3,5\text{‰}$  para el caso de hormigón armado (EH-73, 28.6.a) y  $-3\text{‰}$  para el caso de hormigón pretensado (EP-77, 35.6.a).

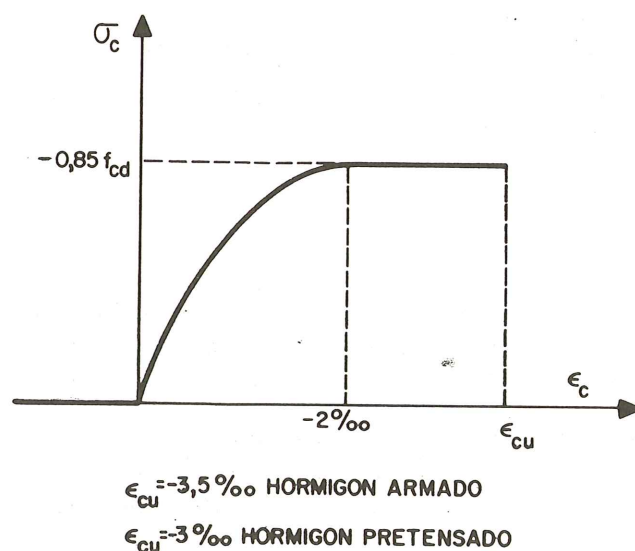


Fig. 1

- 4 — El acero empleado en las armaduras pasivas puede ser de dureza natural o deformado en frío. Para el primer caso se adopta como diagrama tensión-deformación el indicado en la figura 2a) y para el segundo el indicado en la figura 2b) (EH-73, 27.3, EP-77, 34.4).

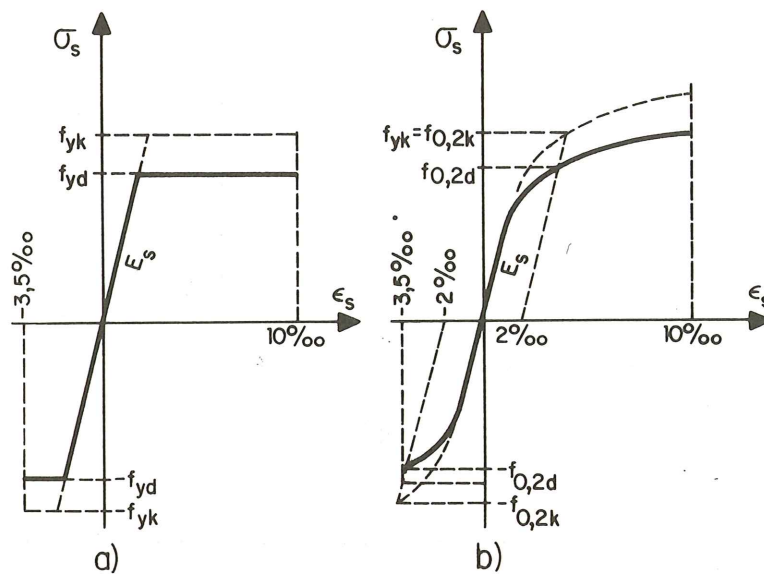


Fig. 2

- 5 — Como diagrama tensión-deformación para el acero de las armaduras activas se adopta el indicado en la figura 3 (EP-77, 34.7).

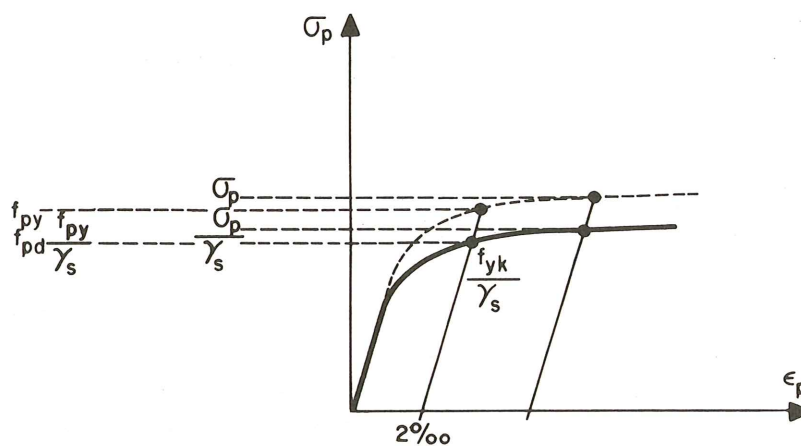


Fig. 3

- 6 — En el agotamiento de la sección, los dominios de deformación relativos al acero y el hormigón son para el caso de hormigón armado los indicados en la figura 4 (EH-73, 32.2), y para el caso de hormigón pretensado los indicados en la figura 5 (EP-73, 47.3).



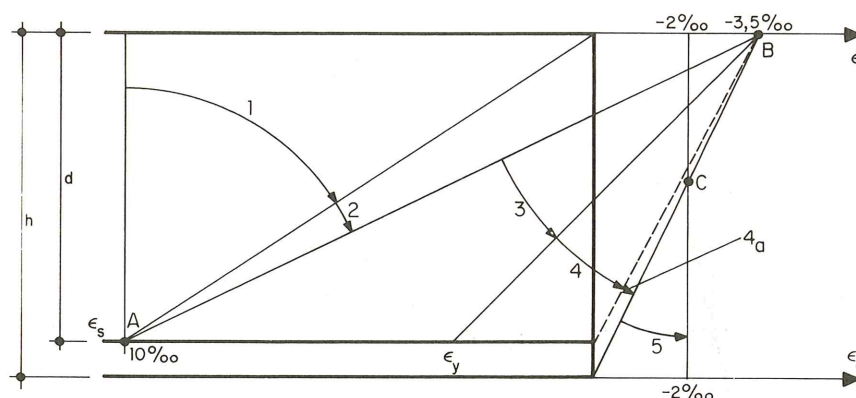


Fig.4

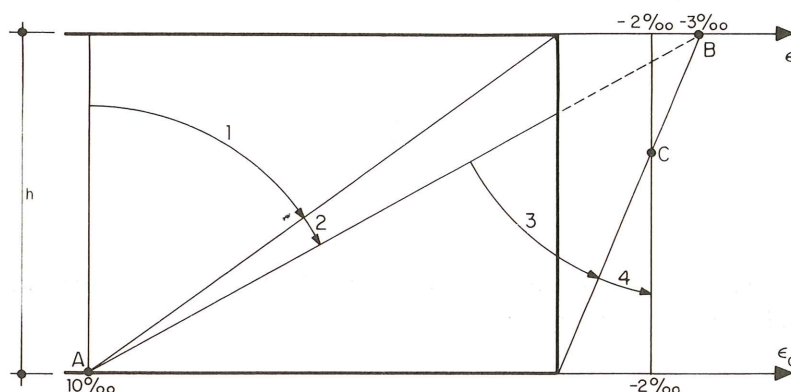


Fig.5

### 3. DATOS PARA LA DESCRIPCION DE LA SECCION A ANALIZAR

#### *Hormigón:*

La sección de hormigón puede ser de forma poligonal. Su descripción se realiza mediante tramos, en cada uno de los cuales la anchura de la sección varía linealmente con la profundidad. El número máximo de tramos que se admite es cinco.

A los efectos del programa, la sección de hormigón se representa en forma compactada "justificada" a la izquierda, tal como indica el ejemplo de la figura 6. Dada una sección cualquiera, con o sin huecos, debe considerarse como anchura de la sección a una profundidad  $x$ , la suma de todas las anchuras de las distintas partes de la sección a esa profundidad.

Como datos del programa, deberán darse entonces, el número de tramos de que consta, y para cada uno de los tramos, descritos en sentido creciente de profundidades, su altura [cm], anchura de la parte superior [cm] y anchura de la parte inferior [cm].

Además, debe proporcionarse la resistencia de cálculo del hormigón ( $\text{Mp/cm}^2$ ) multiplicada por 0,85.

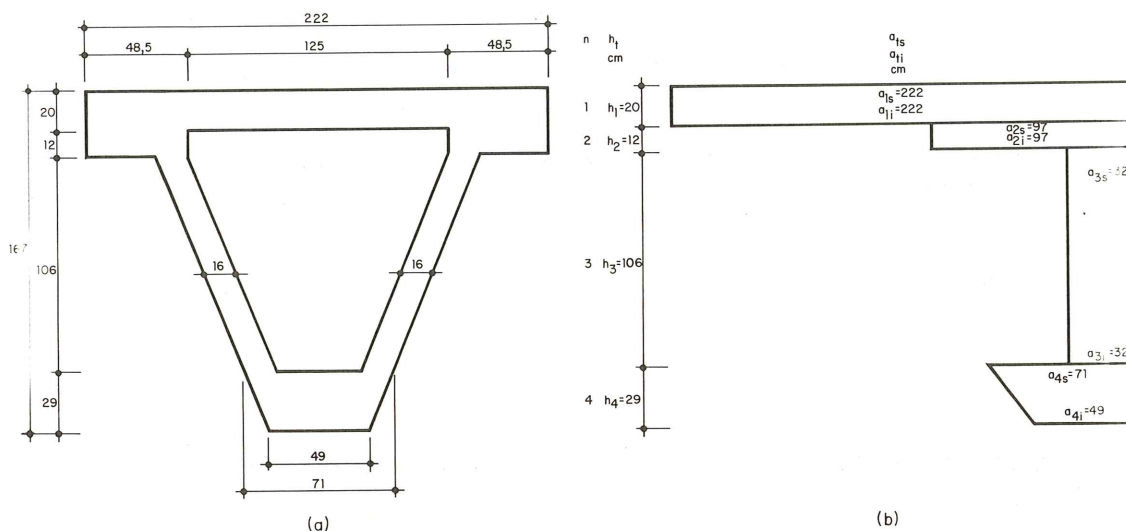


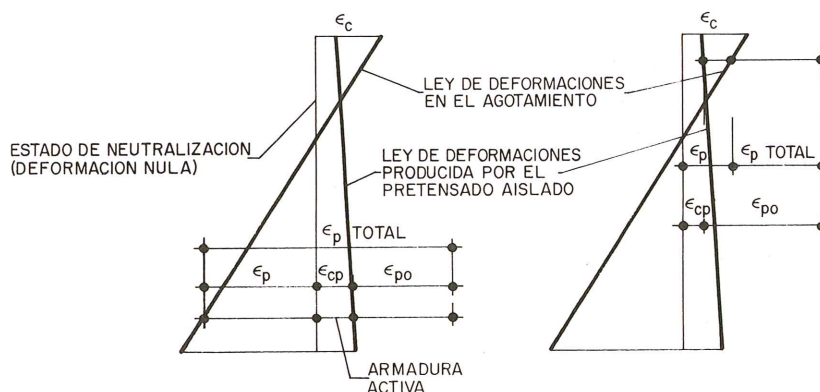
Fig. 6

### Armadura pasiva:

Se describe por capas, indicando primeramente el número de capas (entre 0 y 5). En caso de no haber armaduras pasivas no será preciso dar ningún dato adicional.

Si existen armaduras pasivas deberá indicarse además, en el sentido creciente de profundidades, la profundidad [cm] y el área de la sección de acero [cm<sup>2</sup>] de cada capa.

Asimismo será necesario indicar el tipo de acero, si es de dureza natural o deformado en frío, su resistencia de cálculo y módulo de elasticidad [Mp/cm<sup>2</sup>].



$\epsilon_{cp}$ : DEFORMACION DEL HORMIGON BAJO ACCION AISLADA DEL PRETENSADO TOTAL EN LA FASE ANALIZADA, CONSIDERANDO LAS PERDIDAS CALCULADAS EN LA SECCION HOMOGENIZADA.

$\epsilon_{po}$ : DEFORMACION DE LA ARMADURA ACTIVA ADHERENTE CONSIDERADA EN LA SITUACION ANTERIORMENTE DESCRITA.

$\epsilon_p$ : DEFORMACION DE LA ARMADURA ACTIVA ADHERENTE A PARTIR DEL ESTADO DE NEUTRALIZACION.

$\epsilon_n = \epsilon_{po} + \epsilon_{cp}$ : DEFORMACION DE NEUTRALIZACION.

Fig. 7

#### *Armadura activa:*

Se describe por capas indicando primeramente el número de capas (entre 0 y 5). En el caso de que el número de capas sea 0 no será preciso dar ningún otro dato.

Si existen armaduras activas deberán describirse indicando, para cada capa, la profundidad [cm], el área de la sección de acero [ $\text{cm}^2$ ] y la deformación de neutralización [‰] (figura 7).

Asimismo se indicará la resistencia de cálculo y el módulo de elasticidad del acero utilizado [ $\text{Mp/cm}^2$ ].

#### **4. DESCRIPCION DE LOS MODULOS DEL SISTEMA Y METODOS NUMERICOS EMPLEADOS**

El sistema consta de ocho módulos, tres de los cuales actúan como programas y cinco como subrutinas. Los programas son los módulos denominados INICIA, DIAGNM, NCOMP. Las subrutinas son los módulos denominados INTEG, AB, ACE, MN y SALIDA. El listado de todos estos módulos figura en el Apéndice de este artículo.

El programa INICIA hace uso de la subrutina INTEG, los programas DIAGNM y NCOMP, hacen uso de las subrutinas MN y SALIDA y a su vez la subrutina MN hace uso de las subrutinas AB, ACE, INTEG.

El sistema puede ser soportado por una calculadora programable HP41C dotada de 191 registros, equivalentes a la configuración básica más dos módulos de ampliación RAM de 64 registros cada uno, un lector de tarjetas y una impresora.

De los 191 registros disponibles se utilizan 79 (0-78), como registros de trabajo, quedando los restantes como registros de memoria de programas.

Todos los módulos no pueden estar almacenados simultáneamente con esta configuración de memoria. Por ello, una vez ejecutado el programa INICIA, que sólo se usa una vez para cada sección, se purga dejando en memoria el módulo INTEG y se introducen todos los demás, pudiendo ejecutarse entonces, alternativamente, los programas DIAGNM y NCOMP a discreción del usuario.

Las funciones realizadas por cada uno de los módulos citados son las siguientes:

##### *INICIA*

Este programa utiliza los datos de descripción de la sección para determinar una serie de parámetros y constantes que han de utilizarse en los otros dos programas.

Modifica los registros que contienen inicialmente el número de tramos de la sección de hormigón y el número de capas de armaduras activas y pasivas almacenando en su lugar índices auxiliares.

Modifica los datos de descripción de la sección de hormigón situando, para cada tramo, en lugar de la altura del tramo la profundidad a la que acaba el tramo, en lugar de la anchura en la parte superior del tramo la pendiente de la ecuación de la recta que define el contorno



en dicho tramo y en lugar de la anchura en la parte inferior del tramo la ordenada en el origen de la recta anterior.

Determina la profundidad del primer pivote, que será el canto total si existen armaduras activas o la profundidad de la armadura pasiva más profunda en caso contrario; la profundidad de la fibra neutra X1 para la que el plano de deformaciones pasa simultáneamente por el primer y segundo pivotes y la profundidad X2 a la que se encuentra el tercer pivote.

Define la deformación máxima para el hormigón en flexión que será  $-3,5\text{‰}$  si no existen armaduras activas o  $-3,0\text{‰}$  en caso contrario.

Además calcula el canto total y la profundidad del centro de gravedad de la sección utilizando la subrutina INTEG.

### DIAGNM

Este módulo tomando como dato, que debe figurar en pantalla, la profundidad de la fibra neutra  $x$  que se elija, calcula el axil  $N$  y momento flector  $M$  que agotan la sección utilizando para ello la subrutina MN. Escribe estos resultados por medio de la impresora utilizando para ello la subrutina SALIDA.

### NCOMP

Este módulo toma como dato el axil  $N$ , que debe figurar en pantalla y calcula el momento flector  $M$  que conjuntamente con el  $N$  dado agotan la sección. Utiliza para ello un procedimiento "regula falsi" adoptando como puntos iniciales para la iteración las profundidades de la fibra neutra correspondientes a  $x = 0$  y  $x = X1$ , deteniendo el proceso cuando el axil resultante difiera del dato en menos de  $0,01$  Mp. Para calcular el  $N$  correspondiente a cada profundidad de la fibra neutra probada utiliza la subrutina MN.

Una vez encontrada la solución escribe los resultados por medio de la impresora utilizando para ello la subrutina SALIDA.

### INTEG

Este módulo calcula la resultante de las tensiones del bloque de compresión del hormigón entre las profundidades  $a$  y  $b$  y su momento respecto a la fibra superior de la sección.

Para ello evalúa las integrales

$$\int_a^b P(x) Q(x) dx$$
$$\int_a^b P(x) Q(x) x dx$$

siendo  $P(x)$  un polinomio de primer grado que representa la ecuación del contorno de la sección de hormigón y  $Q(x)$  un polinomio de segundo grado que representa la tensión del hormigón correspondiente a una profundidad  $x$  cualquiera.

Ambas integrales son exactamente calculadas y sus resultados son acumulados en sendos registros.

#### *AB*

Este módulo permite determinar la ecuación de la recta que representa el plano de deformaciones de agotamiento que corresponde a una profundidad dada de la fibra neutra.

Para ello decide cuál de los tres pivotes debe utilizar y evalúa la pendiente y la ordenada al origen de la recta.

#### *ACE*

Este módulo determina para una deformación dada de un acero,  $\epsilon$ , la tensión,  $\sigma$ , que le corresponde.

El acero puede ser de dureza natural, deformado en frío o de pretensar.

En estos dos últimos casos, si la deformación corresponde a la zona de parábola de quinto grado del diagrama tensión-deformación, resuelve el problema utilizando el método iterativo de Newton-Raphson.

#### *MN*

Este módulo calcula para una profundidad dada de la fibra neutra el valor del axil  $N$  y momento flector  $M$ , respecto al centro de gravedad de la sección, que conjuntamente la agotan.

Comienza determinando los coeficientes de la recta que representa el plano de deformaciones de agotamiento utilizando para ello la subrutina *AB*.

A continuación, calcula y acumula la contribución de las armaduras al  $N$  y  $M$  respecto a la fibra superior de la sección, utilizando la subrutina *ACE* para determinar la tensión a la que está sometida cada capa de armadura.

Seguidamente calcula y acumula la resultante de las tensiones del hormigón y su momento respecto a la fibra superior de la sección utilizando para ello la subrutina *INTEG*.

Por último reduce el momento flector acumulado, que inicialmente estaba calculado respecto a la fibra superior de la sección, al centro de gravedad de la misma.

#### *SALIDA*

Este módulo toma de los registros en que están almacenados, la profundidad de la fibra neutra  $x$ , el axil  $N$  y el momento flector respecto al centro de gravedad de la sección  $M$  y los escribe por medio de la impresora junto con títulos adecuados para su identificación.

## 5. UTILIZACION DEL SISTEMA DE PROGRAMAS

### 5.1. Modo de utilización normal y resultados principales

El programa INICIA deberá ser cargado al principio junto con la subrutina INTEG y con el conjunto completo de datos de descripción de la sección.

Una vez ejecutado el programa INICIA debe purgarse y se introducirán los módulos DIAGNM, NCOMP, AB, ACE, MN y SALIDA, manteniéndose en memoria el módulo INTEG.

En este momento la calculadora está dispuesta para ejecutar en cualquier orden:

- 1 — DIAGNM, que dada la profundidad  $x$  de la fibra neutra, calcula axil  $N$  y momento flector  $M$  que agotan la sección para dicha profundidad, imprimiendo los valores de  $x$ ,  $N$  y  $M$  correspondientes.
- 2 — NCOMP, que dado un axil  $N$ , calcula el valor del momento flector  $M$  que conjuntamente con el  $N$  dado agotan la sección, imprimiendo los valores correspondientes de  $x$ ,  $N$  y  $M$ .

### 5.2. Resultados secundarios

Además de los resultados principales puede disponerse de una serie de resultados secundarios utilizables para comprobaciones diversas. Es necesario señalar, primeramente, que los datos iniciales se mantienen durante todo el proceso excepto los referentes a la sección de hormigón que son modificados por el programa INICIA.

Después de ejecutar el programa INICIA en el registro 72 puede encontrarse el área de la sección de hormigón. El contenido de este registro es modificado en posteriores utilidades de los restantes programas. Asimismo el canto total queda en el registro 04, la profundidad del primer y tercer pivotes en los registros 06 y 05, y la profundidad del centro de gravedad de la sección en el registro 07. Estos valores permanecen inalterados al utilizar los programas NCOMP y DIAGNM.

Después de utilizar los programas DIAGNM o NCOMP se tendrá el axil resultante en el registro 72, el momento resultante  $[Mp\text{ cm}]$  en el registro 73 y la profundidad de la fibra neutra en el registro 74.

Para calcular la deformación de la sección a una profundidad  $x$  cualquiera, bastará realizar las siguientes operaciones:

```
x [cm] pantalla
RCL 01
*
RCL 02
+
```

Para calcular la tensión en cualquiera de las armaduras activas o pasivas, habrá que situar el tipo de acero en el registro 76 (0 si es de dureza natural, 1 si es deformado en frío o de pretensar), el módulo de elasticidad  $E$  en el registro 62 y  $f_{yd}$  o  $f_{pd}$  en el registro 61. Luego se calculará la deformación de la armadura que se quiere estudiar, teniendo en cuenta en el caso de las armaduras pretensadas la deformación de neutralización, y se tecleará EXQ "ACE" con lo que la tensión aparecerá en pantalla ( $Mp/cm^2$ ).



### 5.3. Modificación de los datos de la sección

Si se desean modificar los datos de la sección cuando se están utilizando los programas DIAGNM y NCOMP debe procederse como se indica seguidamente.

Para modificar la resistencia del hormigón bastará introducir el nuevo valor en el registro 26.

Para modificar el tipo o calidad de los aceros bastará modificar los registros en los que se introdujeron estos datos.

Para modificar la profundidad, área de la sección o deformación de neutralización en su caso, de las capas de armadura activa o pasiva siempre que esta modificación no aumente el número de capas ni modifique la profundidad del primer pivote, podrá hacerse introduciendo los nuevos datos en los mismos registros en los que se situaron éstos inicialmente.

Si se desea modificar la geometría de la sección de hormigón sin volver a comenzar desde el programa INICIA, habrá que tener en cuenta que para cada tramo se ha sustituido, la altura del tramo por la profundidad en la que acaba dicho tramo, la anchura en la parte superior del tramo por la pendiente de la recta que define el contorno de dicho tramo, la anchura de la parte inferior por la ordenada al origen de dicha recta.

Teniendo en cuenta lo anterior, podrán alterarse los registros en la forma que se desee siempre que no se altere la profundidad del centro de gravedad de la sección ni su canto total.

## 6. INSTRUCCIONES PARA LA INTRODUCCION DE LOS DATOS Y EL USO DEL SISTEMA

| PASO | INSTRUCCIONES                                                                                                                                                                                             | ENTRADA<br>Datos/Unidades                 | TECLAS   | SALIDA<br>Datos/Unidades |
|------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------|----------|--------------------------|
|      | <b>FASE 0</b>                                                                                                                                                                                             |                                           |          |                          |
|      | <b>INICIALIZACION DE DATOS</b>                                                                                                                                                                            |                                           |          |                          |
| 1    | Memory lost .....                                                                                                                                                                                         |                                           | ON-CLX   |                          |
| 2    | Reservar registros 0-79.....                                                                                                                                                                              |                                           | SIZE 079 |                          |
| 3    | Leer INICIA, INTEG .....                                                                                                                                                                                  |                                           |          |                          |
| 4    | Datos iniciales .....                                                                                                                                                                                     |                                           |          |                          |
|      | <b>HORMIGON</b>                                                                                                                                                                                           |                                           |          |                          |
| 4.1  | Número de tramos de la sección de<br>hormigón .....                                                                                                                                                       | n                                         | STO 10   |                          |
| 4.2  | Altura tramo 1.....                                                                                                                                                                                       | $h_1$ cm                                  | STO 11   |                          |
| 4.3  | Anchura superior tramo 1.....                                                                                                                                                                             | $as_1$ cm                                 | STO 12   |                          |
| 4.4  | Anchura inferior tramo 1.....                                                                                                                                                                             | $ai_1$ cm                                 | STO 13   |                          |
|      | Esta operación se repite tantas veces<br>como tramos definan la sección. Se<br>recuerda que solamente se admiten<br>5 tramos y en este caso estos datos<br>ocuparían hasta el registro 25 inclu-<br>sive. |                                           |          |                          |
| 4.5  | Resistencia de cálculo del hormigón<br>x 0,85 .....                                                                                                                                                       | $0,85 \cdot f_{cd}$<br>Mp/cm <sup>2</sup> | STO 26   |                          |

| PASO | INSTRUCCIONES                                                                                                                                                                                                                                                          | ENTRADA<br>Datos/Unidades   | TECLAS       | SALIDA<br>Datos/Unidades |
|------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------|--------------|--------------------------|
| 4.6  | <b>ARMADURA PASIVA</b><br>Número de capas .....<br>En caso que $n_p = 0$ no debe suministrarse ningún otro dato, pues esta condición indica que no existe armadura pasiva, y se continúa en el paso 4.12                                                               | $n_p$                       | STO 27       |                          |
| 4.7  | Profundidad primera capa .....                                                                                                                                                                                                                                         | $d_{p1}$ cm                 | STO 28       |                          |
| 4.8  | Area de la sección de la primera capa.<br>Esta operación se repite tantas veces como capas de armadura pasiva existan en la sección. Se recuerda que solamente se admiten 5 capas y en este caso los datos ocuparían hasta el registro 37 inclusive.                   | $A_{p1}$ cm <sup>2</sup>    | STO 29       |                          |
| 4.9  | Tipo de acero.<br>0: dureza natural<br>1: deformado en frío .....                                                                                                                                                                                                      | ITIPO                       | STO 38       |                          |
| 4.10 | Resistencia de cálculo .....                                                                                                                                                                                                                                           | $f_{yd}$ Mp/cm <sup>2</sup> | STO 39       |                          |
| 4.11 | Módulo de elasticidad .....                                                                                                                                                                                                                                            | $E_p$ Mp/cm <sup>2</sup>    | STO 40       |                          |
| 4.12 | <b>ARMADURA ACTIVA</b><br>Número de capas de armadura activa<br>En caso que $n_a = 0$ no debe suministrarse ningún otro dato, pues esta condición indica que no existe armadura activa.                                                                                | $n_a$                       | STO 41       |                          |
| 4.13 | Profundidad primera capa .....                                                                                                                                                                                                                                         | $n_{a1}$ cm                 | STO 42       |                          |
| 4.14 | Area de la sección de la primera capa                                                                                                                                                                                                                                  | $A_{a1}$ cm <sup>2</sup>    | STO 43       |                          |
| 4.15 | Deformación de neutralización de la primera capa .....<br>Esta operación se repite tantas veces como capas de armadura activa existan en la sección. Se recuerda que solamente se admiten 5 capas y en este caso estos datos ocuparían hasta el registro 56 inclusive. | $\epsilon_{n1}$ ‰           | STO 44       |                          |
| 4.16 | Resistencia de cálculo .....                                                                                                                                                                                                                                           | $f_{pd}$ Mp/cm <sup>2</sup> | STO 57       |                          |
| 4.17 | Módulo de elasticidad .....                                                                                                                                                                                                                                            | $E_a$ Mp/cm <sup>2</sup>    | STO 58       |                          |
| 5    | Ejecutar INICIA .....                                                                                                                                                                                                                                                  |                             | EXE "INICIA" |                          |
| 6    | Purgar INICIA .....                                                                                                                                                                                                                                                    |                             | CLP "INICIA" |                          |
| 7    | Leer DIAGNM, NCOMP, MN, AB, ACE, SALIDA                                                                                                                                                                                                                                |                             |              |                          |
|      | <b>FASE 1</b><br><b>CALCULO DE N Y M PARA x DADO</b>                                                                                                                                                                                                                   |                             |              |                          |
| 8    | Teclear el valor de la posición del eje neutro .....                                                                                                                                                                                                                   | x cm                        |              |                          |
| 9    | Ejecutar DIAGNM .....                                                                                                                                                                                                                                                  |                             | EXE "DIAGNM" | x cm<br>N Mp<br>M Mpm    |
|      | <b>FASE 2</b><br><b>CALCULO DE M PARA N DADO</b>                                                                                                                                                                                                                       |                             |              |                          |
| 8    | Teclear axil de referencia .....                                                                                                                                                                                                                                       | N Mp                        |              |                          |
| 9    | Ejecutar NCOMP .....                                                                                                                                                                                                                                                   |                             | EXE "NCOMP"  | x cm<br>N Mp<br>M Mpm    |

## 7. EJEMPLOS DE APLICACION

Para mostrar la potencia del sistema de programa se incluyen tres ejemplos. En el primero de ellos, una sección hueca de hormigón armado, se trata de reflejar todas las posibilidades del sistema. En los ejemplos segundo y tercero solamente se dan resultados principales para dos casos de indudable interés práctico: una viga pretensada de tablero de puente y una sección de forjado compuesta por semivigüeta pretensada y capa de hormigón "in situ".

Evidentemente no es posible mostrar con unos pocos ejemplos la potencia del sistema y será el uso el que dará una idea más precisa de las posibilidades y limitaciones. Los autores confían en que en el presente artículo se indica la forma de maximizar el aprovechamiento del sistema.

### 7.1. Sección hueca de hormigón armado

#### 7.1.1. Características de la sección analizada

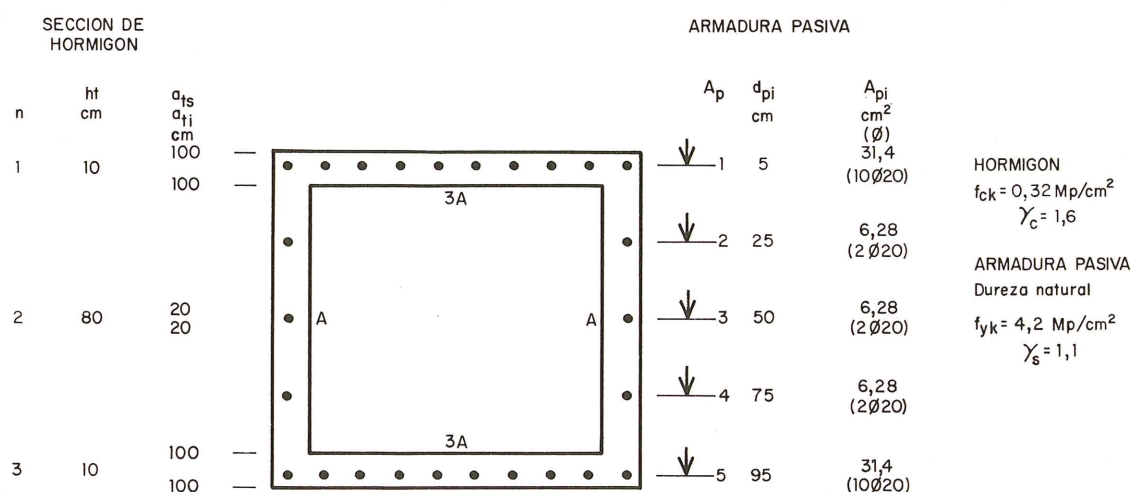


Fig.8

#### 7.1.2. Listado de datos iniciales

Una vez introducidos todos los datos y antes de ejecutar el programa INICIA, el contenido de los registros desde 10 hasta 58, donde se sitúan los datos introducidos, es el siguiente:

|              |             |             |                |            |
|--------------|-------------|-------------|----------------|------------|
| R10= 3.000   | R20= 0.000  | R30= 25.000 | R40= 2.100.000 | R50= 0.000 |
| R11= 10.000  | R21= 0.000  | R31= 6.280  | R41= 0.000     | R51= 0.000 |
| R12= 100.000 | R22= 0.000  | R32= 50.000 | R42= 0.000     | R52= 0.000 |
| R13= 100.000 | R23= 0.000  | R33= 6.280  | R43= 0.000     | R53= 0.000 |
| R14= 80.000  | R24= 0.000  | R34= 75.000 | R44= 0.000     | R54= 0.000 |
| R15= 20.000  | R25= 0.000  | R35= 6.280  | R45= 0.000     | R55= 0.000 |
| R16= 20.000  | R26= 0.170  | R36= 95.000 | R46= 0.000     | R56= 0.000 |
| R17= 10.000  | R27= 5.000  | R37= 31.400 | R47= 0.000     | R57= 0.000 |
| R18= 100.000 | R28= 5.000  | R38= 0.000  | R48= 0.000     | R58= 0.000 |
| R19= 100.000 | R29= 31.400 | R39= 3.818  | R49= 0.000     |            |



### 7.1.3. Resultados secundarios de INICIA

De acuerdo con lo indicado en el apartado 5.2, después de la ejecución del programa INICIA, pueden obtenerse algunos resultados secundarios tales como, por ejemplo:

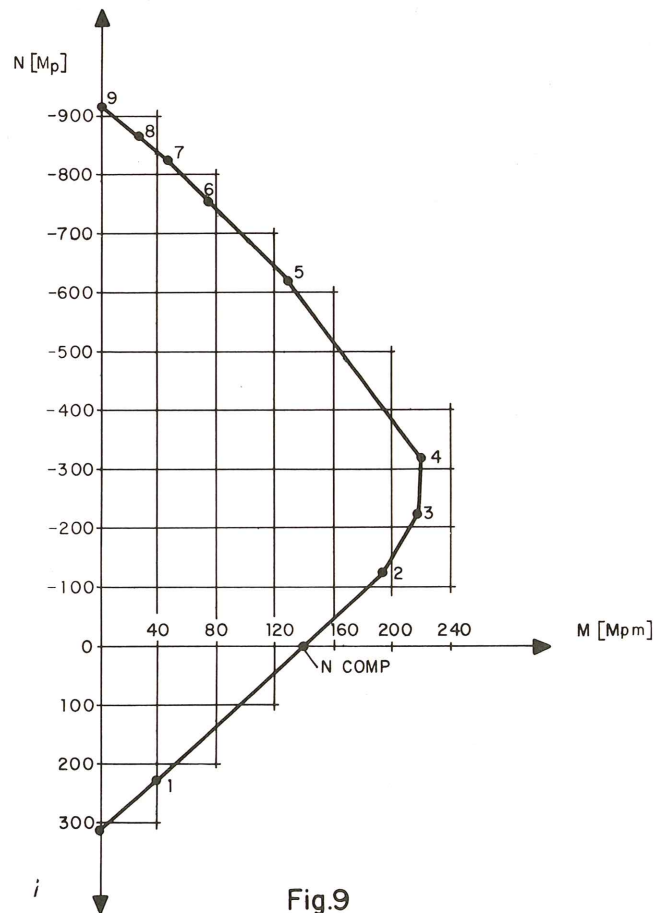
RCL 72 3.600 Area de la sección de hormigón [cm<sup>2</sup>].

RCL 07 50 Profundidad del centro de gravedad [cm].

### 7.1.4. Resultados de DIAGNM y NCOMP

En la figura 9 se muestra el diagrama de interacción de la sección estudiada, que corresponde al listado adjunto de resultados de DIAGNM y NCOMP. Asimismo, para cada punto se indica el tiempo empleado.

| DIAGNM                                           | NCOMP                                        |
|--------------------------------------------------|----------------------------------------------|
| 1 X= 0.000<br>N= 226.531<br>M= 38.334 34"        | X= 13.041<br>N= 5.210-06<br>M= 140.098 4'29" |
| 2 X= 20.000<br>N=-127.733<br>M= 193.322 57"      |                                              |
| 3 X= 40.000<br>N=-227.887<br>M= 216.153 56"      |                                              |
| 4 X= 60.000<br>N=-321.275<br>M= 219.336 56"      |                                              |
| 5 X= 80.000<br>N=-476.981<br>M= 176.719 55"      |                                              |
| 6 X= 100.000<br>N=-623.677<br>M= 126.474 1'09"   |                                              |
| 7 X= 125.000<br>N=-757.758<br>M= 70.362 1'11"    |                                              |
| 8 X= 150.000<br>N=-815.278<br>M= 46.087 1'11"    |                                              |
| 9 X= 200.000<br>N=-865.364<br>M= 24.912 1'10"    |                                              |
| 10 X= 10.000.000<br>N=-923.710<br>M= 0.002 1'10" |                                              |



Se puede observar una diferencia importante entre los tiempos empleados para obtener los resultados de DIAGNM y NCOMP, así como, otra diferencia no tan notable entre los tiempos empleados en obtener los resultados de DIAGNM para diferentes posiciones del eje neutro,  $x$ . La primera de estas diferencias es debida, como ya se indicó, a que NCOMP utiliza un proceso iterativo; la segunda, a que de acuerdo a la posición del eje neutro el programa deberá obtener  $M$  y  $N$  sólo considerando la contribución de los aceros ( $x \leq 0$ ) ó considerando la contribución de los aceros y el hormigón ( $x > 0$ ), con lo que el tiempo de cálculo aumentará.

#### 7.1.5. Resultados secundarios después de ejecutado NCOMP

7.1.5.1. De acuerdo con lo indicado en el apartado 5.2., la deformación del acero de la tercera capa situada a 50 cm de profundidad, por ejemplo, resulta:

$$\epsilon_{x=50} = 4,509 \text{ ‰}$$

7.1.5.2. Asimismo, la tensión correspondiente a la deformación anteriormente obtenida será:

$$\sigma = 3,818 \text{ Mp/cm}^2$$

7.1.5.3. Modificando, por ejemplo,  $f_{ck} = 0,45 \text{ Mp/cm}^2$  y las cuantías de armaduras de la primera y quinta capas a  $37,70 \text{ cm}^2$  (12  $\emptyset$  20) los nuevos resultados de NCOMP para  $N = 0$  son:

NCOMP

$$X = 11,766$$

$$N = -0,003$$

$$M = 162,693 \quad 4'07''$$

## 7.2. Viga pretensada de tablero de puente

### 7.2.1. Características de la sección analizada

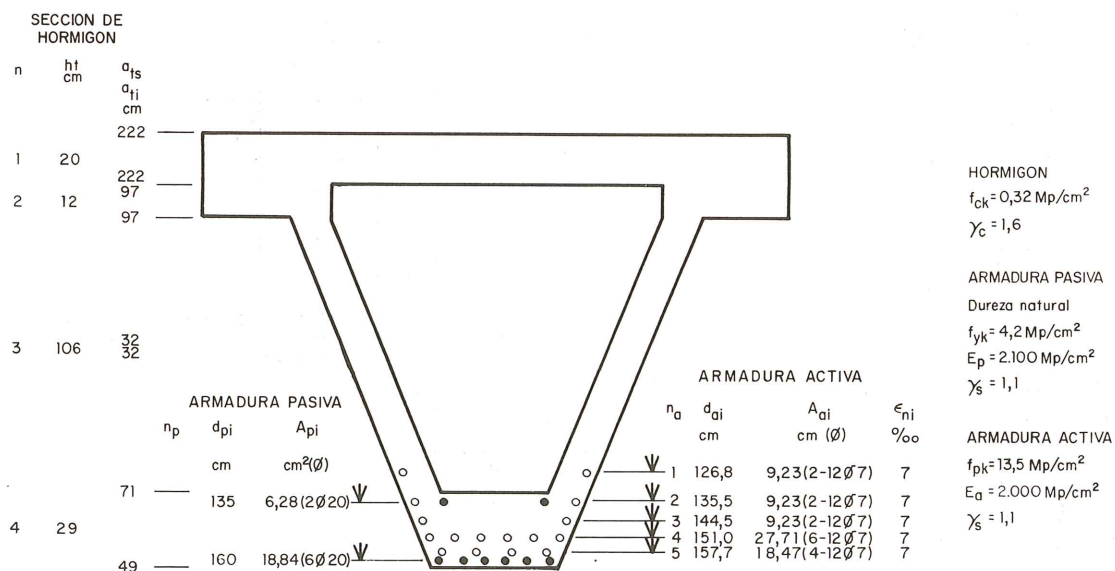


Fig.10

### 7.2.2. Listado de datos iniciales

|              |              |              |                |                |
|--------------|--------------|--------------|----------------|----------------|
| R10= 4.000   | R20= 29.000  | R30= 160.000 | R40= 2.100.000 | R50= 7.000     |
| R11= 20.000  | R21= 71.000  | R31= 18.840  | R41= 5.000     | R51= 151.000   |
| R12= 222.000 | R22= 49.000  | R32= 0.000   | R42= 126.800   | R52= 27.710    |
| R13= 222.000 | R23= 0.000   | R33= 0.000   | R43= 9.230     | R53= 7.000     |
| R14= 12.000  | R24= 0.000   | R34= 0.000   | R44= 7.000     | R54= 157.700   |
| R15= 97.000  | R25= 0.000   | R35= 0.000   | R45= 135.500   | R55= 18.470    |
| R16= 97.000  | R26= 0.170   | R36= 0.000   | R46= 9.230     | R56= 7.000     |
| R17= 106.000 | R27= 2.000   | R37= 0.000   | R47= 7.000     | R57= 12.273    |
| R18= 32.000  | R28= 135.000 | R38= 0.000   | R48= 144.500   | R58= 2.000.000 |
| R19= 32.000  | R29= 6.280   | R39= 3.818   | R49= 9.230     |                |

### 7.2.3. Resultados DIAGNM y NCOMP

#### DIAGNM

X= 0.000  
N= 1.098.212  
M= 979.207 2'36"  
  
X= 167.000  
N=-673.434  
M= 1.010.051 3'54"

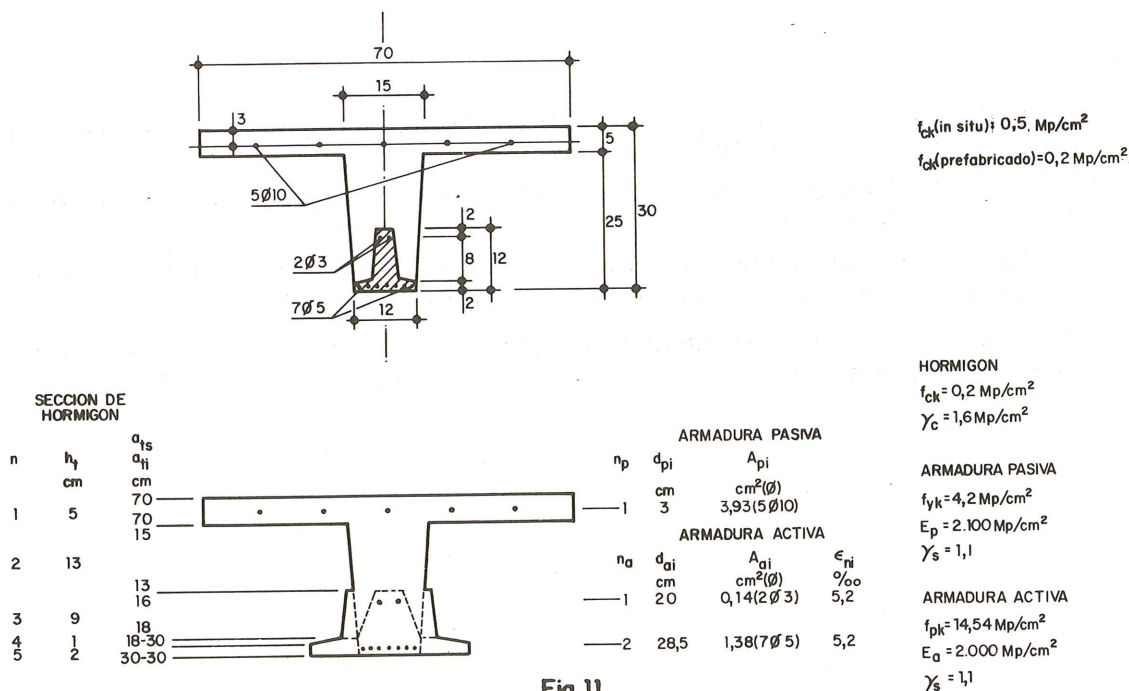
#### NCOMP

X= 64.388  
N= 2.878-04  
M= 1.378.386 25'48"

### 7.3. Sección de forjado, formado por semivigüeta pretensada y capa superior de hormigón "in situ"

#### 7.3.1. Características de la sección analizada

Debido a las diferentes calidades del hormigón de la semivigüeta resistente y la capa de hormigón "in situ" en la sección real, y teniendo en cuenta que se estudia el caso de flexión plana, a los efectos de la descripción de la sección para el programa se realizó una homogeneización de la sección.





### 7.3.2. Listado de datos iniciales

|             |             |             |                |                |
|-------------|-------------|-------------|----------------|----------------|
| R10= 5.000  | R20= 1.000  | R30= 0.000  | R40= 2.100.000 | R50= 0.000     |
| R11= 5.000  | R21= 18.000 | R31= 0.000  | R41= 2.000     | R51= 0.000     |
| R12= 70.000 | R22= 30.000 | R32= 0.000  | R42= 20.000    | R52= 0.000     |
| R13= 70.000 | R23= 2.000  | R33= 0.000  | R43= 0.140     | R53= 0.000     |
| R14= 13.000 | R24= 30.000 | R34= 30.000 | R44= 5.200     | R54= 0.000     |
| R15= 15.000 | R25= 30.000 | R35= 30.000 | R45= 28.500    | R55= 0.000     |
| R16= 13.000 | R26= 0.106  | R36= 0.000  | R46= 1.380     | R56= 0.000     |
| R17= 9.000  | R27= 1.000  | R37= 0.000  | R47= 5.200     | R57= 13.218    |
| R18= 16.000 | R28= 3.000  | R38= 0.000  | R48= 0.000     | R58= 2.000.000 |
| R19= 18.000 | R29= 3.930  | R39= 3.818  | R49= 0.000     |                |

### 7.3.3. Resultados DIAGNM y NCOMP

#### DIAGNM

X= 0.000  
N= 30.107  
M= 2.865 1'22"

X= 5.000  
N=-9.575  
M= 6.486 2'11"

X= 30.000  
N=-66.562  
M= 5.919 1'26"

#### NCOMP

X= 4.150  
N= 0.007  
M= 5.670 7'37"

### Referencias

- Instrucción EH-73 para el Proyecto y la Ejecución de Obras de Hormigón en Masa o Armado. Comisión Permanente del Hormigón, 1973.
- Instrucción EP-77 para el Proyecto y la Ejecución de Obras de Hormigón Pretensado. Comisión Permanente del Hormigón 1977.
- Análisis de la Capacidad Resistente de Secciones de Hormigón Armado-Pretensado por Medio de Superficies de Interacción. J.J. Arenas de Pablo. Hormigón y Acero, núm. 114. 1<sup>er</sup> trimestre 1975.
- Comprobación de una sección rectangular de hormigón armado con ayuda de una calculadora programable HP.67. A. Recuero Fornies y J.P. Gutiérrez Jiménez. Hormigón y Acero 133. 4<sup>o</sup> trimestre 1979.

# APENDICE

```

01*LBL "INICIA"
02 0
03 STO 08
04 11
05 ENTER↑
06 ENTER↑
07 RCL 10
08 3
09 *
10 +
11 1
12 -
13 1 E-3
14 *
15 +
16 3 E-5
17 +
18 STO 09
19 STO 10
20 RCL 27
21 X=0?
22 GTO 20
23 28
24 ENTER↑
25 ENTER↑
26 RCL 27
27 2
28 *
29 +
30 1
31 -
32 1 E-3
33 *
34 +
35 STO 27
36*LBL 20
37 -3.5
38 STO 60
39 RCL 41
40 .5
41 X<Y?
42 ST+ 60
43 RCL 41
44 X=0?
45 GTO 01
46 42
47 ENTER↑
48 ENTER↑
49 RCL 41
50 3
51 *
52 +
53 1
54 -
55 1 E-3
56 *
57 +
58 3 E-5
59 +
60 STO 41
61*LBL 01
62 RCL 09
63 1
64 +
65 ENTER↑

```

```

66 ENTER↑
67 1
68 +
69 RCL IND X
70 RCL IND Z
71 -
72 RCL IND 09
73 /
74 STO IND Z
75 RCL 09
76 3
77 -
78 RCL IND X
79 ST+ IND 09
80 RDN
81 RDN
82 RCL IND 09
83 *
84 ST- IND Y
85 ISG 09
86 GTO 01
87 RCL 09
88 3
89 -
90 RCL IND X
91 STO 04
92 RCL 41
93 X=0?
94 GTO 21
95 RCL 04
96 STO 06
97 GTO 22
98*LBL 21
99 RCL 27
100 FRC
101 1 E3
102 *
103 1
104 -
105 RCL IND X
106 STO 06
107*LBL 22
108 RCL 60
109 2
110 +
111 RCL 60
112 /
113 RCL 04
114 *
115 STO 05
116 RCL 60
117 RCL 06
118 *
119 RCL 60
120 10
121 -
122 /
123 STO 03
124 1
125 STO 63
126 0
127 STO 64
128 STO 65
129 STO 72
130 STO 73

```

```

131 RCL 10
132 STO 07
133 0
134 STO 71
135*LBL 08
136 RCL 07
137 1
138 +
139 ENTER↑
140 ENTER↑
141 1
142 +
143 RCL IND Y
144 STO 62
145 RCL IND Y
146 STO 61
147 RCL 71
148 STO 70
149 RCL IND 07
150 STO 71
151 XEQ "INTEG"
152 ISG 07
153 GTO 08
154 RCL 73
155 RCL 72
156 /
157 STO 07
158 .END.

```

```

01*LBL "NCOMP"
02 STO 59
03 CLX
04 STO 77
05 XEQ "MH"
06 RCL 72
07 RCL 59
08 -
09 STO 70
10 RCL 03
11*LBL 00
12 XEQ "MH"
13 RCL 72
14 RCL 59
15 -
16 STO 61
17 ABS
18 1 E-2
19 XYY?
20 GTO 01
21 RCL 61
22 RCL 77
23 *
24 RCL 74
25 RCL 70
26 *
27 -
28 RCL 61
29 RCL 70
30 -
31 /
32 RCL 74
33 STO 77
34 RCL 61
35 STO 70
36 RCL 7
37 GTO 00
38*LBL 01
39 XEQ "SALIDA"
40 .END.

```

```

01*LBL "DIAGNM"
02 XEQ "MH"
03 XEQ "SALIDA"
04 END

```

|                |               |                 |             |              |                 |
|----------------|---------------|-----------------|-------------|--------------|-----------------|
| 01*LBL "INTEG" | 66 X12        | 47 2            | 112 X=Y?    | 21 RTN       | 41 .823         |
| 02 66.069      | 67 ST* 62     | 48 +            | 113 GTO 20  | 22*LBL 01    | 42 *            |
| 03 STO 09      | 68 FC?C 02    | 49 RCL IND X    | 114 RCL 75  | 23 CLX       | 43 RCL 61       |
| 04 0           | 69 GTO 11     | 50 RCL IND 08   | 115 X=Y?    | 24 RCL 06    | 44 RCL 62       |
| 05 ENTER↑      | 70 RCL 61     | 51 RCL 01       | 116 GTO 11  | 25 -         | 45 /            |
| 06*LBL 01      | 71 ST+ 72     | 52 *            | 117 ISG 76  | 26 10        | 46 +            |
| 07 STO IND 09  | 72 RCL 62     | 53 +            | 118 GTO 12  | 27 /         | 47 RCL 71       |
| 08 ISG 09      | 73 ST+ 73     | 54 RCL 02       | 119*LBL 20  | 28 1/X       | 48 *            |
| 09 GTO 01      | 74 RCL 70     | 55 +            | 120 RCL 72  | 29 CHS       | 49 RCL 00       |
| 10 61.062      | 75 STO 00     | 56 XEQ "ACE"    | 121 RCL 07  | 30 STO 01    | 50 RCL 75       |
| 11 STO 08      | 76 GTO 10     | 57 RCL 08       | 122 *       | 31 CHS       | 51 ABS          |
| 12*LBL 02      | 77*LBL 11     | 58 1            | 123 ST- 73  | 32 *         | 52 -            |
| 13 63.065      | 78 RCL 61     | 59 +            | 124 RTN     | 33 STO 02    | 53 1 E-3        |
| 14 STO 09      | 79 ST- 72     | 60 RCL IND X    | 125*LBL 11  | 34 RTN       | 54 *            |
| 15*LBL 04      | 80 RCL 62     | 61 RCL 2        | 126 RCL 26  | 35*LBL 02    | 55 +            |
| 16 RCL 08      | 81 ST- 73     | 62 *            | 127 4       | 36 CLX       | 56 RCL 71       |
| 17 RCL 09      | 82 RTN        | 63 ST+ 72       | 128 /       | 37 RCL 60    | 57 X12          |
| 18 +           | 83 END        | 64 RCL IND 08   | 129 STO 65  | 38 STO 02    | 58 X12          |
| 19 58          |               | 65 *            | 130 RCL 02  | 39 CHS       | 59 4.115        |
| 20 -           | 01*LBL "MN"   | 66 ST+ 73       | 131 *       | 40 /         | 60 *            |
| 21 RCL IND 08  | 02 STO 74     | 67 ISG 08       | 132 RCL 02  | 41 1/X       | 61 RCL 61       |
| 22 RCL IND 09  | 03 XEQ "AB"   | 68 GTO 13       | 133 4       | 42 STO 01    | 62 RCL 62       |
| 23 *           | 04 0          | 69*LBL 16       | 134 +       | 43 RTN       | 63 /            |
| 24 ST+ IND Y   | 05 STO 72     | 70 0            | 135 *       | 44 END       | 64 +            |
| 25 ISG 09      | 06 STO 73     | 71 STO 71       | 136 STO 63  |              | 65 /            |
| 26 GTO 04      | 07 RCL 27     | 72 RCL 10       | 137 RCL 02  | 01*LBL "ACE" | 66 ST- 71       |
| 27 ISG 08      | 08 X=0?       | 73 STO 76       | 138 2       | 02 STO 75    | 67 ABS          |
| 28 GTO 02      | 09 GTO 15     | 74 RCL 02       | 139 +       | 03 RCL 76    | 68 1 E-2        |
| 29 SF 02       | 10 STO 08     | 75 X>0?         | 140 RCL 01  | 04 X=0?      | 69 X<Y?         |
| 30 RCL 71      | 11 RCL 38     | 76 GTO 20       | 141 *       | 05 GTO 01    | 70 GTO 02       |
| 31*LBL 10      | 12 STO 76     | 77 -2           | 142 2       | 06*LBL 00    | 71 RCL 71       |
| 32 STO 00      | 13 RCL 39     | 78 X<=Y?        | 143 *       | 07 RCL 61    | 72 .7           |
| 33 0           | 14 STO 61     | 79 GTO 11       | 144 RCL 65  | 08 RCL 62    | 73 +            |
| 34 ENTER↑      | 15 RCL 40     | 80 -            | 145 *       | 09 RCL 75    | 74 RCL 61       |
| 35 STO 61      | 16 STO 62     | 81 RCL 01       | 146 STO 64  | 10 *         | 75 *            |
| 36 STO 62      | 17*LBL 10     | 82 /            | 147 RCL 01  | 11 1 E3      | 76 ST* 70       |
| 37 69.065      | 18 RCL IND 08 | 83 CHS          | 148 X12     | 12 /         | 77 RCL 70       |
| 38 STO 08      | 19 RCL 01     | 84 STO 75       | 149 RCL 65  | 13 X>Y?      | 78 RTN          |
| 39*LBL 05      | 20 *          | 85 RCL 26       | 150 *       | 14 X<>Y      | 79 END          |
| 40 RCL 61      | 21 RCL 02     | 86 CHS          | 151 STO 65  | 15 CHS       |                 |
| 41 RCL 00      | 22 +          | 87 STO 63       | 152 RCL 74  | 16 X>Y?      | 01*LBL "SALIDA" |
| 42 *           | 23 XEQ "ACE"  | 88 0            | 153 STO 75  | 17 X<>Y      | 02 ADV          |
| 43 RCL IND 08  | 24 RCL IND 08 | 89 STO 64       | 154 GTO 12  | 18 CHS       | 03 FIX 3        |
| 44 RCL 08      | 25 ISG 08     | 90 STO 65       | 155 END     | 19 RTN       | 04 "X="         |
| 45 INT         | 26 RCL IND 08 | 91*LBL 12       |             | 20*LBL 01    | 05 ACA          |
| 46 65          | 27 RCL 2      | 92 RCL 71       | 01*LBL "AB" | 21 700       | 06 RCL 74       |
| 47 -           | 28 *          | 93 STO 70       | 02 ENTER↑   | 22 RCL 61    | 07 ACX          |
| 48 /           | 29 ST+ 72     | 94 RCL 75       | 03 ENTER↑   | 23 *         | 08 PRBUF        |
| 49 +           | 30 *          | 95 RCL IND 76   | 04 RCL 03   | 24 RCL 62    | 09 "N="         |
| 50 STO 61      | 31 ST+ 73     | 96 X>Y?         | 05 X>Y?     | 25 /         | 10 ACA          |
| 51 RCL 62      | 32 ISG 08     | 97 RDN          | 06 GTO 01   | 26 STO 00    | 11 RCL 72       |
| 52 RCL 00      | 33 GTO 10     | 98 STO 71       | 07 CLX      | 27 RCL 75    | 12 ACX          |
| 53 *           | 34*LBL 15     | 99 RCL 76       | 08 RCL 04   | 28 ABS       | 13 PRBUF        |
| 54 RCL IND 08  | 35 1          | 100 1           | 09 X>Y?     | 29 X<=Y?     | 14 "M="         |
| 55 RCL 08      | 36 STO 76     | 101 +           | 10 GTO 02   | 30 GTO 00    | 15 ACA          |
| 56 INT         | 37 RCL 41     | 102 RCL IND X   | 11 CLX      | 31 RCL 75    | 16 RCL 73       |
| 57 64          | 38 X=0?       | 103 STO 62      | 12 RCL 05   | 32 /         | 17 100          |
| 58 -           | 39 GTO 16     | 104 RCL 76      | 13 -        | 33 STO 70    | 18 /            |
| 59 /           | 40 STO 08     | 105 2           | 14 2        | 34 2         | 19 ACX          |
| 60 +           | 41 RCL 57     | 106 +           | 15 /        | 35 ENTER↑    | 20 PRBUF        |
| 61 STO 62      | 42 STO 61     | 107 RCL IND X   | 16 1/X      | 36 STO 71    | 21 END          |
| 62 DSE 08      | 43 RCL 58     | 108 STO 61      | 17 STO 01   | 37*LBL 02    |                 |
| 63 GTO 05      | 44 STO 62     | 109 XEQ "INTEG" | 18 *        | 38 RCL 71    |                 |
| 64 RCL 00      | 45*LBL 13     | 110 RCL 74      | 19 CHS      | 39 X12       |                 |
| 65 ST* 61      | 46 RCL 08     | 111 RCL 71      | 20 STO 02   | 40 X12       |                 |



## Consideraciones sobre el número de probetas de hormigón que debe tomarse en cada amasada

José Calavera  
Dr. Ingeniero de Caminos

En el muestreo y ensayo del hormigón fresco se parte del supuesto de que la hormigonera empleada para el amasado es capaz de amasar el volumen dado en condiciones sustancialmente uniformes. Los requisitos para juzgar esto vienen reglamentados, en el caso del hormigón preparado, por la norma EHPRE-72, artículo 2.2. Para otros tipos de hormigonera no existe norma española que permite verificar que el amasado se realiza con uniformidad suficiente.

Aceptado que toda la amasada es sustancialmente uniforme, es obvio que basta con extraer de cada amasada una muestra, y que tomar más muestras de cada amasada es un procedimiento erróneo ya que los distintos resultados de cada una de las muestras extraídas han de ser sustancialmente iguales. Es decir, tomar más de una muestra por amasada conduce a manejar más resultados pero no a tener más información.

Preparada la muestra, lo usual es fabricar varias series de  $n$  probetas cada una, destinada cada serie a ser ensayada a una edad. Las edades más usuales son 7 y 28 días, a veces tres días. En ocasiones se investiga también la resistencia a 90 días. Se entiende que estamos hablando de series de probetas destinadas a ser conservadas de 24 a 48 horas en obra y el resto hasta su rotura en cámara standard a  $20 \pm 2^\circ \text{C}$  y humedad relativa superior al 95 por 100. En ciertos tipos de obras (pretensado, encofrados deslizantes, curados acelerados, etc....) puede ser necesario evaluar la resistencia del hormigón en las condiciones de curado de obra; y en ese caso se añaden las series correspondientes. De todas formas debe recordarse que la toma y preparación de la muestra, la ejecución de los ensayos de consistencia y la fabricación de las probetas, deben realizarse en un plazo inferior a 30 minutos; por lo que si el número de probetas es muy grande debería procederse a dos extracciones diferentes de muestras; en este caso ello estaría justificado por destinarse a ensayos en diferentes condiciones.

Una consideración importante es la que ofrece el tomar una serie para ensayo a tres días. Su interés es evidente, pues en caso de gran rapidez de construcción, la detección tardía de un fallo puede significar la demolición de una parte importante de obra. Sin embargo,

esta práctica requiere cuidados muy especiales ya que el período de curado en obra, de 24 a 48 horas, es una fracción muy importante de la edad de ensayo. Si el curado en obra no se realiza en condiciones esencialmente iguales a las de la cámara standard, los resultados pueden resultar gravemente falseados. En este sentido, si se van a ensayar probetas a tres días, la existencia de una cámara especial en obra es prácticamente obligada.

Cuestión esencial es la de cuántas probetas deben tomarse para cada serie. Desde un punto de vista estricto, lo normal sería tomar una sola probeta es decir, manejar  $n = 1$ . La Instrucción EH-73 exige  $n \geq 2$ . La Instrucción EP-77 no da indicaciones sobre el valor de  $n$ . En la práctica se está utilizando con frecuencia  $n = 2$  y a veces  $n = 3$ .

Es interesante, para  $n$  probetas procedentes de la misma muestra, curadas en las mismas condiciones y ensayadas a la misma edad, analizar cuál es la máxima dispersión admisible, habida cuenta de las inevitables pequeñas desviaciones ocurridas en el largo proceso de preparación de la muestra, curado en obra, transporte al laboratorio, curado en cámara standard, refrentado y ensayo. Habitualmente se considera en el Control Estadístico de Calidad que dentro de un proceso normalizado de producción, un conjunto de resultados de  $n$  ensayos procedentes de la misma muestra, ofrece resultados aberrantes y por tanto todos los ensayos deben considerarse nulos, si el coeficiente de variación  $V$  (desviación standard dividida por valor medio) es superior al 12 por 100.

Para conjuntos de resultados pequeños, el recorrido relativo  $R$  (diferencia del mayor resultado con el menor, dividida por el valor medio) viene ligado con el coeficiente de variación por la expresión:

$$\bar{R} = \frac{Vd_2}{100} \quad [1]$$

Los valores de  $d_2$  vienen indicados en función de  $n$  en la tabla siguiente, así como los recorridos relativos  $\bar{R}^{(*)}$  (\*\*).

| $n$ | $d_2$ | $R$    | $\lambda = R/n$ |
|-----|-------|--------|-----------------|
| 2   | 1,128 | 0,1354 | 0,068           |
| 3   | 1,693 | 0,2032 | 0,068           |
| 4   | 2,059 | 0,2471 | 0,062           |
| 5   | 2,326 | 0,2791 | 0,056           |
| 6   | 2,534 | 0,3041 | 0,051           |

Es interesante el valor de  $\lambda$  igual al recorrido absoluto (diferencia entre el mayor y menor resultado), dividido por el número de probetas, ya que podemos a partir de él y para los casos  $n = 2$  y  $n = 3$ , que son los habituales, obtener la fórmula:

$$\frac{X_{\text{máx}} - X_{\text{mín.}}}{\sum_{i=1}^n x_i} \leq 0,068 \quad [2]$$

(\*) Véase "ASTM MANUAL ON QUALITY CONTROL OF MATERIALS" Special Technical Publication 15-C. Véase también "REALISM IN THE APPLICATION OF ACI STANDARD 214-65". A.C.I. Publication SP-37.

(\*\*) La Instrucción EHPRE ha partido de las mismas consideraciones, aceptando  $R = 0,13$  y  $0,20$  para  $n = 2$  y  $n = 3$  respectivamente. Con este redondeo el valor  $0,068$  de la fórmula [2] resulta de  $0,067$ .

Es decir, el recorrido absoluto de los resultados, dividido por la suma de todos ellos, no ha de ser superior a 0,068.

Si esta condición no se cumple, la serie de resultados  $X_i$  corresponde a un ensayo nulo y no son válidos ninguno de los resultados  $X_i$ ; por lo que la práctica de separar algunos como válidos mediante consideraciones adicionales es errónea.

Sea  $n$  igual a uno, dos o tres, a efectos de control constituyen un resultado único, ya que en caso de  $n > 1$ , se toma el valor medio de los resultados como dato de control. Por lo tanto cabe preguntarse qué valor de  $n$ , o sea cuantas probetas para cada edad de ensayo, deben tomarse. Ya se ha dicho que desde un punto de vista estricto  $n = 1$  es lo correcto. El valor  $n = 2$  tiene una ventaja importante y es que mediante la aplicación de la fórmula [2] permite, en caso de resultados bajos, juzgar con gran probabilidad de acierto si ha habido o no error en el proceso de toma de muestras y fabricación, curado y ensayo de probetas, en cuyo caso el hormigón sería deficiente. Esta ventaja aconseja la especificación  $n \geq 2$  de la Instrucción EH-73, ya que en definitiva supone poner en control también al Laboratorio. (\*)

Lo que resulta evidente es que puede discutirse si se adopta  $n = 1$  o  $n = 2$  pero el valor  $n = 3$  (por desgracia muy frecuente) o cualquiera superior, no tiene justificación pues no posee ventaja apreciable alguna sobre  $n = 2$  y aumenta innecesariamente el número de ensayos y el coste del control.

Febrero 1980.

---

(\*) El tema fué discutido en la Asamblea General del C.E.B. de 1978 y la ventaja indicada fué considerada superflua por la mayoría de los países y se adoptó  $n = 1$ .

---

## FE DE ERRATAS

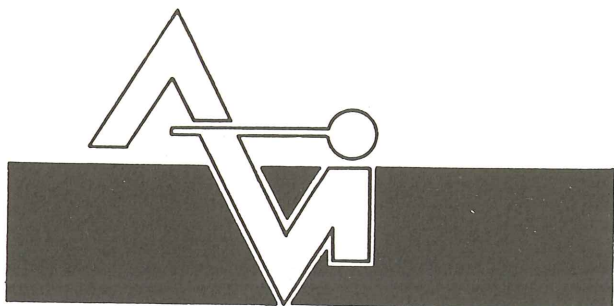
Los autores del artículo "Comprobación de una sección rectangular de hormigón armado con ayuda de una calculadora programable HP-67", aparecido en el nº 133 de Hormigón y Acero (Págs. 9-18), nos indican la existencia de los siguientes errores:

- 1º.—En el listado del programa existe una errata en la pág. 202. Dice RCL G y debe decir RCL 6.
- 2º.—La tabla del diagrama de interacción M-N de la pág. 16 debe sustituirse por la siguiente:

| X     | N       | M          |
|-------|---------|------------|
| 109   | -188,03 | $\simeq 0$ |
| 80    | -180,72 | 1,12       |
| 40    | -143,97 | 6,56       |
| 30    | -103,09 | 10,93      |
| 20    | - 63,54 | 12,46      |
| 10    | - 31,77 | 10,03      |
| 0     | 21,53   | 1,33       |
| 24,27 | - 77,10 | 12,69      |

- 3º.—Los interesados en el programa pueden mandar una tarjeta virgen a los autores para proceder a su grabación.



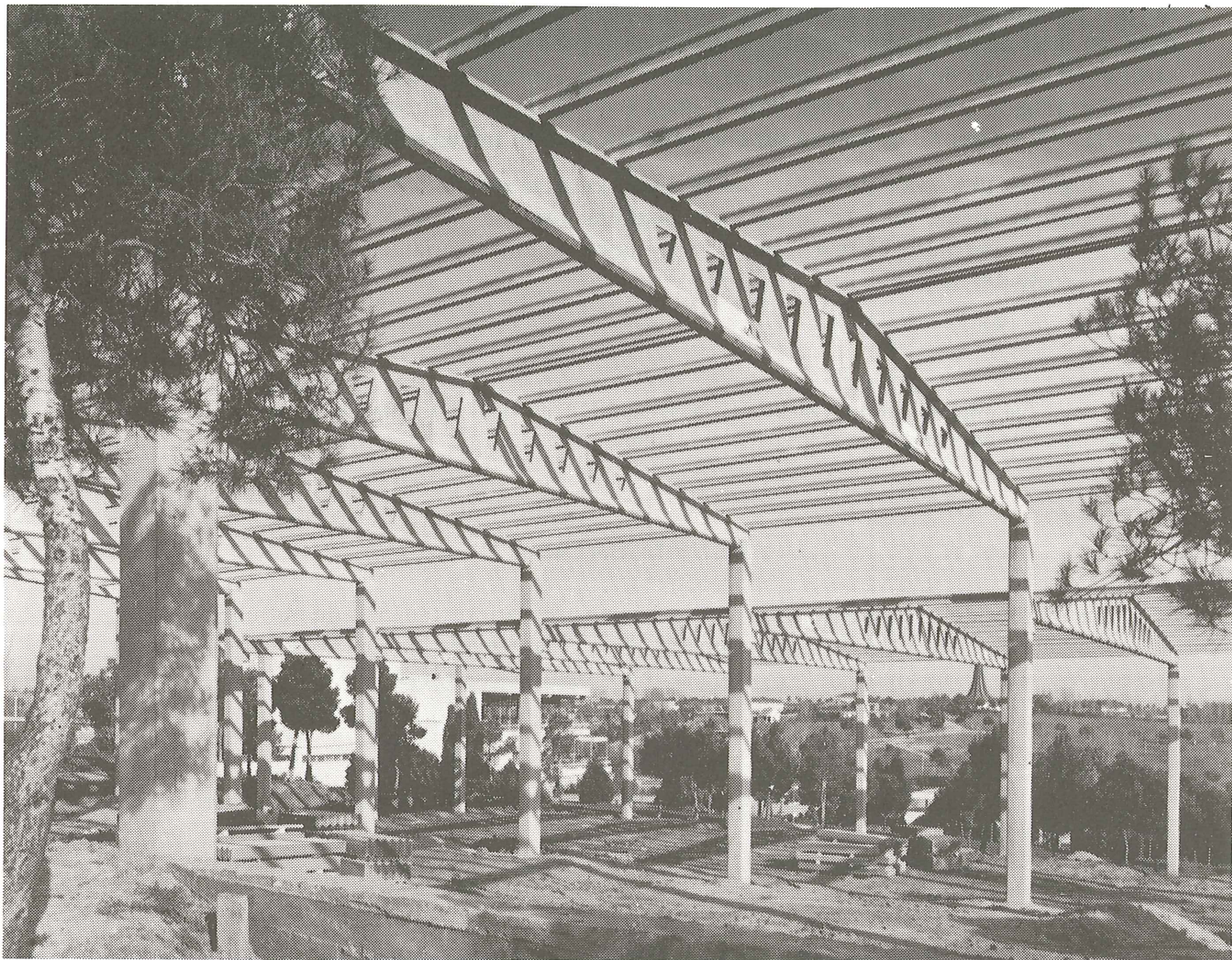


PREFABRICACION LIGERA Y PESADA

**ALVISA**

PREFABRICADOS ALBAJAR

**PUENTES - NAVES INDUSTRIALES - FORJADOS  
BOVEDILLAS - LADRILLOS - TEJAS - TUBOS DRENAJE**



Estructura de cubierta a varios niveles en Las Lomas-El Bosque, prefabricada y montada incluso pilares, por ALVI, S.A.  
Anchura de cada nave: 25,00 m.

#### **FABRICAS:**

HUESCA: Paseo Lucas Mallada, s/n. - Teléfono 22 39 00 (cinco líneas). (Casa central.)

MONZON: Carretera de Lérida - Teléfono 40 07 80.

GRAÑEN: Carretera de Huesca - Teléfono 27.

MADRID: Carretera de Toledo, Km. 7,300 - Teléfono 695 25 68.

ZARAGOZA: Avda. de Marina Moreno, 31 - Teléfono 23 75 02 3. (Comercial zona norte.)

MADRID: Carretera de Torrejón a Loeches, Km. 4,200 - Teléfono 675 04 50. TORREJON DE ARDOZ.

Fábricas: Carretera de Toledo, Km. 7,300 - Teléfono 695 25 68. GETAFE.

Oficinas: Orense, 10 - Teléfono: 455 05 35/6/7. MADRID-20.



## Comportamiento aeroelástico de los tableros de puente

Manuel Juliá Vilardell  
Dr. Ingeniero de Caminos

### SINOPSIS

Este artículo analiza la interacción entre las cargas aerodinámicas del viento y la respuesta elástica de los tableros de puente.

Señala las causas que originan vibraciones indeseables, y sus remedios. Presenta una breve historia de los esfuerzos realizados para resolver los problemas que el viento origina, y describe las técnicas modernas para su estudio analítico y experimental.

Recoge, finalmente, los criterios de proyecto que aseguran una menor susceptibilidad de la estructura frente a las acciones, derivadas del viento, que la solicitan.

### 1.— INTRODUCCION

En los últimos años se ha producido un enorme avance en la potencia de los métodos de cálculo de estructuras, fruto del cual ha sido un más exacto conocimiento del comportamiento de las mismas y, como consecuencia, se ha estimulado la tendencia hacia un proyecto más económico de aquellas, utilizando menos materiales. Ello ha dado lugar a que las acciones derivadas del viento hayan aumentado en su importancia relativa, comparadas con las cargas gravitatorias.

Esta tendencia general, se ha puesto claramente de manifiesto en el caso de los puentes, donde en las dos últimas décadas hemos asistido a un notable incremento del número de casos con grandes luces y, más importante aún, a un aumento de las esbelteces. Recordemos, a título de ejemplo, que el puente sobre el Bósforo salva una luz de 1.074 m. con un canto de tablero de 3 m., es decir con una esbeltez de  $1/358$ , mientras que el puente actualmente de mayor luz, el Verrazano-Narrows, último de los clásicos colgantes, tiene una viga de rigidez con esbeltez de  $1/175$ . Pero la última realización, el puente de Humber, ya en fase de construcción, tendrá una esbeltez de  $3/1.396$  es decir  $1/465!!$

Si observamos la Figura 1, resulta evidente que algo ha cambiado en la concepción del tablero de un puente de gran luz, y ese algo ha sido, precisamente, consecuencia del estudio exhaustivo de su comportamiento aeroelástico, fruto de la gran importancia que la acción del viento puede tener en tales estructuras.

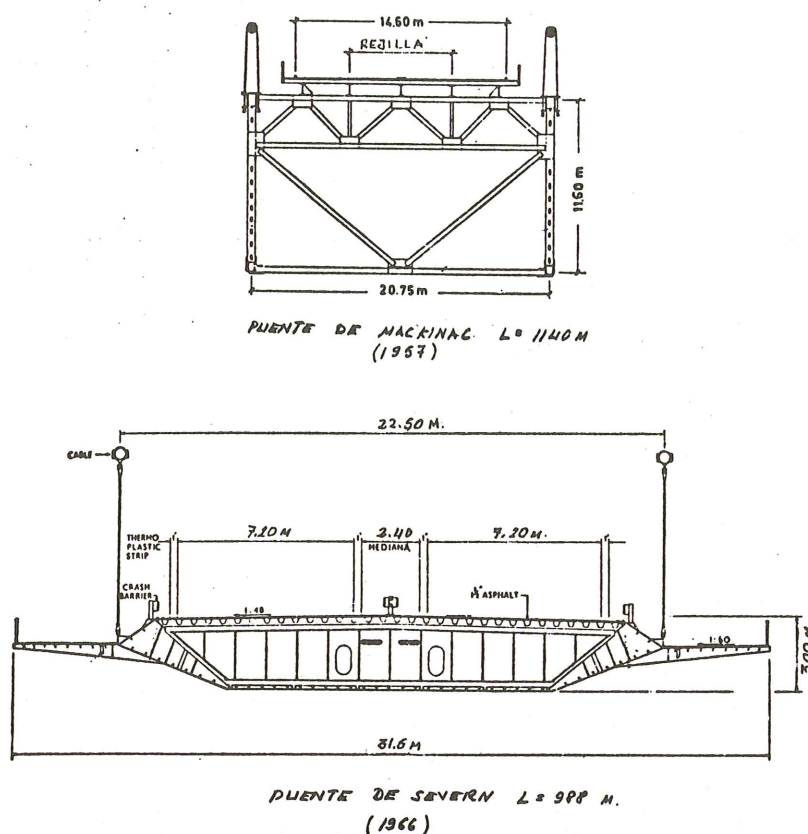


Fig. 1. Evolución de la Sección Transversal.

Sin llegar a estas cifras excepcionales, asociadas todavía a los puentes colgantes de cables parabólicos, la puesta a punto de los métodos de cálculo y de las técnicas de construcción de los puentes atirantados, ha conseguido una gran proliferación de tableros contruidos con esbelteces alrededor del 1/175, si bien es cierto que existen, en proyecto, casos comparables con los grandes puentes colgantes, como por ejemplo el puente sobre el estrecho de Messina.

Esta tipología estructural ha dado lugar, por tanto, a la aparición cada vez más frecuente del problema de los efectos dinámicos del viento sobre el tablero, que estaba tradicionalmente asociado a los puentes colgantes, en donde el proyectista debe considerar que la acción del viento está, en muchos casos, alejada del concepto tradicional, estático, recogido por la inmensa mayoría de las normas.

Y ello es así como consecuencia primaria de la gran deformabilidad, en valores absolutos, de los tableros de gran esbeltez. El flujo del aire que se establece alrededor de la sección del puente puede dejar de ser estacionario, como consecuencia de los movimientos del tablero, de modo que las cargas aerodinámicas, resultantes de las presiones, están condicionadas por aquellos. Y viceversa. Aparece así en el dominio de los puentes la Aeroelasticidad, ciencia que tiene su aplicación "natural" en el campo de la aeronáutica y que ha contribuido de un modo definitivo al asombroso desarrollo de las aeronaves.

El comportamiento dinámico en régimen elástico de una estructura es, hoy en día, un problema que no presenta dificultades graves, siempre que se conozcan las excitaciones actuantes. De modo que de las dos disciplinas que enlaza la Aeroelasticidad, (aerodinámica y elasticidad) es en la primera donde se concentran las incógnitas que debemos resolver.

La aeronáutica dispone de un cuerpo de doctrina muy completo, basado en un refinado aparato matemático, repetidamente comprobado por la experimentación, para dar la respues-



ta a tales incógnitas. Pero todo este cuerpo de doctrina está dirigido a obtener respuestas a preguntas formuladas sobre el comportamiento de objetos que tienen la finalidad de volar, es decir cuerpos con formas carenadas, ángulos redondeados, secciones currentilineas, etc. Muy poco relacionados con la formas romas, angulosas, brascas, que suelen formar parte de los puentes.

Por ello, la unión entre las dos ciencias antes citadas en el campo relativo a los puentes, no es un asunto fácil ni inmediato. No debe pues de extrañar que para llamar la atención de los ingenieros civiles, sobre que los puentes también pueden volar —aunque nadie lo desee— se hayan tenido que producir muchas incomodidades y, lamentablemente, algunas catástrofes.

Pero puesto que las formas generalmente utilizadas en los tableros de puente suponen una agresión contra el flujo de aire que los envuelve, no es de extrañar que la respuesta del mismo sea variada y de difícil descripción, y que la aerodinámica clásica ilumine, tan solo a medias, el camino a seguir. Este hecho aparece claramente si se analizan las distintas teorías que han ido apareciendo para explicar los múltiples fenómenos observados, y se refleja en que no existe un enfoque único que explique coordinadamente el conjunto de fenómenos que, sobre un puente, puede desencadenar el viento.

Por consiguiente, el especialista en puentes que se enfrente con el problema aeroelástico, originado por un proyecto singular, no podrá eludir el hecho de que debe dedicar el tiempo y el esfuerzo que sean precisos al estudio del comportamiento aerodinámico de su concepción estructural. Comprobará que debe recurrir a la experimentación, puesto que en su organigrama de cálculo de la respuesta al viento, le faltará el eslabón, muy difícil de conseguir por vía teórica, que relaciona los movimientos del tablero con las cargas aerodinámicas generadas, es decir, el operador aerodinámico asociado a su forma estructural.

En este artículo se presentan distintos medios de abordar este problema y entre ellos uno original del autor, en los cuales se utilizan modelos reducidos de la estructura, como operadores analógicos para obtener los resultados aerodinámicos con los que completar el proceso de cálculo.

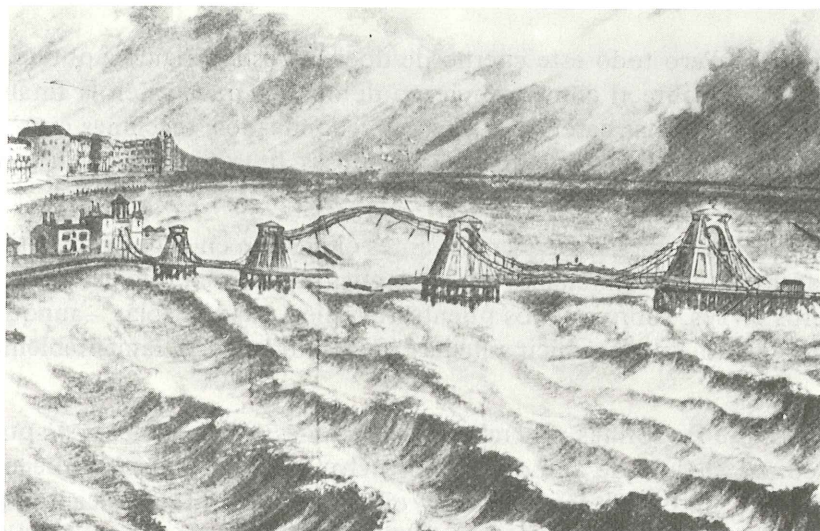
Además se indicará la influencia de los distintos parámetros que intervienen en el fenómeno, fórmulas aproximadas, y criterios generales, que pueden ser útiles en fases de estudio previo, o en casos habituales, sencillos, para los que no es posible realizar el estudio aeroelástico en toda su profundidad.

## 2.— EL COMPORTAMIENTO OBSERVADO

Cuando en el anochecer del 28 de Diciembre de 1879 se hundieron las celosías elevadas del puente sobre el estuario del río Tay, el mundo de la ingeniería no olvidó, nunca más, la gran importancia que puede tener el viento como fuente de empuje estático horizontal. El suceso fue grave, tanto por las pérdidas de vidas humanas, como por el impacto negativo en la estimación de la técnica inglesa de la época Victoriana, pero entre sus consecuencias positivas surgieron los primeros ensayos experimentales para definir la acción del viento.

Se realizaban imprimiendo un movimiento de giro, en aire quieto, a un modelo de la sección del puente, y midiendo el empuje que sobre él actuaba. Se centró la atención sobre el problema de las cargas estáticas del viento, y se definieron las velocidades del mismo que se debían considerar en los proyectos.

Sin embargo estaba pasando desapercibido que el viento ejercía algo más que una carga estática, a pesar de que en 1836, se había hundido el Puente de Brighton de una forma difícilmente explicable en base a una acción de tal naturaleza, (Figura 2).



*Fig. 2. El hundimiento del puente de Brighton.*

El relato que el Lt. Col William Reid realizó del hundimiento del puente de Brighton es muy significativo y de él extraemos el siguiente párrafo :

“El movimiento ondulatorio que se producía a lo largo del tablero es el que se muestra en el primer apunte, pero había también un movimiento oscilatorio de las grandes cadenas a través de la obra... y ambas no ocurrían de una forma acentuada al mismo tiempo”.

Se pone pues de manifiesto la coexistencia de un movimiento oscilatorio vertical junto con otro de giro transversal. Hoy esto nos recuerda, casi inmediatamente, el flameo de las alas de avión, fenómeno que se cobró algunas vidas en los primeros monoplanos, y que retrasó el desarrollo de este tipo de aeronave.

Pero en aquel entonces se suponía que las presiones actuantes en cuerpos romos eran positivas, es decir que se dirigían siempre hacia el interior del cuerpo, y no se comprendía que pudieran presentarse presiones en dirección exterior (succiones), por lo que se ignoraban las características básicas del fenómeno aerodinámico.

Es en 1894 cuando se dan los primeros pasos en la dirección correcta, al estudiar Ir-minger la distribución de presiones sobre cuerpos romos. Situó una serie de modelos en el tiro de una chimenea, y concluyó que la mayor parte de la fuerza actuante procedía de la “rarefacción” del lado de sotavento y no de las presiones positivas de barlovento.

Pero, mientras tanto, y antes de terminar el siglo XIX, el puente del estrecho de Menai había sido dañado por el viento en 1826, 1836 y 1839, presentando un comportamiento completamente similar al del puente de Brighton pues, según el relato de W.A. Probis:

“Parecía que cuando la cumbre de la onda estaba en un punto dado del lado del viento, no era colateral con ella la del lado de sotavento...”.

Y también en 1864, en el puente sobre el Río Ohio, en Wheeling:

“... Al final parecía haber una determinada torsión a lo largo de la totalidad del vano... aproximadamente la mitad del suelo estaba del revés... en cada vibración aumentaba la energía...”.

En este relato, del periódico local, está recogida la esencia del fenómeno, pues pone de manifiesto la ausencia de amortiguamiento de las oscilaciones, circunstancia que, como veremos, desencadena uno de los efectos importantes del viento: La Inestabilidad Aeroelástica.

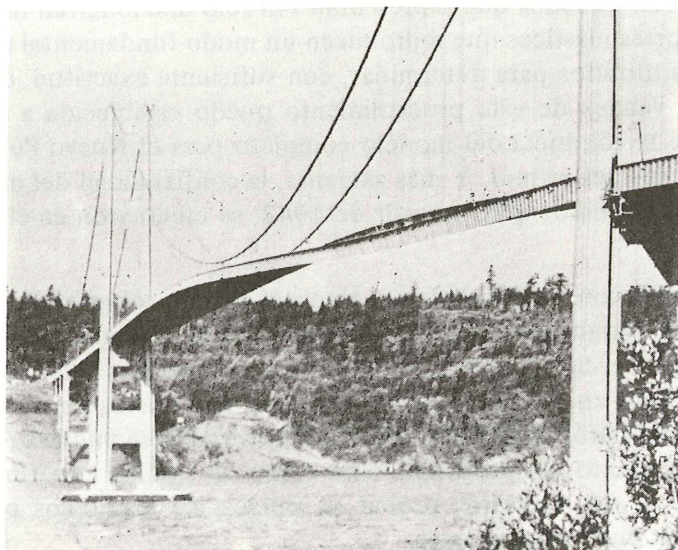


El desarrollo del túnel de viento a finales del siglo XIX, por Eiffel en Francia y Stanton en Inglaterra fue consecuencia de los problemas asociados a las acciones del viento sobre edificios, y sólo más tarde se utilizó en aeronáutica. Con esta herramienta se pudo estudiar ya, de una forma sistemática, los problemas de las cargas aerodinámicas; pero el principal enfoque se dirigió a las formas propias de edificación, torres, etc. Así tenemos en 1914 el estudio de Reff sobre el empuje en cilindros, en 1922 Wielseberg analiza el efecto de la relación de aspecto en el empuje sobre mástiles y en 1930 Dryden y Hill realizan una completísima campaña de ensayos con chimeneas.

Y es también en la década de los años 30 cuando se desarrolló la base científica de la aeronáutica, y se realizaron numerosos ensayos para comprobarla.

Pero, sorprendentemente, los grandes puentes seguían proyectándose con los criterios de equivalencia estática de la acción del viento, a pesar de que se había superado los 1.000 metros de luz del vano (George Washington, 1931, Golden Gate, 1937), y a pesar de que se registraban importantes oscilaciones en ellos, para ciertas velocidades del viento.

El 7 de Noviembre de 1940 se hundía el puente de Tacoma con un viento, para el que la carga estática equivalente era del orden de tres veces menos que la considerada en proyecto como admisible (Figura 3).



*Fig. 3. La rotura del puente de Tacoma.*

La naturaleza de las oscilaciones que originaron su rotura ha sido ampliamente descrita, gracias a que se registraron en una película, hecho no fortuito, sino consecuencia de la constante atención que le dedicaba el profesor Faquharson, pues ya desde su inauguración había dado muestras de una extremada susceptibilidad dinámica frente al viento. En la filmación podemos apreciar la semejanza con las roturas descritas anteriormente.

Este accidente fue la señal ineludible de que debía de cambiarse el criterio con que se analizaba la acción del viento, y la fecha en que ocurrió puede considerarse como el principio de la aplicación de la Aeroelásticidad al estudio del comportamiento de los tableros de puente frente al viento.

### **3.— LAS PRIMERAS INVESTIGACIONES**

Como consecuencia de la conducta del puente de Tacoma, tanto durante su construc-



ción como después, en servicio, la Administración de Vías Públicas, el Departamento de Carreteras del Estado de Washington, y la Universidad de Whashington, promovieron conjuntamente un programa de investigaciones experimentales sobre un modelo completo. Estos ensayos estaban en curso de ejecución cuando sobrevino el hundimiento, y continuaron después de él.

Dirigidos por el profesor Faquharson, se analizaron en ellos la influencia que, sobre la susceptibilidad del puente al viento, tenían la rigidez de las vigas del tablero, de las torres, la presencia de tirantes inclinados, de la carga muerta, etc. y los resultados se publicaron bajo el título de "Estudios de Laboratorio sobre el Puente de Estrecho de Tacoma".

El estudio de este informe, junto con otros cuatro más sobre el mismo tema, uno de ellos de Von Karman, condujeron a que la Administración de Vías Públicas nombrara en 1942 el "Comité para la Investigación de los Puentes Colgantes".

Fué en el seno de este comité donde surgieron algunas de las primeras tentativas de un planteamiento teórico del problema que explicara los mecanismos físicos subyacentes. Apoyándose, claro está, en una campaña experimental paralela, que puso de manifiesto que una serie de puentes tenían que ser reforzados lo antes posible, entre ellos el de mayor luz de aquel entonces, el conocido Golden Gate. Pero además la investigación reveló que los modelos seccionales, es decir aquellos que representan tan solo una longitud limitada del tablero, montados sobre resortes elásticos que reproducen un modo fundamental de la oscilación del mismo, pueden ser utilizados para determinar, con suficiente exactitud, el comportamiento del puente real. La validez de este procedimiento quedó establecida a través de rigurosas comparaciones entre la conducta del modelo completo para el Nuevo Puente de Tacoma, y los modelos seccionales del mismo. Y más adelante, la confiabilidad del modelo seccional se vió confirmada en los estudios que, a partir de 1943, se efectuaron en el Puente de Golden Gate.

A partir de 1952, con motivo del proyecto del Puente sobre el Río Severn, Frazer y Scruton establecieron claramente la correspondencia adimensional que debe existir entre el prototipo y el modelo seccional, para que los resultados medidos sobre este último sean extrapolables a aquel. Pero en esta primera época, el uso de modelos no era considerado como un medio para obtener datos analíticos, a partir de los cuales se pudiera efectuar un cálculo teórico del comportamiento del prototipo, sino como un análisis experimental, útil y final en si mismo, frente al que deberían probar su validez los resultados procedentes de los cálculos basados en las teorías propuestas.

#### 4.— LOS ANTECEDENTES TEORICOS

Hacia 1911, en el curso de unos ensayos sobre el comportamiento del flujo alrededor de un cilindro, Teodoro Von Karman tuvo ocasión de justificar teóricamente la aparición de una inestabilidad en la estela, aguas abajo del obstáculo, y que es conocida desde entonces como calle de Torbellinos de V. Karman.

Estos torbellinos, que se observaron detrás del cilindro inmóvil, corresponden pues a una inestabilidad del flujo estacionario, y son el reflejo visible de una variación de la circulación alrededor del obstáculo, y por tanto de una variación de las cargas resultantes. La naturaleza de esta variación está regida por el valor del  $n^{\circ}$  de Reynolds de la corriente, y en un determinado intervalo del mismo (que en el cilindro es aproximadamente desde  $10^2$  a  $10^5$ ) es una clara oscilación, de frecuencia dominante bien definida, regida por el  $n^{\circ}$  de Strouhal, que se mantiene constante en el intervalo de R citado:

$$S = f \cdot d/V = 0,22 \text{ (para el cilindro)}$$

en donde:

- $f$  = frecuencia del desprendimiento
- $d$  = diámetro
- $V$  = Velocidad de la corriente.

Esta estela de torbellinos origina una fluctuación armónica de la presión alrededor del cuerpo, que da lugar entre otras, a una fuerza, perpendicular a la dirección de la corriente, y que habitualmente se expresa como:

$$F = (1/2 \rho V^2) C_k \cdot A \cdot \sin. \omega t. \quad (1)$$

donde:

- $1/2 \rho V^2$  = presión dinámica
- $\rho$  = densidad
- $A$  = área
- $\omega = 2 \pi f = V 2 \pi / d$
- $C_k$  = coeficiente que depende de la forma, y que es constante para el obstáculo inmovil.

En 1932, Den Hartog publicó sus estudios sobre las vibraciones observadas en las líneas de tendido eléctrico, recubiertas de hielo. Admitió la hipótesis de que cuando el hilo oscila en presencia de una velocidad horizontal  $V$ , aparecen sobre él unas fuerzas iguales a las que aparecerían si el hilo, inmóvil, recibiera la corriente de aire con un ángulo de inclinación  $\alpha = h/V$ , con respecto a la horizontal.

Si suponemos que el hilo es un oscilador lineal, que se comporta como un sistema de un grado de libertad, cuya masa corresponde a la de una longitud unidad,  $m$ , con frecuencia  $\omega_0$  y porcentaje de amortiguamiento,  $\xi$ , la ecuación de equilibrio vertical será:

$$m (\ddot{h} + 2 \xi \omega_0 \dot{h} + \omega_0^2 h) + L(\alpha) = 0 \quad (2)$$

siendo,  $L(\alpha)$  la fuerza de sustentación debida al viento, en régimen estacionario, función del ángulo de ataque  $\alpha$ . (Figura 4).

$$L(\alpha) = (1/2 \rho V^2) \cdot A \cdot C_L(\alpha) \dots \quad (3)$$

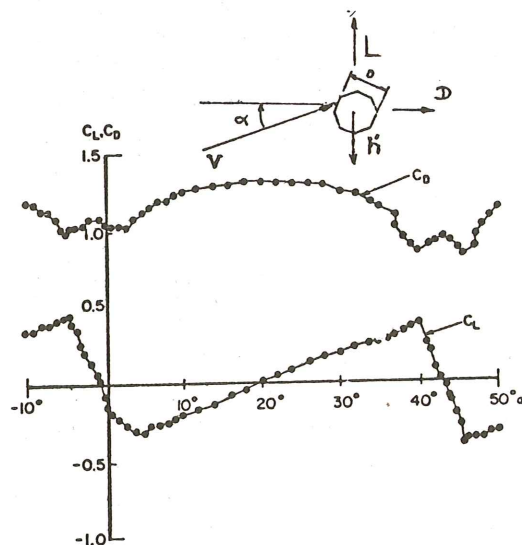


Fig. A. Fuerza de Sustentación y Arrastre para un cilindro octogonal estacionario. Se indican los sentidos considerados positivos.



En la figura se observa que el coeficiente de sustentación estacionaria,  $C_L$ , puede expresarse como una función polinómica en  $\alpha$ .

$$C_L(\alpha) = a_0 + a_1 \alpha + a_2 \alpha^2 + a_3 \alpha^3 + \dots \quad (4)$$

lo cual ocurre más o menos aproximadamente en todos los casos, cualquiera que sea la forma de la sección transversal. En la zona del origen es posible ignorar los términos superiores y escribir:

$$C_L(\alpha) = C_0 + \left( \frac{dC_L}{d\alpha} \right)_0 \alpha \dots \dots \quad (5)$$

Así que para el hilo moviéndose con una pequeña velocidad, tenemos,

$$m(\ddot{h} + 2\xi\omega_0\dot{h} + \omega_0^2 h) + \left( \frac{1}{2} \rho V^2 \right) A \left( C_0 + \left( \frac{dC_L}{d\alpha} \right)_0 \frac{h}{V} \right) = 0 \dots \dots \quad (6)$$

Esta ecuación, como es bien sabido representa un movimiento oscilatorio, cuyas amplitudes están moduladas exponencialmente, del tipo  $\bar{h} = \bar{H} e^{(-\beta + i\omega)t}$ .

$$\text{En donde: } \beta = \xi\omega_0 + \frac{1}{4} \frac{\rho A}{m} \left( \frac{dC_L}{d\alpha} \right)_0 V \dots \dots \quad (7)$$

de modo que si  $\beta = 0$  la oscilación será estacionaria. Ello ocurrirá si:

$$V = V^* = - \frac{4\xi\omega_0}{\left( \frac{\rho A}{m} \right) \left( \frac{dC_L}{d\alpha} \right)_0} \dots \dots \quad (8)$$

Lo cual sólo es posible si la pendiente en el origen es negativa, ya que todas las demás cantidades son siempre positivas. Es inmediato que cuando, siendo la pendiente negativa, la velocidad del viento  $V$  sea mayor que  $V^*$ , las oscilaciones aumentarán de amplitud indefinidamente.

Este modelo matemático representa en cierto modo el comportamiento observado de las oscilaciones de las líneas de tendido eléctrico por lo que puede ser representativo de las mismas, siempre que se cumplan las hipótesis supuestas que son, básicamente: linealidad, comportamiento estacionario del flujo, y ángulos de ataque ficticios ( $\bar{h}/V$ ) próximos a cero.

Theodorsen, en 1935, publicó sus estudios teóricos sobre el comportamiento de una placa plana, oscilando en el seno de un fluido incomprensible, bidimensional. Se completaba así un período, iniciado en 1929 por Glauert, durante el cual se buscó una explicación teórica de las oscilaciones inestables que aparecían en los planos de sustentación y de control de los aviones, en determinadas condiciones, durante el vuelo.

Para el cálculo y la predicción de este fenómeno, conocido como flameo, era preciso conocer las fuerzas que la corriente de aire originaba sobre los perfiles de sustentación, cuando estos realizaban movimientos de traslación vertical y de giro. La solución teórica de Theodorsen se estableció para la placa plana, de espesor idealmente nulo, elemento que representaba una aproximación de los perfiles utilizados en la práctica, y aunque su planteamiento fue absolutamente general, la ecuación resultante se integró para el caso particular en el cual el movimiento del perfil era el de un sólido rígido con traslación y giro armónicos, de la misma frecuencia, obteniendo la conocida función del Theodorsen,  $G(ik)$  que es la admitancia aerodinámica del mencionado perfil plano ideal.

Si definimos en notación compleja el movimiento armónico del perfil como:

$$\bar{h} = \bar{h}_0 e^{i\omega t}$$

$$\bar{\alpha} = \bar{\alpha}_0 e^{i\omega t}$$



se obtiene que la fuerza de sustentación  $L$  y el momento  $M$ , alrededor del punto medio de la cuerda del perfil oscilante con frecuencia  $\omega$  están dados por:

$$L_h = \pi \rho b^2 (\ddot{h} + V \dot{\alpha}) + 2 \pi \rho V b C(ik) (\dot{h} + U \alpha + \frac{b \dot{\alpha}}{2}) \dots \dots \quad (9)$$

$$M = -\pi \rho b^2 \left( \frac{V b \dot{\alpha}}{2} + \frac{b^2}{8} \ddot{\alpha} \right) + \pi \rho V b^2 C(ik) (\dot{h} + U \alpha + \frac{b \dot{\alpha}}{2}) \dots \dots \quad (10)$$

en donde  $b$  es la semicuerda de la placa (semi-ancho), y  $k$  la frecuencia reducida (adimensional) igual a  $\omega b/V$ .

La función de Theodorsen  $C(ik)$  es igual a:

$$C(ik) = F(k) + i G(k) = \frac{H_1^{(2)}(k)}{H_1^{(2)}(k) + i H_0^{(2)}(k)} \dots \dots \quad (11)$$

siendo  $H_n^{(2)}$  funciones de Bessel.

En la Figura 5 se indica el sentido positivo de las variables. Una inspección de las ecuaciones que definen las cargas aerodinámicas  $L, M$  nos indica que hay un primer sumando en fase con los parámetros del movimiento, y otro que representa fuerzas y momentos desfasados, en una magnitud dependiente de la frecuencia de la oscilación y de la velocidad de la corriente ambos factores agrupados en la variable  $k$ .

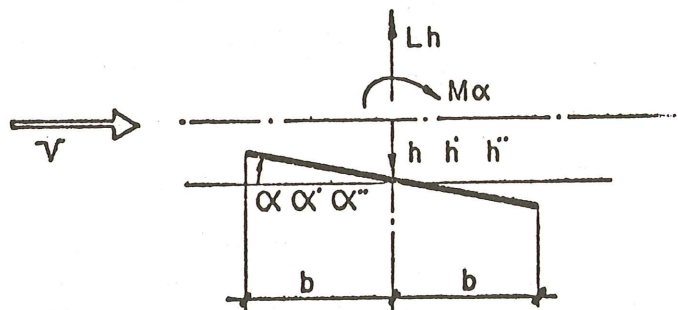


Fig. 5.

Se obtiene una clara idea del significado de  $C(ik)$  si se consideran las expresiones simplificadas utilizadas en aeronáutica, cuando se estudian movimientos no estacionarios, pero de frecuencia reducida ( $k$ ) muy pequeña, bien sea debido a que el movimiento del perfil tenga muy baja frecuencia ( $\omega$ ) o esté situado en una corriente de elevada velocidad ( $V$ ), pero dentro de los límites de incompresibilidad.

Una primera simplificación procede de considerar que las cargas aerodinámicas son las de flujo estacionario. En tal caso resulta:

$$L = 2 \pi \left( \frac{1}{2} \rho V^2 \right) (2b) \left( \alpha + \frac{\dot{h}}{V} \right) \dots \dots \quad (12)$$

la cual aparecería también de la expresión de Theodorsen si se admitiera que los efectos de las aceleraciones y de las velocidades angulares son nulos, ya que además para  $K = 0$   $C(0) = 1$ . Esta simplificación es completamente análoga a la realizada por Den Hartog al estudiar las oscilaciones de líneas de tendido eléctrico, pues aquí ( $2\pi$ ) es la pendiente del coeficiente de sustentación de la placa plana, en el origen.

Una mejor aproximación se obtiene si no se ignoran los efectos de las aceleraciones ni de la velocidad angular, sino que tan solo se supone que para  $k \simeq 0$ ,  $C(k) = 1$ , con lo cual:

$$L = \pi \rho b^2 (\ddot{h} + V \dot{\alpha}) + 2 \pi \left( \frac{1}{2} \rho V^2 \right) 2b \left( \alpha + \frac{\dot{h}}{V} + \frac{b \dot{\alpha}}{2V} \right) \dots \dots \quad (13)$$

Esta formulación se denomina “quasi-estacionaria”, y en ella se desprecian los efectos de la estela, suponiendo que los vórtices que a ella se vierten, consecuencia de la oscilación, se trasladan instantaneamente al infinito.

Así pues  $C(ik)$ , además de modular la amplitud de la fuerza, traduce el desfase que existe entre ella y el movimiento, circunstancia que procede de que para cada incremento infinitesimal del movimiento del perfil, la variación de presión asociada no alcanza su valor final instantaneamente, debido a que el vórtice vertido a la estela posee una influencia variable con su alejamiento del perfil.

## 5.— LOS PRIMEROS PLANTEAMIENTOS TEORICOS

Los tres fenómenos descritos en el apartado anterior, desprendimiento de vórtices, vibración de líneas (llamado galope), y el flameo, fueron las bases en que se apoyaron los primeros planteamientos teóricos para la resolución de los problemas aeroelásticos de los puentes. Y, curiosamente, dieron lugar a tres líneas fundamentales de actuación, paralelas, cada una de las cuales pretendía, y no conseguía, explicar correctamente todo el conjunto de fenómenos observados. Debían de transcurrir unos años para que se valoraran en su justa medida las aportaciones de cada una de ellas y se modificaran convenientemente para describir con más precisión los fenómenos reales.

### 5.1.— Los Torbellinos

Habiendo formado parte Von Karman de una de las varias comisiones que investigó la ruina del puente de Tacoma, es lógico que atribuyera la rotura de éste al efecto del desprendimiento de torbellinos. Cualitativamente, el proceso puede describirse así: Si se supone que el puente es un oscilador lineal, y que el aire genera una estela periódica de torbellinos, equivalentes a una excitación forzada armónica, bastará que esta alcance una frecuencia natural del sistema, para que se produzca una situación de resonancia y, consecuentemente, un continuo aporte de energía hasta la rotura, si el amortiguamiento de la estructura no es capaz de extraer tal energía, al mismo ritmo con que se introduce, antes de producirse aquella.

Los ensayos en modelo reducido confirmaron que, efectivamente, se producían condiciones de resonancia pero, además, pusieron de manifiesto que el fenómeno no era lineal, en el sentido de que la amplitud del movimiento alteraba la frecuencia del desprendimiento, la cual se acoplaba a la frecuencia de oscilación del modelo, incluso a velocidades del viento para las que la frecuencia de desprendimiento a modelo parado era superior.

En otros ensayos efectuados por Vincent, Wiles y Cayes, se puso de manifiesto que la frecuencia de la oscilación de los puentes de celosía, en la situación próxima a la rotura, no coincidía con ninguna frecuencia natural de la estructura; si no que estaba comprendida entre una natural de vibración vertical y otra de giro.

Además el número de Strouhal no era siempre constante, cuando el modelo era forzado a vibrar mecánicamente.

Así pues, el planteamiento lineal, en el cual la fuerza aerodinámica se supone como una fuerza de excitación, exterior e independiente del movimiento, no explica suficientemente los hechos registrados.

## 5.2.—La Pendiente Negativa y otros criterios

La teoría de la pendiente negativa fue adoptada por D.B. Steinman, y publicada en 1943, extendiendo las hipótesis presentadas anteriormente, para los hilos, al caso de las secciones de puentes. El concepto básico de anulación del amortiguamiento total de la estructura, seguía siendo el criterio que establecía la velocidad para la cual podían esperarse oscilaciones catastróficas. Era pues importante definir el amortiguamiento estructural, a lo que Steinman dedicó un gran esfuerzo, adoptando la siguiente expresión empírica, para oscilaciones verticales y torsionales en puentes colgantes:

$$\Delta_s = (0,001 + 0,06 R) \left( 1 + 1,70 \frac{n}{1} \sqrt{a_m \cdot d} \right) \dots \quad (14)$$

siendo  $\Delta_s$  el decremento logarítmico estructural asociado al modo de vibración, cuya forma modal tiene  $n$  semi-ondas.

$1$  la luz del vano central.

$a_m$  la amplitud de la oscilación

$d$  el canto de las vigas de rigidez.

$R$  el porcentaje de rigidez debida al tablero (en comparación con la debida a cables, torres, etc.) (Véase Tabla 1).

Por otra parte, el decremento logarítmico producido por la carga aerodinámica que, como se ha visto, depende de la pendiente de la curva del coeficiente estático de sustentación, es:

$$\Delta = \left( \frac{dC_L}{d\alpha} \right)_0 \frac{\rho B}{4m} V \dots \quad (15)$$

con  $B$  = ancho del tablero y  $m$  = masa por unidad de longitud.

La condición  $\Delta_s - \Delta = 0$  conduce a que la velocidad crítica para oscilaciones verticales, sea:

$$V^* = - \frac{1 + 60 R}{15 \left( \frac{dC_L}{d\alpha} \right)_0} \sqrt{\frac{W}{B}} \sqrt{\frac{2K}{B}} \dots \quad (16)$$

en la cual  $W$  es el peso por unidad de longitud y  $2K$  la rigidez elástica asociada al modo de vibración que se esté considerando (rigidez generalizada del modo  $n$ -ésimo).

Se ha supuesto en la expresión de  $\Delta_s$ , que  $a_m = 0$ , por estar el tablero, inicialmente, en equilibrio.



TABLA 1.

| Fecha | Puente            | K<br>por<br>cable | K<br>por<br>pie<br>de ancho | Porcentaje<br>debido a: |             |
|-------|-------------------|-------------------|-----------------------------|-------------------------|-------------|
|       |                   |                   |                             | Cable                   | Viga<br>(R) |
| 1.903 | Williamsburg      | 1.082             | 32,40                       | 22                      | 78          |
| 1.939 | Wabash River*     | 327               | 26,20                       | 0                       | 100         |
| 1.931 | Maumce River*     | 648               | 22,00                       | 51                      | 49          |
| 1.926 | Philadelphia      | 735               | 16,52                       | 44                      | 56          |
| 1.931 | Waldo-Hancock     | 212               | 15,14                       | 56                      | 44          |
| 1.929 | Grand More        | 188               | 14,48                       | 34                      | 66          |
| 1.909 | Manhattan         | 618               | 12,88                       | 31                      | 69          |
| 1.930 | Mid-Hudson        | 262               | 12,50                       | 56                      | 44          |
| 1.929 | Mount Liope       | 201               | 11,82                       | 54                      | 46          |
| 1.936 | Trihorough        | 547               | 11,18                       | 66                      | 34          |
| 1.936 | Transbay          | 324               | 9,81                        | 62                      | 38          |
| 1.931 | St. Johns         | 262               | 9,70                        | 65                      | 35          |
| 1.938 | Thousand Islands* | 141               | 9,25                        | 74                      | 26          |
| 1.938 | Thousand Islands* | 127               | 8,30                        | 78                      | 22          |
| 1.929 | Detroit           | 212               | 7,13                        | 71                      | 29          |
| 1.939 | Deer Isle*        | 69                | 5,85                        | 80                      | 20          |
| 1.938 | Vancouver         | 112               | 5,62                        | 67                      | 33          |
| 1.931 | George Washington | 244               | 4,60                        | 100                     | 0           |
| 1.939 | Brons-Whitestone* | 141               | 3,81                        | 97                      | 3           |
| 1.940 | Tacoma*           | 62                | 3,16                        | 98,5                    | 1,5         |
| 1.937 | Golden Gate       | 116               | 2,56                        | 95                      | 5           |

\* Significa construcción con vigas de rigidez de alma llena

TABLA 2

| PUENTE                   | $\omega_a/\omega_h$ |
|--------------------------|---------------------|
| Tacoma                   | 1,25                |
| Kniebrücke               | 1,42                |
| Leverküsen               | 1,58                |
| Rande                    | 1,53                |
| Brotonne                 | 3,22                |
| Golden Gate (modificado) | 1,96                |
| Severn                   | 3,97                |
| Saint Nazaire            | 4,25                |

Esta formulación de la velocidad crítica, pone de manifiesto que aumenta su valor si la pendiente del gráfico de sustentación es pequeña, si hay gran peso muerto por unidad de ancho, y si la rigidez elástica es elevada.

Un razonamiento paralelo, conducía a la expresión de la velocidad crítica para las oscilaciones de torsión.

Ahora bien, Steinman se dió cuenta de que este planteamiento ignoraba el desfase existente entre el movimiento del tablero y las cargas aerodinámicas resultantes (que, como hemos visto, aparece claramente en las expresiones de Theodorsen) y corrigió las expresiones anteriores, introduciendo un factor  $\gamma$ , función de la frecuencia reducida  $k$  ( $\omega b/V$ ), (en donde  $\omega$  es la frecuencia natural del sistema) para tener en cuenta el efecto del desfase.

$$\gamma = \frac{\sin \phi}{\phi}$$

$$\phi = \frac{\omega B}{V} \dots \quad (17)$$

El amortiguamiento aerodinámico pasaba a ser:

$$\Delta = \left( \frac{dC_L}{d\alpha} \right)_0 \gamma \frac{\rho B}{4m} V.$$

El razonamiento utilizado para justificar la expresión de este factor  $\gamma$ , carece de rigor, pues postula una hipotética perturbación de presión que se origina en el borde de ataque, y recorre el ancho del tablero con la velocidad del viento,  $V$ . Si la velocidad del viento es tal que todo el recorrido de la perturbación (que equivale a una fuerza móvil) se realiza durante un intervalo de tiempo igual a  $1/4$  del período el trabajo realizado será positivo, y habrá aportación de energía constante (se supone, naturalmente, que la fuerza tiene sentido del desplazamiento). Si por el contrario, tarda medio período en recorrer el ancho, se encontrará con una inversión de fase a mitad del recorrido, y la energía aportada será nula.

Los conceptos aerodinámicos asociados a esta teoría son muy inexactos, y su mayor limitación es que no puede explicar los fenómenos oscilatorios en puentes que posean diagramas estacionarios con pendientes positivas que, no obstante, ocurren, tal como se deducía de numerosas pruebas obtenidas en los ensayos de Faquharson. Así que el propio Steinman, la abandonó posteriormente, y en 1949 publicó otro estudio fundado en conceptos análogos a los de la teoría del flameo, aunque con una formulación muy personal de las cargas aerodinámicas, en la que seguía manteniendo su concepto de perturbación de presión atravesando con la velocidad de la corriente el ancho del tablero.

Steinman desarrolló, paralelamente, un estudio de la correlación entre la rigidez vertical de los tableros, por unidad de ancho ( $2K/B$ ), y su susceptibilidad a las oscilaciones originadas por el viento, (Tabla I). Consideró como un hecho significativo que, todos los puentes colgantes con vigas de rigidez de alma llena, con valores de  $2K/B < 15$ , y todos los puentes colgantes con vigas de celosía, en los que  $2K/B < 6$  habían estado sometidos a oscilaciones aerodinámicas, indeseables o peligrosas.

Por otra parte ocurría que los puentes proyectados con los criterios habituales de la época, con esbelteces del orden de  $1/100$  daban origen a valores del parámetro  $2K/B$  iguales a los límites citados.

Fundándose en estas observaciones estableció unos criterios de estabilidad, considerando la contribución que, a la rigidez  $2K$ , efectúan los distintos elementos estructurales (cables, vigas, torres, etc.).

Uno de estos criterios es que debe cumplirse que:

$$EI > \frac{B L^4}{120 \sqrt{f}} \dots \quad (18)$$

I = inercia de medio tablero

f = flecha de los cables

L = luz del vano central

Las palabras con que Steinman presentó este resultado fueron, textualmente: “Aquí tenemos, por fin, una respuesta a la pregunta que ha desafiado a los ingenieros de puentes durante un siglo: ¿Cuánta rigidización requiere un puente colgante? Cualquier puente colgante con un sistema de rigidización que satisfaga la ecuación. . . (18) será aerodinámicamente estable en el intervalo normalmente requerido para la velocidad del viento”.

### 5.3.—El flameo

Cuando el primer modelo reducido del nuevo Puente de Tacoma, fue ensayado en el túnel de viento, a finales de 1943, apareció una oscilación torsional, pero su frecuencia era un 8 por 100 menor que la frecuencia de torsión natural del modelo cuando se le excitaba, manualmente, en aire quieto. Además, el borde aguas abajo tenía oscilaciones de mayor amplitud que las del borde enfrentado a la corriente.

Friedrich Bleich asoció este comportamiento con el que experimentan en determinadas condiciones las alas y otros elementos de los aeroplanos, fenómeno llamado flameo.

Existía ya, en aeronáutica, una teoría para abordar este problema, por lo que Bleich la aplicó inmediatamente al comportamiento del puente que tenía ante sí. En 1945 presentó sus conclusiones al Comité de Investigación de Puentes Colgantes, y más tarde, en 1947, un segundo informe, modificando y generalizando lo anterior. El contenido de estas comunicaciones constituye una amplia y bien fundada teoría, que fue incorporada a las publicaciones oficiales del Comité.

El concepto básico que subyace en la teoría del flameo es que cuando una placa, en el seno de una corriente de aire, describe una oscilación, el flujo se ve afectado por este movimiento y, consecuentemente, cambia la distribución de presiones alrededor del obstáculo. Ello equivale a la aparición sobre el cuerpo de una fuerza variable, en posición y magnitud, según las características del movimiento. Si este es armónico, se origina la fuerza (y el momento) descritos por Theodorsen, cuya intensidad y fase, con relación a la oscilación, varían en función de la frecuencia de aquélla y de la velocidad de la vena.

Como es sabido, toda fuerza que esté en fase con la velocidad de una oscilación armónica, hace que el sistema no sea conservativo, introduciendo o extrayendo energía del mismo según sea del mismo signo o del contrario a la velocidad.

Así pues si una placa dotada de un grado de libertad, en presencia de una corriente de aire es apartada de su posición de reposo, además de las fuerzas de inercia, elástica y amortiguamiento estructural, recibirá la acción de una carga aerodinámica, que tendrá una componente en fase con la velocidad.

Tanto la intensidad como el signo de esta componente variarán con la velocidad de la vena. Si ésta es tal, que dicha componente alcanza un valor igual y contrario al de la fuerza representativa del amortiguamiento estructural, la oscilación será estacionaria, y podrá conver-



tirse en divergente, y por tanto catastrófica, si un ligero aumento de la velocidad de la corriente acarrea un aumento del valor absoluto de la carga aerodinámica en fase con la velocidad.

Este tipo de flameo, asociado a un movimiento de un grado de libertad, ya sea de traslación o de giro, está descrito en el modelo:

$$m (\ddot{y} + 2 \xi \omega_0 \dot{y} + \omega_0^2 y) = F(iK, y) \dots \quad (19)$$

en donde  $y$  es la coordenada del movimiento;  $F(iK, y)$  la carga aerodinámica de Theodorsen.

Esta es una ecuación homogénea y lineal, ya que la linealidad está presente en las cargas aerodinámicas. Se supone que  $y = \bar{y}_0 e^{i\omega t}$ , y los autovalores de la ecuación proporcionan las condiciones en que es posible el movimiento estacionario, es decir el principio del flameo.

Pero las masas y formas que se utilizan habitualmente en aeronáutica, impiden que en la práctica pueda presentarse inestabilidad con un solo grado de libertad, por lo que la Ec.19, aún siendo teóricamente posible, no tiene solución en la práctica.

En cambio, si se supone que la placa tiene dos grados de libertad, uno de traslación y otro de giro, las ecuaciones que rigen un posible movimiento armónico en el seno de la corriente de aire son:

$$m (\ddot{h} + 2 \xi_n \omega_n \dot{h} + \omega_n^2 h) = L(iK, h, \alpha) \quad (20a)$$

$$I (\ddot{\alpha} + 2 \xi_\alpha \omega_\alpha \dot{\alpha} + \omega_\alpha^2 \alpha) = M(iK, h, \alpha) \dots \quad (20b)$$

La solución de este sistema es:

$$\bar{h} = \bar{h}_0 e^{i\omega t} \dots \dots \dots$$

$$\bar{\alpha} = \bar{\alpha}_0 e^{i\omega t} \dots \dots \dots$$

cuya existencia es posible para las condiciones  $\omega, K = (\omega b/V)$  definidos por los autovalores del sistema (20), el cual puede verse que está acoplado a través de las cargas aerodinámicas.

Este modelo representa muy bien el comportamiento observado en los perfiles de sustentación, en el caso de flujo incompresible y bidimensional, por lo que es utilizado para predecir las condiciones de flameo, considerando en él las características de una sección típica (a 0,7 L de arranque) del ala.

En su primer trabajo, Bleich lo adoptó directamente para explicar el comportamiento de los tableros del puente.

Para ello asimiló el tablero a una placa plana, con dos grados de libertad, cuyas masas y frecuencias eran las correspondientes a los primeros modos de vibración por flexión y torsión. Como cargas aerodinámicas adoptó las únicas que conocía; las de Theodorsen. La decisión no era del todo inapropiada, pues la calzada del tablero podía fácilmente asimilarse a una placa plana, si se ignoraban las vigas de rigidez.

Y este planteamiento dió lugar al cálculo de una velocidad de flameo muy próxima a la observada en el ensayo del modelo reducido del Nuevo Puente de Tacoma.

Pero, al aplicarlo al estudio del Golden Gate, no dió buen resultado; lo que pudo explicarse por un tratamiento indebido del amortiguamiento estructural y, más importante, porque en este caso el tablero no podía considerarse como una placa plana de espesor ideal nulo.

Se vió pues en la necesidad de modificar las cargas aerodinámicas. Y para ello supuso que las vigas de rigidez alteraban el flujo alrededor de la calzada (responsable de las cargas formuladas por Theodorsen) originando la formación de unos torbellinos, debido a su forma roma. Este fenómeno daba lugar a una nueva fuerza aerodinámica, que se debía sumar a las de la placa plana.

Formuló dicha fuerza como sigue:

$$L_v = 2 \pi \left( \frac{1}{2} \rho V^2 \right) (2b) (A_v + i B_v) \left( \alpha + \frac{h}{V} \right) \dots \quad (21)$$

En esta expresión (que como puede comprobarse tiene la misma estructura que las cargas de Theodorsen)  $(A_v + i B_v)$  son funciones de  $(\omega b/V)$ , propias de la forma de la sección, que deben determinarse mediante ensayos en modelo reducido.

Daba así el primer paso en la utilización del modelo reducido como un operador analógico en el proceso de cálculo, método que hoy es ampliamente utilizado.

## 6.—LAS CAUSAS DE LAS OSCILACIONES

Todo aquello que altere el flujo alrededor de un cuerpo dará lugar a la aparición de una variación de la presión sobre la superficie del mismo. Si éste es capaz de moverse lo hará, y con este movimiento contribuirá a que se modifique nuevamente el flujo, y por tanto las cargas aerodinámicas. Si el cuerpo es un oscilador, se establecerá un movimiento periódico, que podrá ser amortiguado, sostenido o divergente, según sea el balance energético de todas las fuerzas que entren en juego en el proceso.

Las causas que pueden originar una alteración del flujo estacionario, establecido alrededor de un obstáculo son:

- a) La presencia de variación aleatoria en las velocidades de la corriente incidente, es decir la turbulencia.
- b) La inestabilidad de la estela estacionaria, detrás del obstáculo, que origine un desprendimiento periódico o aleatorio de torbellinos.
- c) Las fluctuaciones de la capa límite, desprendiéndose y adheriéndose a la superficie, como consecuencia del movimiento del obstáculo.
- d) La distorsión de las líneas de corriente, aún sin desprendimiento de capa límite, debidas al movimiento del cuerpo.

Las dos primeras causas tienen en común que no exigen movimiento del cuerpo para producir alteración de presiones, por lo que son consideradas muchas veces como “acciones exteriores”; la primera de tipo aleatorio y la segunda de tipo determinista. Pero en un cuerpo susceptible de oscilar, dejan de tener este carácter de acción exterior, al ser modificadas por el movimiento del cuerpo.

Así pues, el viento real dará lugar a fuerzas variables sobre un cuerpo elástico, y por tanto deformable, que dependerán de la turbulencia existente, y del movimiento del mismo (puede considerarse la inmovilidad como un estado límite del movimiento).

Dejando aparte la turbulencia, y considerando la incidencia de una corriente completamente uniforme, el carácter de las fuerzas originadas por el movimiento depende de la forma del cuerpo y de la velocidad de la corriente, de tal modo que aquél presenta comportamientos aparentemente diversos que, como hemos visto, dan lugar a distintos modelos matemáticos para su estudio.

Sin embargo es posible que un mismo cuerpo, y en particular, una misma sección de tablero pase sucesivamente por toda la serie de comportamientos, al variar, con la velocidad de la vena, la naturaleza del flujo a su alrededor.



## 6.1.—Cuerpos perfilados y cuerpos romos

En aeronáutica se utilizan secciones que cuando están inmóviles (en un flujo bi-dimensional) no desprenden nunca torbellinos, ni se separa la capa límite, si el ángulo de incidencia de la corriente es menor que un determinado valor. Son los llamados cuerpos perfilados, cuyo límite es la placa plana de espesor ideal nulo.

Si estos perfiles se apartan de su posición de equilibrio, dentro del límite en que no hay separación reciben las cargas aerodinámicas procedentes de la distorsión de las líneas de corriente, y oscilan.

Cuando la velocidad de la corriente es superior a un valor crítico, las fuerzas aerodinámicas anulan el amortiguamiento estructural y se produce el flameo llamado clásico, con acoplamiento de flexión y torsión.

Si durante las oscilaciones se supera el valor del ángulo de ataque relativo límite, se separa la capa límite, y las fuerzas aerodinámicas dejan de ser las de Theodorsen, pero puede producirse el llamado flameo con pérdida.

En contraposición, hay cuerpos que aún estando inmóviles desprenden torbellinos y sufren separación de la capa límite, con ángulos de ataque nulos, cuerpos que denominamos romos. Son secciones romas los cilindros circulares, elípticos y poligonales.

Los cuerpos perfilados se caracterizan también porque la dimensión perpendicular a la dirección de la corriente incidente es pequeña y mucho menor que la dirección longitudinal, paralela a aquella (cuerda). En los cuerpos romos, ambas dimensiones son semejantes.

En los tableros de puente encontramos características intermedias: por una parte se presenta, en general, la situación propia de los cuerpos romos, al producirse desprendimiento de torbellinos aún estando inmóviles; por otra la dimensión de la cuerda es notablemente mayor que la transversal de tal manera que es posible, bajo ciertas condiciones, que la capa límite desprendida vuelva a adherirse algo más adelante, aguas abajo, aproximándose al flujo global al de una sección perfilada.

## 6.2.—Evolución del flujo

Cuando una corriente de aire incide sobre el tablero de un puente, el flujo cambia de naturaleza a medida que, con la velocidad de aquélla, cambian los números de Reynolds y los de Strouhal y, con ello, cambia también el comportamiento del tablero.

Para valores bajos de la velocidad del aire, se produce la separación de la capa límite, originándose un desprendimiento periódico de torbellinos, cuya frecuencia, variable con la velocidad, es aproximadamente la que correspondería si el tablero estuviera inmóvil, es decir la dada por el número de Strouhal, que se llama habitualmente “frecuencia de desprendimiento natural”.

Puesto que el tablero tiene un cierto movimiento, en virtud de su deformación elástica, el flujo no es exactamente igual al que se establecería en el caso de inmovilidad. La “diferencia” entre el flujo estacionario (con inmovilidad) y el real, es la responsable de que las frecuencias de desprendimiento de torbellinos, y la magnitud de las cargas aerodinámicas, sean distintas de las estacionarias. Pero si esta frecuencia está alejada de las frecuencias naturales principales de la estructura, el movimiento de ésta no es muy importante, y por tanto las cargas aerodinámicas son casi iguales a las estacionarias.

Al ir aumentando la velocidad de la corriente, la frecuencia del desprendimiento va acercándose a una de las primeras frecuencias fundamentales de la estructura. Cuando la proximi-



dad es grande, el movimiento de la estructura es suficiente para que las fuerzas aerodinámicas "correctivas" de las estacionarias, aumenten su importancia, de modo que la coincidencia entre frecuencia de desprendimiento (de carga aerodinámica) y de oscilación principal, se verifique para valores de la velocidad que, en el modelo inmóvil no darían lugar a tal frecuencia común.

Esta situación se denomina de "enganche". El tablero y la carga aerodinámica oscilan con la misma frecuencia muy próxima, pero no igual, a la natural del sistema elástico. Ello es debido a que el tablero se prolonga, más allá de los puntos de separación de las capas límite, dentro de la estela, dominando con su oscilación el mecanismo de la formación y desprendimiento de torbellinos.

Las amplitudes de la oscilación aumentan como consecuencia del aporte energético en esta condición de resonancia. Y la modificación del flujo estacionario es tan importante, que la frecuencia de oscilación, común, se mantiene a pesar de que cambie apreciablemente, aumentando, la velocidad de la corriente que, con el tablero inmóvil, originaría frecuencias de desprendimientos superiores. (Figura 6).

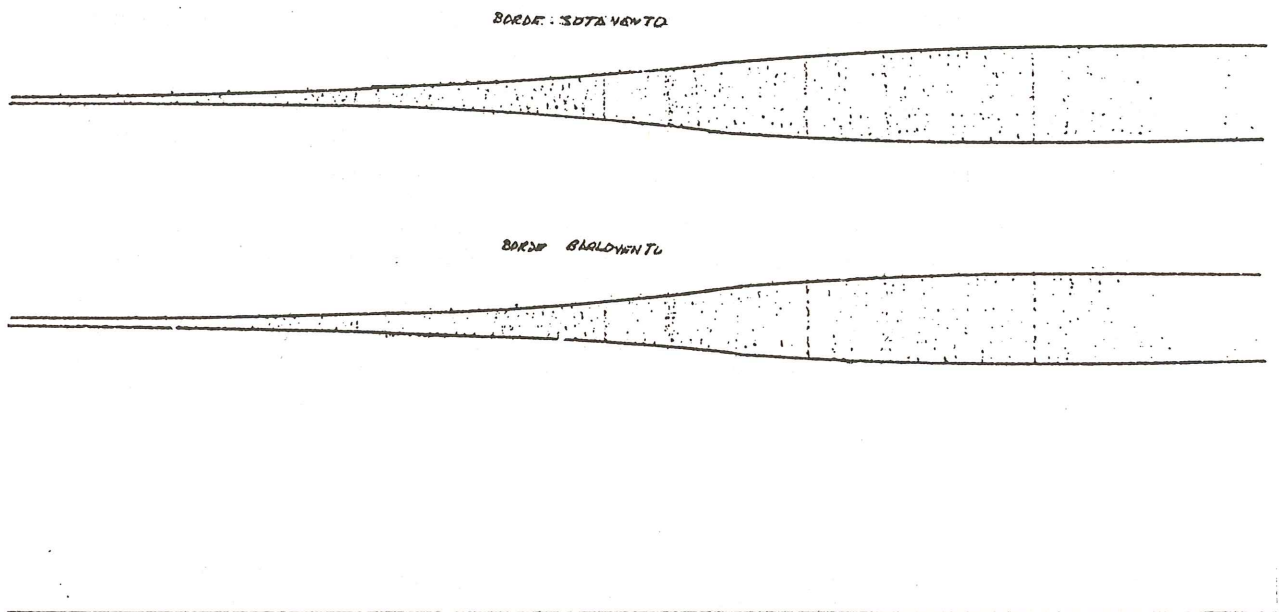


Fig. 6. Oscilaciones de los bordes de un tablero en situación de "enganche".

Esta situación de enganche se mantiene hasta un cierto límite de velocidad tal que, de repente, se restablece la frecuencia de desprendimiento próxima a la que correspondería en caso de flujo estacionario, disminuyendo rápidamente el movimiento.

El proceso descrito puede repetirse, cuando al ir aumentando la velocidad, nos acercamos a las proximidades de otra frecuencia fundamental del sistema elástico.

Pero para cierto valor, crítico, del número de Reynolds, el desprendimiento periódico, con frecuencia definida claramente, se transforma en una estela turbulenta. Desaparece entonces la oscilación quasi-armónica de las cargas aerodinámicas y, en su lugar, la excitación del tablero pasa a ser errática, así como el movimiento resultante. Las capas límites tienden a adherirse nuevamente al obstáculo.

A partir de ese cambio de situación, el flujo no tiende a producir movimientos importantes al tablero. Si alguna causa externa lo consigue, las cargas aerodinámicas actúan como fuer-

zas amortiguantes. Pero, al seguir el aumento de la velocidad se llega a un valor tal que, las cargas aerodinámicas generadas por una perturbación exterior (o por el propio movimiento errático debido a la turbulencia de la capa límite) corresponden a una fuerza de amortiguamiento negativo, anulándose e invirtiendo el signo del intercambio energético del sistema. Se llega así a un crecimiento continuo de la amplitud de las oscilaciones, que se transformarán en armónicas de frecuencia principal claramente definida, fenómeno muy similar al flameo con pérdida. (Figura 7).

Esta situación se denomina de inestabilidad aeroelástica.

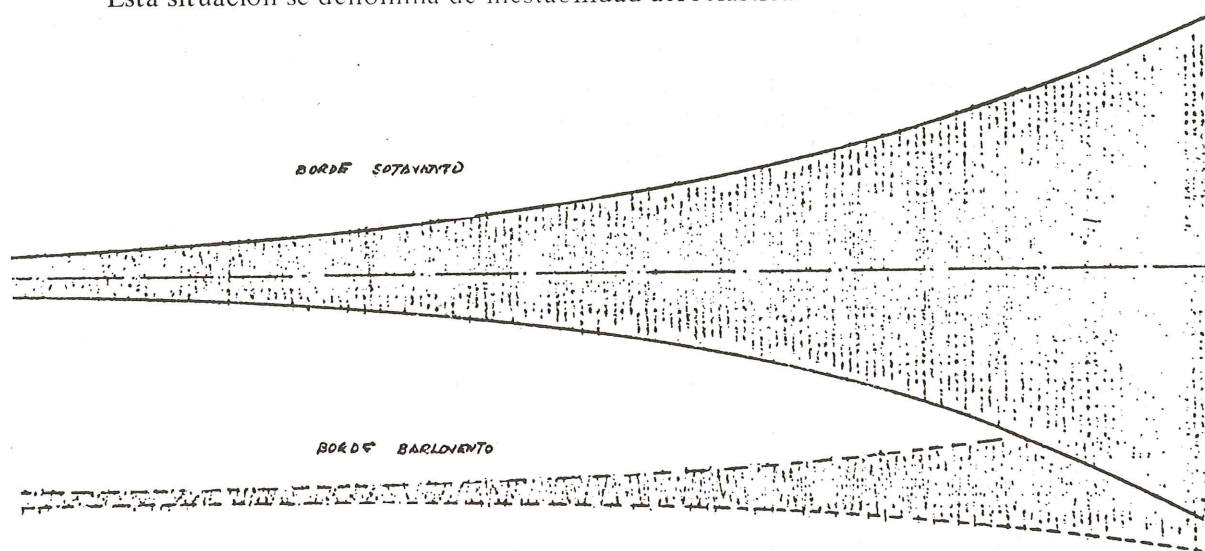


Fig. 7. Oscilaciones de los bordes de un tablero en situación de INESTABILIDAD AEROELASTICA.

## 7.—LOS MODELOS MATEMATICOS PARA EXPLICAR EL COMPORTAMIENTO DE LOS TABLEROS

La descripción, realizada en el apartado precedente, de los fenómenos observables en los tableros de puente, pone de manifiesto que existen dos situaciones aparentemente dispares. En la zona llamada de baja velocidad, el comportamiento del tablero está regido por el desprendimiento periódico de torbellinos. En la zona de altas velocidades, el tablero se comporta con cierta analogía a los perfiles utilizados en aeronáutica.

Por consiguiente, es lógico que los modelos matemáticos adecuados para justificar y prever estos comportamientos diversos, sean también distintos.

Sin embargo la diferencia esencial en los planteamientos analíticos, se centra en el modelo representativo de la fuerza aerodinámica, ya que la estructura, en ambos casos, se define por medio de un sistema elástico lineal; aunque el número de grados de libertad considerados sea distinto en cada caso.

### 7.1.—La estructura

La estructura se asimila a un oscilador lineal, continuo, de dos grados de libertad, traslación vertical y giro alrededor del centro elástico del tablero. Debido a la simetría transversal, normalmente existente, no suelen aparecer fuerzas ni momentos de acoplamiento inercial



o elástico. Pero en algunos casos no es así, apareciendo fuerzas elásticas y de inercia debidas al giro, y momentos debido a la traslación.

Tal fue el caso de los puentes de Zárate y Brazo Largo (Argentina), en los cuales la situación excéntrica de un ferrocarril, obligó a reforzar el tablero y el plano de cables en correspondencia con el lado de la vía, originándose así una masa del tablero y una rigidez disimétricas.

A partir de un análisis modal, con la determinación previa de las frecuencias y formas modales naturales, la parte estructural de las ecuaciones de equilibrio (fuerzas de inercia, amortiguamiento y elásticas) se transforma en un sistema de  $2n$  pares de ecuaciones. Como es habitual que, para mayor sencillez las formas modales se obtengan considerando que la estructura no posee amortiguamiento, ni acoplamiento elástico-inercial, este sistema de  $2n$  pares de ecuaciones solamente estará diagonalizado (es decir sólo aparecerá una coordenada generalizada por cada ecuación) si no hay acoplamiento inercial o elástico, y si el amortiguamiento es proporcional.

En ese caso, tendremos  $n$  pares de ecuaciones del tipo:

$$\begin{aligned} m_r \ddot{q}_r + C_{hr} \dot{q}_r + m_r \omega_{hr}^2 q_r &= F_{hr} \\ I_r \ddot{p}_r + C_{\alpha r} \dot{p}_r + I_r \omega_{\alpha r}^2 p_r &= M_{\alpha r} \end{aligned} \quad (22)$$

En donde:

$m_r$  = masa generalizada en el modo  $r$  (flexión).

$I_r$  = inercia generalizada en el modo  $r$  (torsión).

$C_{hr}$  = coeficiente de amortiguamiento (proporcional) a flexión modo  $r$ .

$C_{\alpha r} = \text{id. a torsión.}$

$\omega_{hr}^2, \omega_{\alpha r}^2$ , frecuencias naturales, a flexión y torsión, modo  $r$ .

Y como es sabido, la solución será:

$$\begin{aligned} h(x, t) &= \sum q_r(t) \phi_r(x) \text{ (traslación)} \\ \alpha(x, t) &= \sum p_r(t) \psi_r(x) \text{ (giro)} \end{aligned} \quad (23)$$

$\phi_r(x), \psi_r(x)$  son las formas modales desacopladas del modo  $r$ , en flexión y torsión, obteniéndose casi siempre en forma de vector y no como función continua, debido a que la complejidad de la estructura obliga a un análisis discreto. (Figuras 8 y 9).

Los términos de la derecha de las ecuaciones (22) son las cargas aerodinámicas generalizadas asociados al modo  $r$ , bien sea de flexión o torsión.

Es un hecho comprobado experimentalmente que la forma de oscilación real tiene un gran porcentaje de participación de la primera forma modal. Así que la aproximación que supone considerar reducidas las series (23) al primer término, es normalmente admisible. Y más aún, si las formas modales desacopladas de flexión y torsión son iguales (lo que ocurre, por ejemplo, con tableros de sección abierta en donde  $\phi_r(x) = \psi_r(x)$ , la solución así obtenida es exacta si las cargas aerodinámicas son lineales. (Referencia 6).

Es muy frecuente, por lo tanto, que la estructura se represente por sus primeros modos naturales, ya sea de flexión o de torsión.

## 7.2.—La carga aerodinámica en la zona de baja velocidad

Puesto que en la zona de baja velocidad, las oscilaciones son debidas a un fenómeno muy



semejante a la resonancia, éstas son, muy aproximadamente, de un solo grado de libertad, sea de traslación o de giro, según se esté en una frecuencia de desprendimiento próxima a la de un modo fundamental de flexión o torsión. Este fenómeno ha sido muy estudiado en relación con las formas típicamente romas, cilindros circulares, poligonales, etc., y ha sido comprobado experimentalmente en tablero de puentes (Figura 6).

La ecuación que describe esta situación es, por tanto:

$$m (\ddot{y} + 2 \xi \omega_n \dot{y} + \omega_n^2 y) = F_y = \left( \frac{1}{2} \rho V^2 \right) L d C_y \dots \quad (24)$$

en donde  $y$  es el desplazamiento vertical o el giro,  $F_y$  la carga aerodinámica asociada (fuerza o momento) que, como se ve, se expresa a través del coeficiente adimensional  $C_y$ , siendo  $d$  una dimensión, normalmente la transversal a la corriente y  $L$  la longitud considerada.

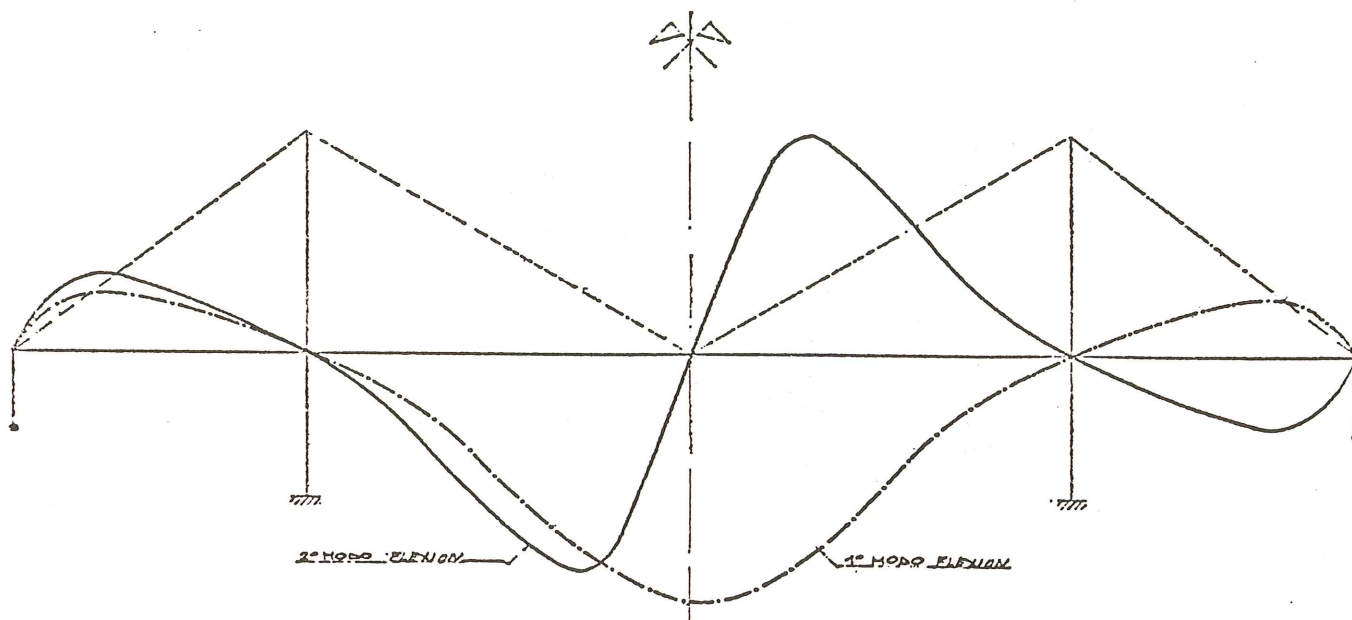


Fig. 8.

Como se ha dicho anteriormente, las máximas oscilaciones se producen en las zonas de enganche, por lo que el interés principal reside en la definición de  $C_y$  en esos contornos. Los ensayos realizados demuestran que fuera de esos intervalos, el desprendimiento de torbellinos apenas si tiene influencia sobre el movimiento de la estructura.

La primera aproximación para  $C_y$  consiste en suponer que la carga aerodinámica es una acción exterior, armónica, de frecuencia igual a la natural de la estructura, y de amplitud constante; es decir:

$$C_y = C_{TK} \sin \omega n t \dots \quad (25)$$

$C_{TK}$  se llama coeficiente de Von Karman, y depende de la forma de la estructura y del ángulo de incidencia.

Si se conoce  $C_{TK}$ , basta aplicar el concepto de admitancia del sistema lineal amortiguado, descrito por las ecuaciones (24) y (25) para obtener como amplitud máxima de la oscilación el valor:

$$A = \frac{\pi}{\Delta} \frac{C_{TK}}{m \omega_n^2} \left( \frac{1}{2} \rho V^2 \right) \cdot L \cdot d \dots \quad (26)$$

En donde  $\Delta$  es el decremento logarítmico natural de la estructura y  $V$  la velocidad para la que se produce la resonancia, deducible, en esta aproximación, a partir del  $n^o$  de Strouhal estacionario, que es constante:

$$V = \frac{\omega_n d}{2 \pi S}$$

Klöppel y Thiele (Referencia 1) han determinado los números de Strouhal para varias secciones típicas de tablero, referidos al canto como dimensión característica. A partir de ellos, y midiendo las amplitudes máximas que se desarrollan en los ensayos, han obtenido utilizando la ecuación (26) una serie de valores para  $C_{TK}$ , útiles en casos semejantes, dada su adimensionalidad.

Esta aproximación, no explica convenientemente el fenómeno del enganche que, como hemos visto da lugar a una frecuencia ligeramente distinta de la natural, que se mantiene inalterada para un cierto intervalo de velocidades variables.

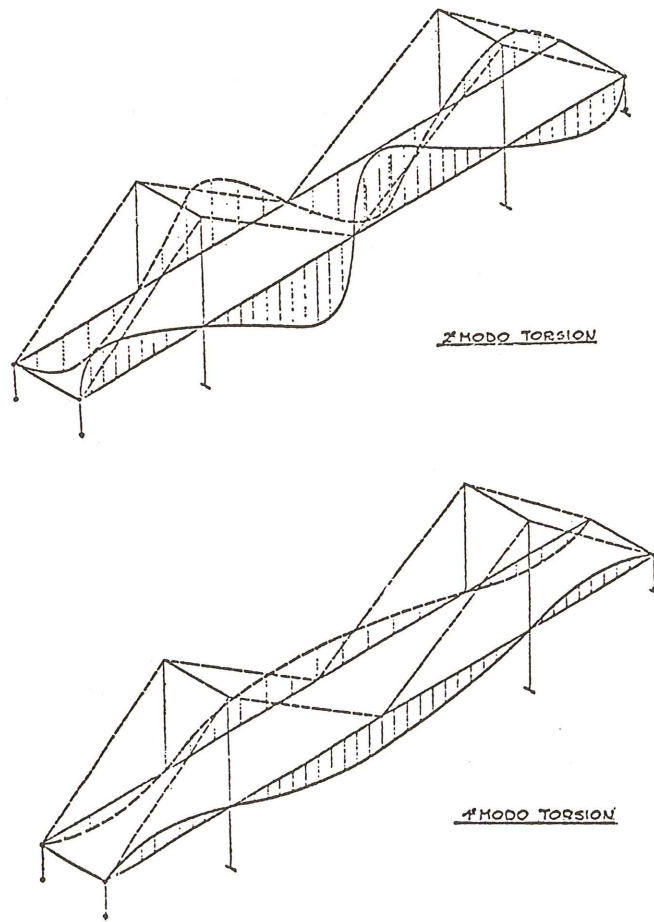


Fig. 9.

Un segundo planteamiento consiste en suponer que la carga  $F_y$  se compone de dos sumandos; Uno, función lineal de los parámetros del movimiento, modulados por una admitancia, trata de tener en cuenta la influencia correctiva de la distorsión del flujo debida al movimiento, que se traduce en una variación de la rigidez y del amortiguamiento estructural. El otro sumando es la fuerza creada por los torbellinos.

Se tiene en tal caso:

$$F_y = \left(\frac{1}{2} \rho V^2\right) \cdot L \cdot d \left[ Y_1 (Kn) \frac{\dot{y}}{V} + Y_2 (Kn) \frac{y}{d} + \frac{1}{2} C_L (Kn) \cdot \sin (\omega_n t + \phi) \right] \dots (27)$$

en donde se sigue admitiendo que la frecuencia de la carga, es igual a la natural del sistema,  $\omega_n$ .

La resolución de la ecuación de equilibrio da origen a un movimiento armónico amortiguado, de modo que la máxima amplitud  $A$ , el decremento logarítmico  $\Delta$ , y la frecuencia circular  $\omega$ , de dicho movimiento pueden ponerse en función de  $Y_1 (Kn)$ ,  $Y_2 (Kn)$  y  $C_L (Kn)$ .

La frecuencia circular  $\omega$  es ligeramente distinta de la natural de la estructura,  $\omega_n$ , debido a los términos de rigidez y amortiguamiento aerodinámicos postulados.

Sometiendo un modelo reducido semejante, del tablero en estudio, a una serie de ensayos en los que se varía la frecuencia reducida ( $Kn = \omega_n d/V$ ), y registrando  $A$ ,  $\Delta$  y  $\omega$  se pueden obtener las funciones  $Y_1$ ,  $Y_2$ ,  $C_L (Kn)$ .

Estas funciones, adimensionales, son utilizadas luego para determinar la velocidad de "resonancia" del puente real, entrando con los parámetros de este en la ecuación del movimiento (Referencia 5).

Pero, al igual que en el primer caso, este enfoque no reproduce el fenómeno del enganche.

Hay que introducir el concepto de la no linealidad de la carga aerodinámica para conseguir este objetivo. Así lo han efectuado Hartlen y Currie (Referencia 2) que consideran que el comportamiento del conjunto tablero-fluido puede describirse mediante el acoplamiento de un oscilador lineal (estructura) con otro no lineal, del tipo de Van der Pol, que equivale al fluido.

Resulta entonces:

$$\begin{aligned} m (\ddot{y} + 2 \xi \omega_n \dot{y} + \omega_n^2 y) &= \left(\frac{1}{2} \rho V^2\right) d \cdot L C_y \dots \\ \ddot{C}_y - A \omega_v \dot{C}_y + \frac{B}{\omega_v} \dot{C}_y^3 + \omega_v^2 C_y &= D \dot{y} \dots \end{aligned} \quad (28)$$

$A$ ,  $B$ ,  $D$  son constantes positivas.

$\omega_v$  = frecuencia del oscilador equivalente al fluido

$$\omega_v = \frac{2 \pi S V}{d}$$

$A$ ,  $B$  y  $D$  se determinan mediante ensayo en modelo. Así, por ejemplo, si el modelo está inmóvil ( $\dot{y} = 0$ ) la segunda ecuación da origen a una oscilación armónica de frecuencia  $\omega_v$  y amplitud  $C_{y0} = \sqrt{\frac{4}{3} \frac{A}{B}}$

Midiendo  $C_{y0}$  se tiene pues una ecuación. Seguidamente se fuerzan movimientos de amplitudes y frecuencias conocidas y la medición de las cargas aerodinámicas permiten obtener dos restantes ecuaciones y de ahí las tres constantes para la forma estudiada.

El modelo representado por las ecuaciones (28) predice aceptablemente el enganche, cuando  $\omega_v$  (frecuencia de desprendimiento) tiende a  $\omega_n$  (frecuencia natural de la estructura). En la figura 10-a pueden verse los resultados experimentales para un cilindro triangular, en donde se pone de manifiesto que cuando  $\omega_v$  se aproxima a  $\omega_n$  (al ir creciendo  $V$ ) se produce el enganche. En la figura 10b, se indica la predicción teórica, para un cilindro circular, del mo -



delo de Hartlen y Currie, en donde el enganche, para velocidades ascendentes, se produce en el intervalo 2-3, y para las descendentes en 10-11; existiendo por consiguiente un bucle de histéresis.

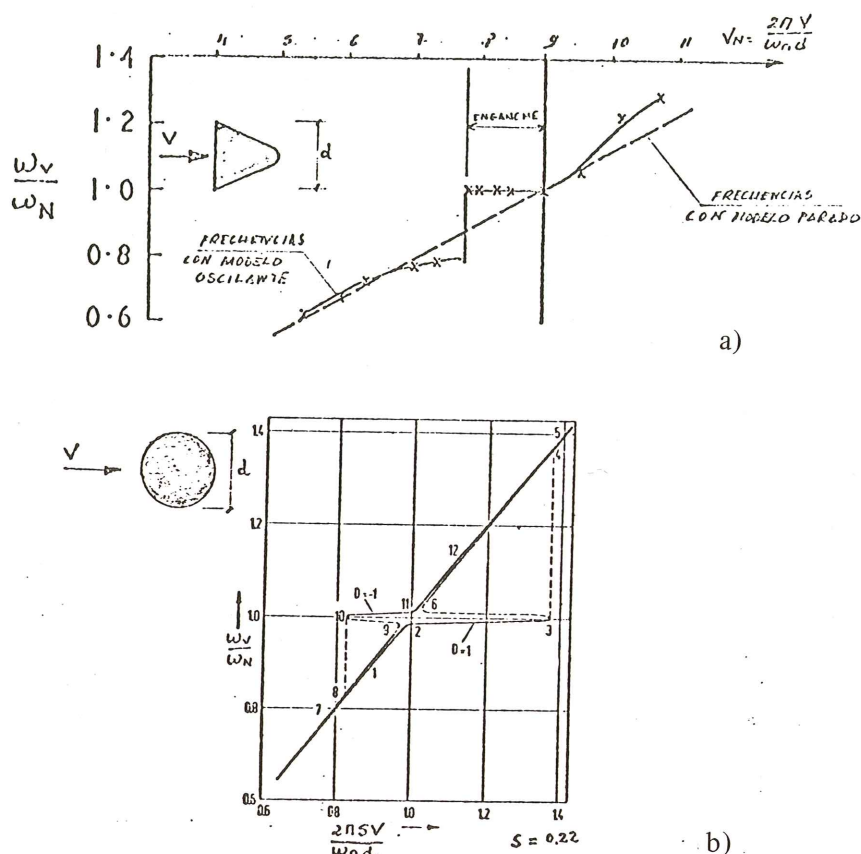


Fig. 10. El fenómeno del enganche  
a) Experimental; b) Teórico.

### 7.3.—La carga aerodinámica en la zona de alta velocidad

La semejanza entre el comportamiento de los tableros de puente y los perfiles aeronáuticos, en la zona de alta velocidad, ha influido para que se adopte un modelo lineal de las cargas, en el caso de puentes. Como hemos visto, el primer intento, histórico, se efectuó considerando las cargas dadas por Theodorsen. Pero no se debe perder la vista que tales expresiones se obtienen sólo en la hipótesis de pequeña perturbación que lleva a la dependencia lineal entre las cargas aerodinámicas y los parámetros (posición, velocidad, aceleración) del movimiento.

Ensayos sobre modelos reducidos han puesto de manifiesto que la linealidad, en el caso de tableros de puente, sigue siendo una aproximación admisible cuando las amplitudes del movimiento son muy pequeñas. Por el contrario, si las amplitudes son elevadas, deja de ser cierta esta relación, estableciéndose una dependencia más complicada.

Dado que las cargas aerodinámicas son necesarias, en esta zona de velocidades, para obtener las condiciones para las que es posible la existencia de una oscilación sostenida, sin que se pretenda determinar la amplitud de la oscilación, el planteamiento lineal es suficiente por cuanto conduce a un sistema homogéneo cuyos autovalores definen las condiciones buscadas.

Las cargas pueden pues formularse como el producto de una admitancia (función de la frecuencia reducida) por el vector representativo del movimiento armónico, que se produce, en el momento de iniciarse la inestabilidad.

La expresión de las cargas aerodinámicas, lineales, puede efectuarse, en notación compleja, como sigue:

$$\begin{aligned}\bar{L} &= \left(\frac{1}{2} \rho V^2\right) (2b) [H_h^L(ik) \cdot \frac{\bar{h}}{b} + H_\alpha^L(ik) \bar{\alpha}] \dots \\ \bar{M} &= \left(\frac{1}{2} \rho V^2\right) (2b^2) [H_h^M(ik) \cdot \frac{\bar{h}}{b} + H_\alpha^M(ik) \bar{\alpha}]\end{aligned}\quad (29)$$

En donde  $\bar{L}$ ,  $\bar{M}$ , son la fuerza y el momento por unidad de longitud, valores complejos, que establecen la magnitud y su desfase con el movimiento armónico  $\bar{h}$ ,  $\bar{\alpha}$ .

Existen cuatro funciones de admitancia,  $H(ik)$  que representan la fuerza (o el momento) que se produce sobre el tablero, cuando éste efectúa un movimiento armónico de traslación  $h$  (o giro  $\alpha$ ) a una frecuencia  $\omega$ , en el seno de una corriente de velocidad  $V$ , es decir, bajo una frecuencia reducida  $K = \omega b/V$ . Como es habitual  $b$  representa el semi-ancho del tablero.

El verdadero problema reside en la determinación de estas admitancias en el caso de los tableros de puente pues, una vez conocidas, las condiciones de inestabilidad (para las cuales, es posible la existencia de una solución no amortiguada) vendrán dadas por los autovalores el sistema de equilibrio (22).

En la Figura 11 se representan las cuatro admitancias complejas para un tablero asimilable a la placa ideal, cuya obtención es inmediata, manipulando convenientemente las expresiones de Theodorsen (9) y (10) hasta ponerlas en la forma (29).

Hoy por hoy, no se dispone de medios teóricos para deducir las admitancias en cuerpos romos, por lo que en el caso de tableros de puentes hay que recurrir al apoyo experimental. En la Figura 12 se indican algunas deducidas por Scanlan para secciones romas. Se notará la falta de un par de coeficientes (ya que las cuatro admitancias complejas dan lugar a ocho componentes), pero ello es debido a que ignora los efectos de las aceleraciones verticales.

Scanlan utiliza notación real, de modo que plantea (29) como:

$$\begin{aligned}L &= \left(\frac{1}{2} \rho V^2\right) (2b) [KH_1^* \frac{\dot{h}}{V} + KH_2^* \frac{b \dot{\alpha}}{V} + K^2 H_3^* \alpha] \dots \\ M &= \left(\frac{1}{2} \rho V^2\right) (2b) [KA_1^* \frac{\dot{h}}{V} + KA_2^* \frac{b \dot{\alpha}}{V} + K^2 A_3^* \alpha]\end{aligned}\quad (30)$$

Establecidas las cargas aerodinámicas, la inestabilidad acoplada de flexión-torsión se resuelve utilizando cualquiera de los métodos usuales, bien establecidos, para el flameo.

No obstante, en el caso de los tableros de puente, la inestabilidad acoplada presenta como componente dominante el modo de torsión, por lo que, un análisis de la inestabilidad con un solo grado de libertad, a torsión, conduce a la obtención de condiciones críticas (velocidad  $V$  y frecuencia  $\omega$ ) ligeramente superiores, y muy próximas a las acopladas. Dicho de otro modo, los tableros de puente pueden presentar flameo sin acoplamiento, en el modo de torsión, circunstancia que las caracteriza y distingue de las formas y de los perfiles utilizados en aeronáutica, en las cuales se necesita, en la práctica, un acoplamiento para iniciarse la inestabilidad.

Así pues las admitancias más importantes en el caso de puentes son las de torsión,  $H_\alpha^M(ik)$ .

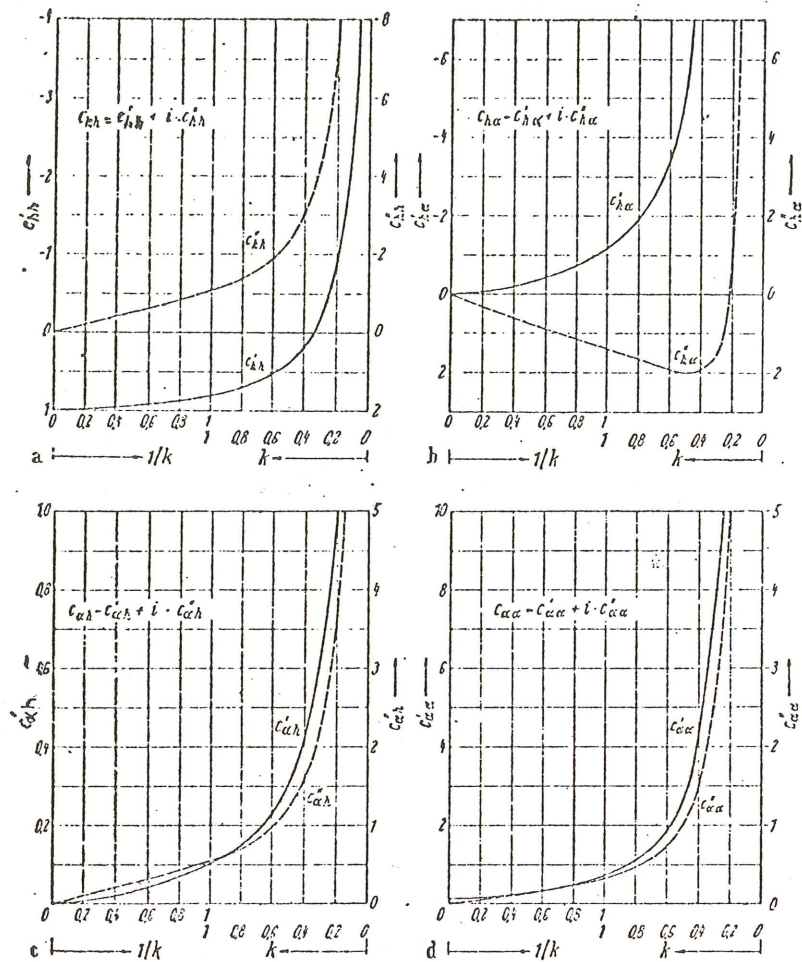


Fig. 11. Admitancias teóricas para placa plana.

## 8.—LOS METODOS DE ESTUDIO DEL PROBLEMA AEROELASTICO

El análisis del comportamiento de un puente, tanto en el caso de oscilaciones debidas al desprendimiento de torbellinos, como en la zona de alta velocidad para la que es posible que exista inestabilidad de flameo, debe efectuarse con el auxilio de ensayos en modelo reducido, ya que no existe un método que permita obtener las cargas aerodinámicas a partir de principios teóricos básicos.

Los ensayos pueden clasificarse en dos categorías:

a) Aquéllos cuya finalidad es reproducir a escala el comportamiento del puente real, y de los cuales se pretende extraer, por vía de análisis dimensional, los movimientos y frecuencias del prototipo, así como las velocidades del viento natural, para las que se presentan.

b) Ensayos en los que se trata de conseguir expresiones adimensionales, que dependen de la forma del tablero (parámetros que se resisten a un cálculo teórico) y a partir de ellas resolver las ecuaciones adimensionalizadas que rigen el comportamiento del prototipo.

La primera clase de ensayos corresponde a la utilización habitual de los modelos reducidos, debiendo respetarse la adimensionalidad de todas las variables que intervienen en el fenómeno, lo cual suele originar grandes inconvenientes.



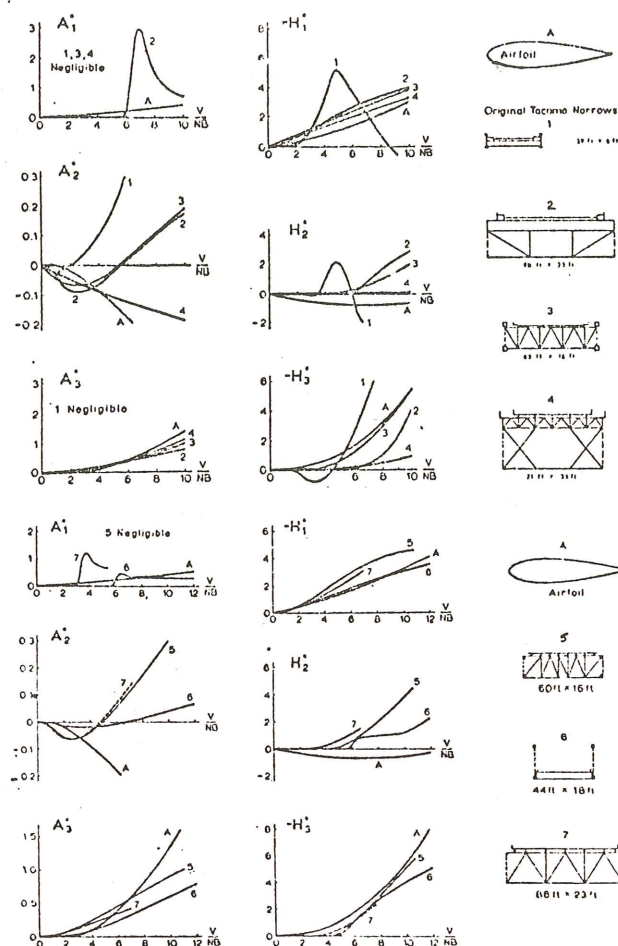


Fig. 12. Admittancias experimentales según Scanlan.

En cambio, en el segundo caso, puede considerarse que el modelo actúa como un ordenador analógico, incorporado en un punto intermedio del proceso del cálculo, de manera que introduce en éste la influencia de la forma de la sección.

### 8.1.—Ensayos en modelo reducido de tipo convencional

Caben dos posibilidades: Actuar sobre un modelo reducido de la totalidad de la estructura o disponer un modelo seccional.

#### 8.1.1.—Modelo completo

El modelo completo requiere la utilización de un túnel aerodinámico de grandes dimensiones, si se quiere representar, a la escala adecuada, detalles que pueden influir sustancialmente en el fenómeno. Por otra parte el establecimiento de la semejanza másica y elástica da lugar a inconvenientes a la hora de elegir los materiales necesarios.

La similitud aerodinámica exige la igualdad de los siguientes parámetros:

- a) N° de Strouhal  $S = \frac{fh}{V}$
- b) N° de Reynolds  $R = \frac{Vh}{\nu}$
- c) N° de Mach  $M = \frac{V}{c}$

Este último no tiene influencia en el dominio de velocidades a las que se actúa, muy inferiores a los 100 m/seg. que puede considerarse como el límite práctico de la incompresibilidad del aire.

d) N° de Froude  $F = \frac{V^2}{hg}$

La similitud estructural condiciona la igualdad de los parámetros siguientes:

- e)  $\frac{m}{\rho b^2}$  (masa de tablero)
- f)  $\frac{I}{\rho b^4}$  (radio de giro, o inercia másica)
- g)  $\lambda_h, \lambda\alpha$  (amortiguamiento logarítmico)
- h)  $\frac{E}{\rho V^2}$  (módulo de elasticidad)

Como los ensayos se realizan en condiciones de presión y temperatura similares a las naturales, la densidad de aire  $\rho$ , la viscosidad  $\nu$ , la gravedad,  $g$ , tanto del modelo como del prototipo son iguales.

Asimismo deben ser iguales los coeficientes de amortiguamiento logarítmico ( $g$ ) del modelo y del prototipo, por ser parámetros de por sí adimensionales.

La escala de longitudes se establece arbitrariamente  $\lambda_L = \frac{B_p}{B_m}$ , de modo que quedan inmediatamente establecidas las relaciones de masa (e) e inercia másica (f).

La escala de velocidades puede establecerse por dos caminos:

I) Arbitrariamente  $\lambda_V = \frac{V_p}{V_m}$

II) A partir de la igualdad del n° de Froude  $\lambda_V = \sqrt{\lambda_L}$

En el primer caso no se produce la igualdad de los números  $F$ , y en el segundo no se puede cumplir la igualdad de los números  $R$ , resultando  $R_m/R_p = (\lambda_L)^{3/2}$ .

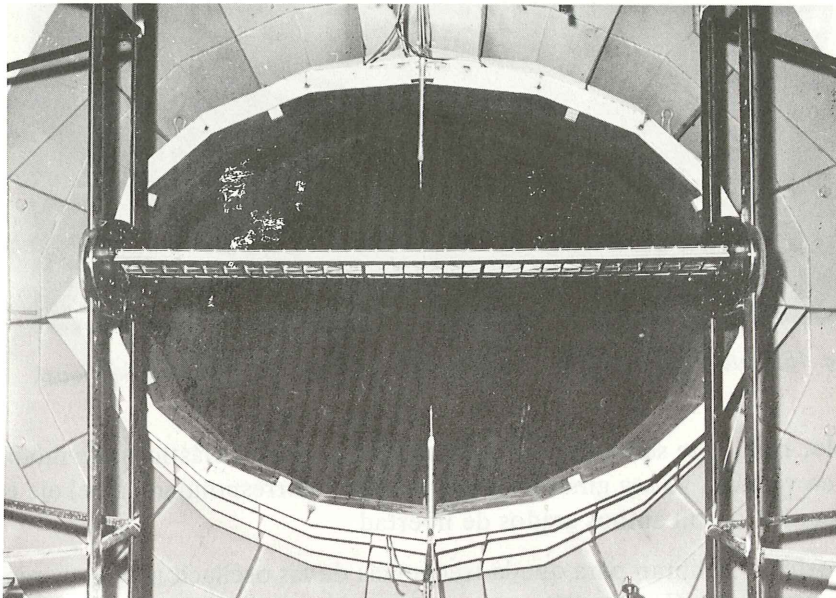
De todas maneras, establecido  $\lambda_V$  se puede definir la escala de rigidez elástica ( $h$ ) y la escala de frecuencias  $\lambda_N = f_p/f_m$  a partir de la identidad de los números  $S$ .

Como la similitud del n°  $R$  es mucho más importante que la del n°  $F$ , se suele prescindir de esta última, pero a pesar de ello, razones de índole práctica impiden la igualdad exacta de los números de Reynolds. En efecto, dicha igualdad exigiría  $\lambda_V \cdot \lambda_L = 1$ , es decir, fijar  $\lambda_V = 1/\lambda_L$  lo que daría valores demasiado bajos de las velocidades de los túneles.

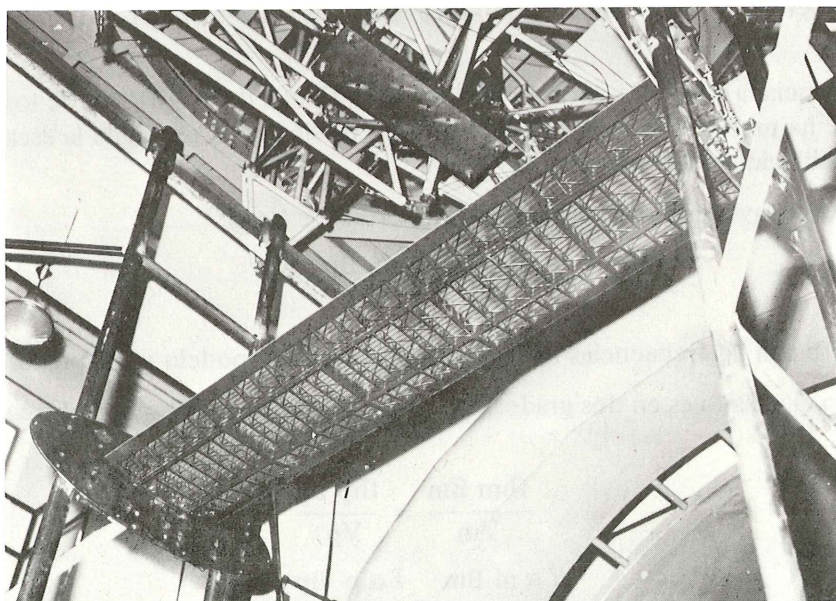
### 8.1.2.—Modelos seccional

Por las razones expuestas en el apartado precedente, los modelos reducidos completos se utilizan raramente y, en su lugar, se adopta el modelo seccional que, siendo mucho más sencillo, permite una investigación más exhaustiva de la importancia de los detalles.

El modelo seccional reproduce a escala geométrica mucho mayor que la del modelo total (entre el  $1/30$  y el  $1/50$ ) una cierta longitud de tablero, suficiente para que el flujo pueda considerarse bi-dimensional. A tal fin se disponen, además, placas de borde (Figuras 13 y 14).



*Fig. 13. Modelo seccional con placas de borde carenadas.*



*Fig. 14. Modelo seccional. Detalle inferior. Nótese el mecanismo de sustentación detrás de la placa de borde.*



La escala permite una adecuada reproducción de detalles como barandillas y barreras de seguridad, muy importantes desde el punto de vista aerodinámico (Figura 15).

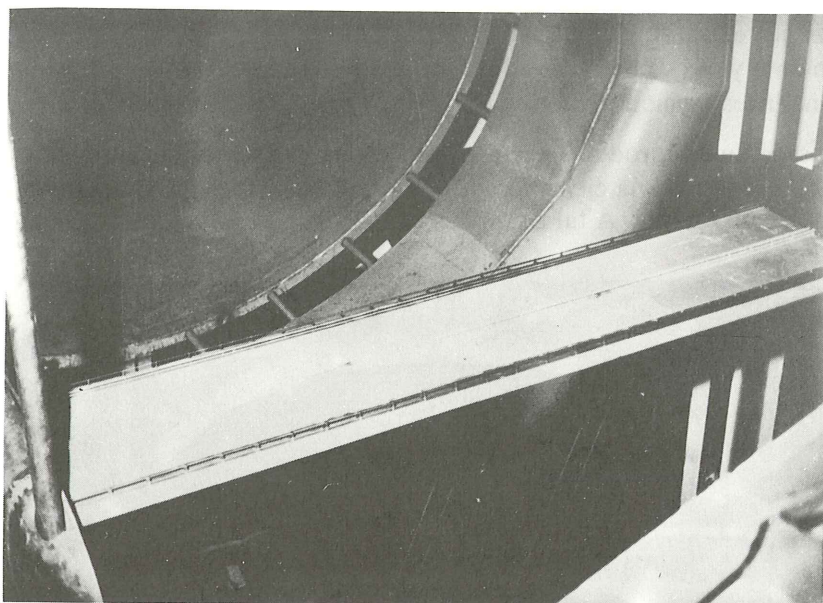


Fig. 15. Detalle de barandillas y barreras de seguridad en un modelo seccional.

El modelo, rígido, se sustenta por intermedio de resortes elásticos, de modo que pueda oscilar ya sea en vertical, ya sea girando sobre un eje en correspondencia del eje elástico, o bien, simultáneamente, con ambos grados de libertad.

Estos resortes se calibran para que la frecuencia de las oscilaciones sea la requerida por los criterios de semejanza (Figura 16).

La construcción del modelo debe hacerse de tal forma que además de la semejanza geométrica, se respete la igualdad de los parámetros másicos ( $m/\rho b^2$ ), inercia ( $I/\rho b^4$ ) y amortiguamiento,  $\lambda$ .

Las frecuencias a que debe vibrar el modelo, se obtienen de la igualdad de los números S, una vez que se ha prefijado la escala de velocidades, o, viceversa, prefijada la escala de frecuencias queda establecida la de velocidades.

Cuando el ensayo es en un solo grado de libertad, se tiene:

$$\frac{f_m B_m}{V_m} = \frac{f_p B_p}{V_p}$$

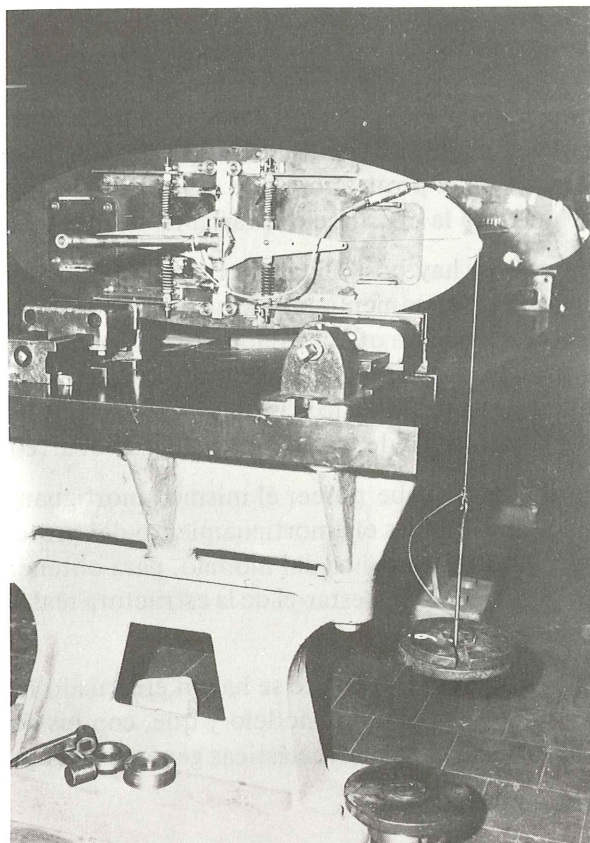
en donde  $f_m$ ,  $f_p$  son las frecuencias naturales homólogas del modelo y del prototipo.

Y cuando el ensayo es en dos grados, flexión  $h$  y torsión,  $\alpha$  debe cumplirse simultáneamente:

$$\frac{f_{hm} B_m}{V_m} = \frac{f_{hp} B_p}{V_p}$$

$$\frac{f \propto m B_m}{V_m} = \frac{f \propto p B_p}{V_p}$$

Es decir  $f_{hm}/f \propto m = f_{hp}/f \propto p$ , hay que mantener en el modelo la misma relación de frecuencias naturales que existan en el prototipo.



*Fig. 16. Modelo seccional. Detalle de la sustentación para simular las oscilaciones de flexión.*

Variando la velocidad del aire en el túnel, se registran los valores de las velocidades  $V_{cm}$  y frecuencias  $f_{cm}$  del modelo para las que aparecen oscilaciones importantes, sostenidas o divergentes.

Con ello, se obtienen los valores correspondientes al prototipo, a partir de las igualdades:

$$f_{cp} = \frac{f_p}{f_m} f_{cm} \quad \dots \quad (31)$$

$$V_{cp} = V_{cm} \frac{f_p}{f_m} \frac{B_p}{B_m}$$

Razones de índole práctica análogas a las indicadas para los modelos completos, impiden el cumplimiento exacto de la igualdad de los números de Reynolds. Este inconveniente, se reduce utilizando escalas de longitudes y velocidades tales que los números de  $R$  del modelo y prototipo, den lugar a flujos de la misma naturaleza, ya sea de desprendimiento periódico o aleatorio. Para ello basta que ambos valores estén situados en el mismo intervalo, aunque no coincidan.

El modelo seccional permite efectuar distintas modificaciones en los ensayos, obteniendo, por ejemplo, la influencia del amortiguamiento a través de variaciones del mismo, producidas por campos electromagnéticos que actúan sobre placas de cobre sujetas, exteriormente a la maqueta. También pueden realizarse cambios en los muelles, para ver la influencia de las rigideces. En la referencia n° 6 se describe la ejecución de un caso práctico y se justifican teóricamente los criterios de semejanza.



## 8.2.—El modelo seccional como instrumento auxiliar del cálculo

El ensayo en modelo seccional presenta, no obstante, una serie de inconvenientes. El primero y más importante, es que la correlación entre las amplitudes de las oscilaciones registradas en el modelo, y las esperables en el prototipo, no es muy buena, debido a que en el puente real influye sobre el valor máximo la distribución, variable, de las mismas.

El segundo consiste en que no hay posibilidad de representar las formas modales de vibración, al ser el modelo rígido y prácticamente indeformable, de manera que no pueden considerarse las variaciones máxicas y elásticas que puedan existir a lo largo del tablero real. No obstante, si el tablero es de sección constante, el análisis de la inestabilidad aeroelástica a torsión, en el modelo seccional es muy aproximado si, como se prueba en la referencia nº 6, las frecuencias de inestabilidad difieren poco de las naturales, lo que ocurre habitualmente.

Finalmente, el modelo seccional debe poseer el mismo amortiguamiento que el puente real. Y lo malo no es eso, sino saber cuál es el amortiguamiento del prototipo. Por ello es conveniente que pueda variarse el amortiguamiento del modelo, para obtener varias respuestas, en el intervalo para que se espere que vaya a estar el de la estructura real. Ello supone una complicación al ensayo.

Por todas estas razones no es de extrañar que se hayan efectuado intentos para obtener la información aerodinámica imprescindible del modelo y que, con los datos obtenidos, se resuelva el problema a partir de las ecuaciones aeroelásticas generales del prototipo.

Para ello hay tres caminos posibles:

a) Dejar que el modelo oscile libremente bajo distintas condiciones de sustentación y velocidades del viento y registrar las características del movimiento. Estas se igualan a las expresiones teóricas dadas por los modelos matemáticos, obteniéndose así los coeficientes adimensionales que aparecen en tales ecuaciones, y que en un proceso de cálculo, inverso, proporcionarían los valores observados.

Repetiendo esta secuencia para distintas condiciones del ensayo, se obtienen los coeficientes de los modelos matemáticos como funciones de las variables adimensionales, y pueden utilizarse en las ecuaciones de equilibrio del prototipo.

Las admitancias obtenidas por Scanlan, dadas en la Figura 12 son consecuencia de este método.

b) Forzar un movimiento armónico en el modelo, de frecuencia y amplitud conocida y fija, y medir las cargas aerodinámicas actuantes para distintas velocidades del viento. Con ello es posible obtener tanto las cargas no lineales a utilizar en los problemas de baja velocidad, como las admitancias que aparecen en el problema de la inestabilidad lineal a altas velocidades, funciones de la frecuencia reducida.

Esta idea procede del campo aeronáutico, donde Halfman la desarrolló, basándose en el hecho de que el movimiento de flameo de las alas es muy aproximadamente armónico.

Ukeguchi, Sakata y Nishitani entre otros (Referencia 8) adoptaron este criterio, para obtener las admitancias de distintas secciones, a utilizar posteriormente en un análisis de flameo (Figura 17). El sistema mecánico para generar y mantener inalterados los movimientos armónicos es bastante complejo, debiéndose eliminar, además, los efectos inerciales que enmascaran los resultados. Ello se hace por distintos procedimientos, desde realizar un ensayo paralelo en aire quieto con un modelo idéntico, y restar los resultados de los del modelo en corriente, hasta el más simple de medir presiones e integrarlas para obtener las cargas.



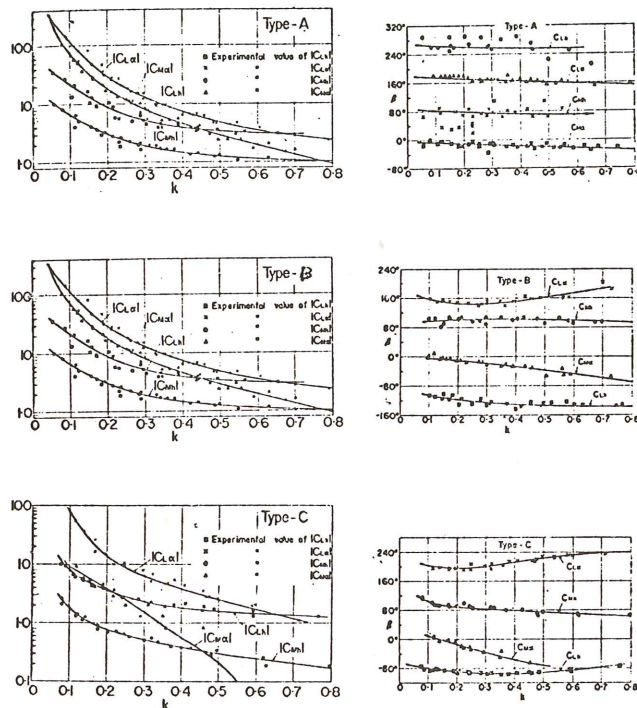
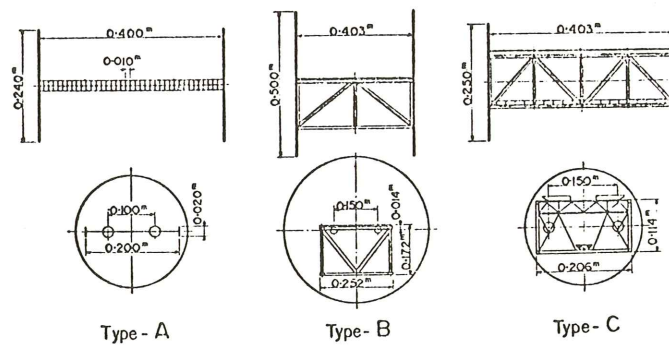


Fig. 17. Módulo y argumento de admitancias aerodinámicas para tres secciones.

Así ha procedido Loisseau (Referencia 4) en los ensayos del puente de St. Nazaire (Figura 18a). En ellos se han determinado las cargas aerodinámicas en fase con la velocidad (es decir el amortiguamiento aerodinámico negativo) en función de la amplitud, para lo cual, se determina previamente, a amplitud constante, que velocidad reducida (inversa de  $S$ ) produce el máximo valor del amortiguamiento aerodinámico negativo. (Figura 18b).

Una vez conocida ésta, se mantiene fija, y se varía la amplitud, obteniéndose una curva de variación de la carga aerodinámica con las amplitudes (Figura 18c). En ese mismo gráfico, se pueden dibujar rectas que representan los amortiguamientos estructurales que son proporcionales a las amplitudes. El punto de intersección de la curva experimental y de la recta dará la amplitud previsible de oscilación del prototipo.

c) Imponer al modelo un salto unidad. Este método desarrollado por el autor, (Referencia 6) se basa en imponer al modelo un salto brusco de su posición, ya sea de traslación o de giro, y registrar las variaciones de las cargas aerodinámicas resultantes.

Es útil para determinar las admitancias aerodinámicas a utilizar en los problemas de inestabilidad, alcanzando su máxima sencillez en el caso de inestabilidad a giro, donde sólo hay que considerar la variación de presión en un punto del modelo y no la de las fuerzas y momentos integrados.

A partir de los registros medidos, y mediante la aplicación de la transformación de Fourier es posible obtener las admitancias de la sección, es decir, las fuerzas y momentos aparecerían para un movimiento armónico de módulo unidad, sea de traslación o de giro.

Naturalmente exige admitir las hipótesis de linealidad, por lo que no es útil en el intervalo de baja velocidad. La magnitud del salto debe pues ser suficientemente pequeña, y el  $n^o$  de Reynolds de la corriente debe estar en la zona adecuada, lejos del desprendimiento periódico.

Para el caso de inestabilidad a torsión, las expresiones de la parte real e imaginaria de las admitancias son:

$$H_{\alpha}^M(i k) = F_{\alpha}^M(k) + i G_{\alpha}^M(k)$$

$$F_{\alpha}^M(k) = \frac{dCM}{d\alpha} \left( 1 + k \sum_0^{nT} g(s) \operatorname{sen} . ks . \Delta s \right) \dots \quad (32)$$

$$G_{\alpha}^M(k) = \frac{dCM}{d\alpha} . k \sum_0^{nT} g(s) \cos . ks \Delta s$$

en donde  $dCM/d\alpha$  es la pendiente del diagrama de momentos estacionarios y  $g(s)$  la ley adimensional de variación de presiones consecuencia del salto brusco.

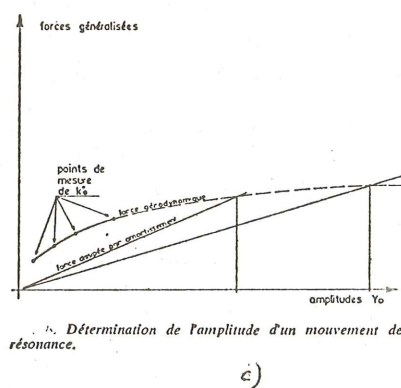
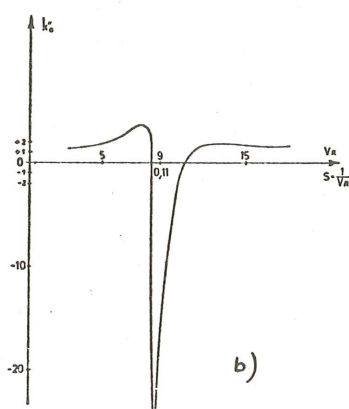
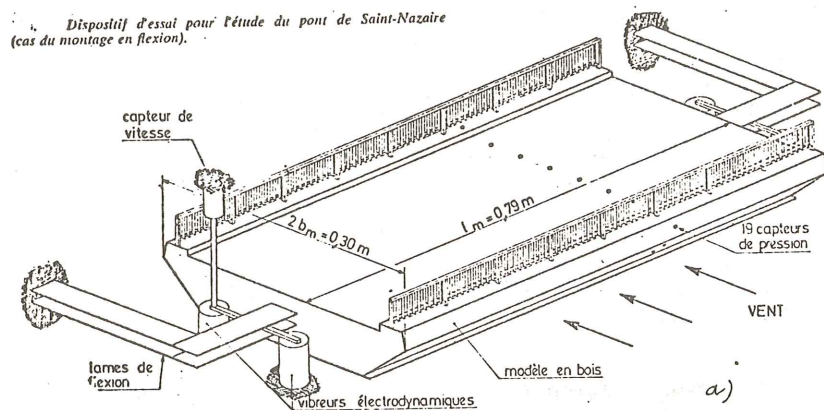
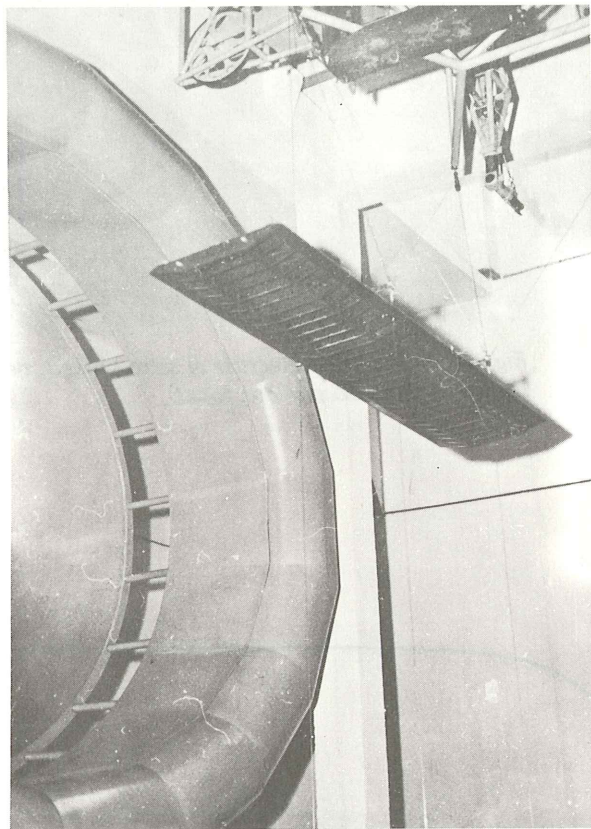


Fig. 18. Disposición del modelo y determinación de la máxima amplitud para oscilaciones producidas por torbellinos.

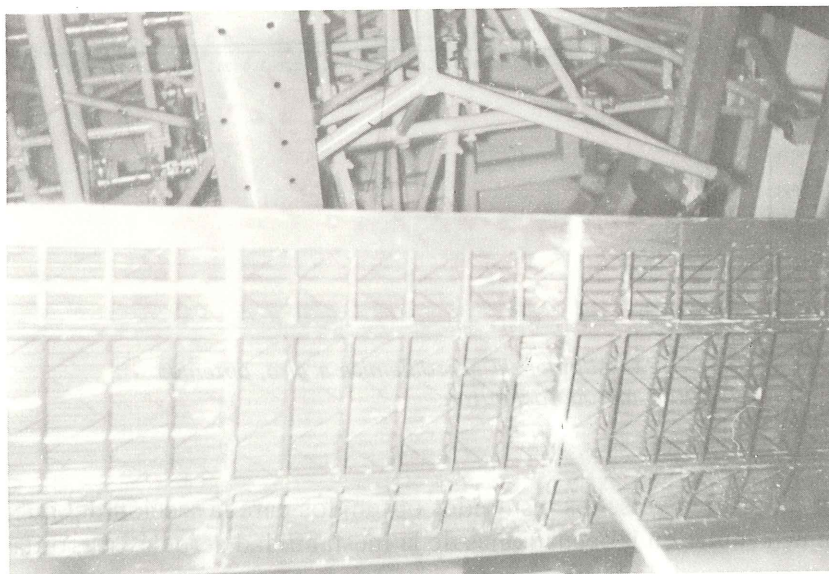
En esas expresiones  $s$  es un tiempo adimensional ( $s = Vt/b$ ),  $k$  la variable (frecuencia reducida),  $n$  un número entero suficientemente elevado para que converja la serie, y  $T = 2\pi/k$ .

Por supuesto, las expresiones (32) se calculan numéricamente, pero para ello es necesario un ordenador de poca capacidad.

Debe pues realizarse un ensayo estacionario para determinar  $dCM/d\alpha$ , (Figura 19) y a continuación el salto unidad. (Figuras 20 y 21).



*Fig. 19. Ensayo estacionario.*



*Fig. 20. Captador de presión para registrar la respuesta al salto unidad.*



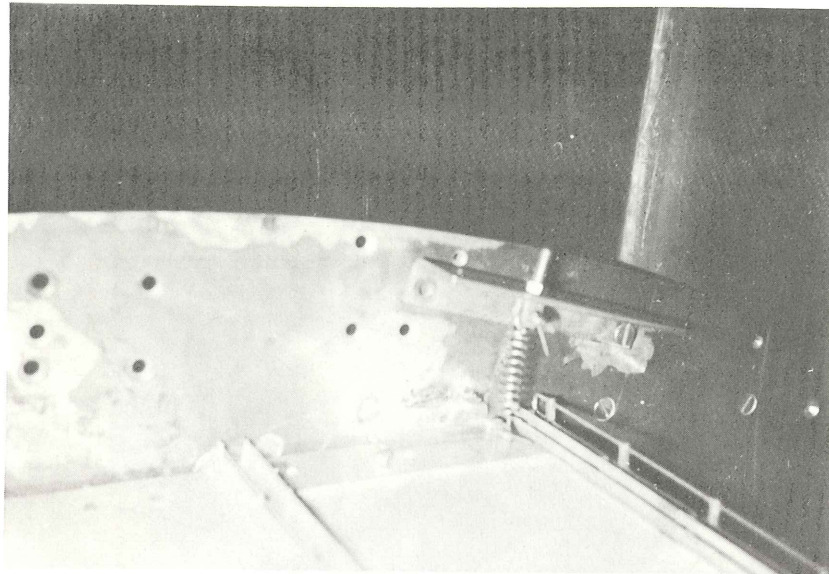


Fig. 21. Muelle para efectuar el salto unidad, de recorrido limitado por dos topes.

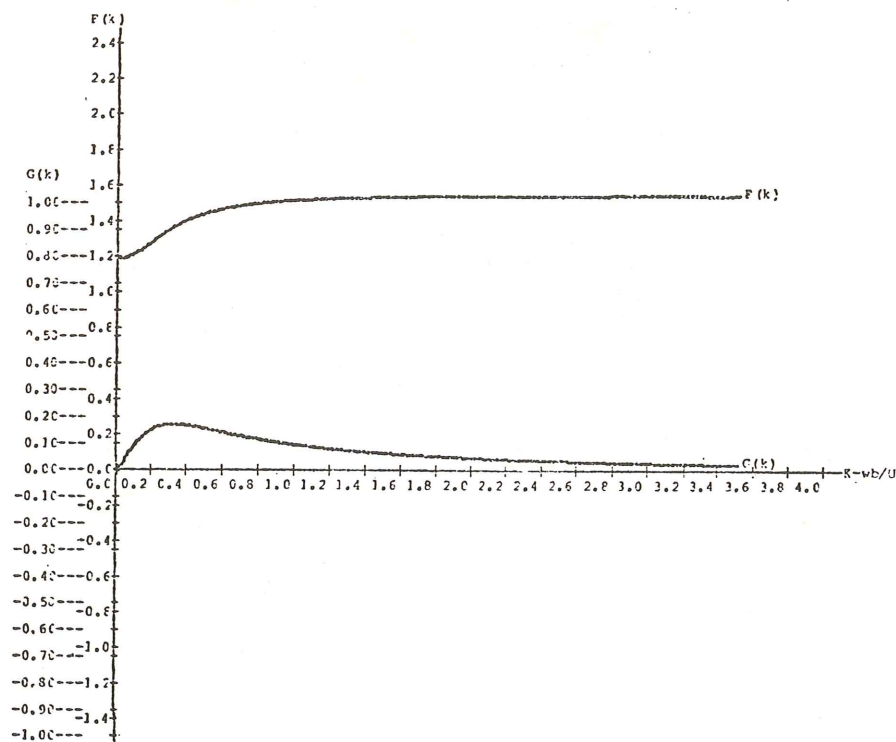


Fig. 22. Admitancia aerodinámica a giro, obtenida por el método del autor.

En la figura 22 pueden verse los resultados obtenidos para la sección del puente de la Figura 28, que son utilizables en las ecuaciones de la inestabilidad aeroelástica, o flameo, del prototipo.

## 9.—CRITERIOS DE PROYECTO

Como hemos señalado en los apartados precedentes, los tableros de puente pueden sufrir oscilaciones peligrosas por efecto del desprendimiento periódico de torbellinos, a baja velocidad de la corriente. Y por anulación del amortiguamiento, cuando las fuerzas aerodinámicas, en fase con la velocidad de la oscilación, alcanzan el valor preciso para ello.

Para conseguir un comportamiento adecuado de la estructura, frente a estas solicitaciones, deberemos actuar sobre su forma geométrica, la distribución de sus masas, el amortiguamiento y las rigideces elásticas y proceder, en la medida de lo posible, de acuerdo con los criterios que se deducen del estudio de la influencia de esos parámetros.

El criterio básico, más seguro y económico, reside en conseguir que las acciones derivadas del viento sean lo más pequeñas posibles, o se produzcan a velocidades muy elevadas, lejanas de las posibles en el entorno. Es decir no intentar resistir sino evitar; y para ello, la mejor solución es una sección transversal aerodinámicamente adecuada.

### 9.1.—Criterios para evitar oscilaciones por desprendimiento de torbellinos

La esencia de los fenómenos que ocurren a baja velocidad nos fija la pauta a seguir para minimizarlos. Se ha descrito, en los apartados precedentes, cómo las oscilaciones proceden de la acción de torbellinos de frecuencia muy definida, que por generarse próximos al borde fron-

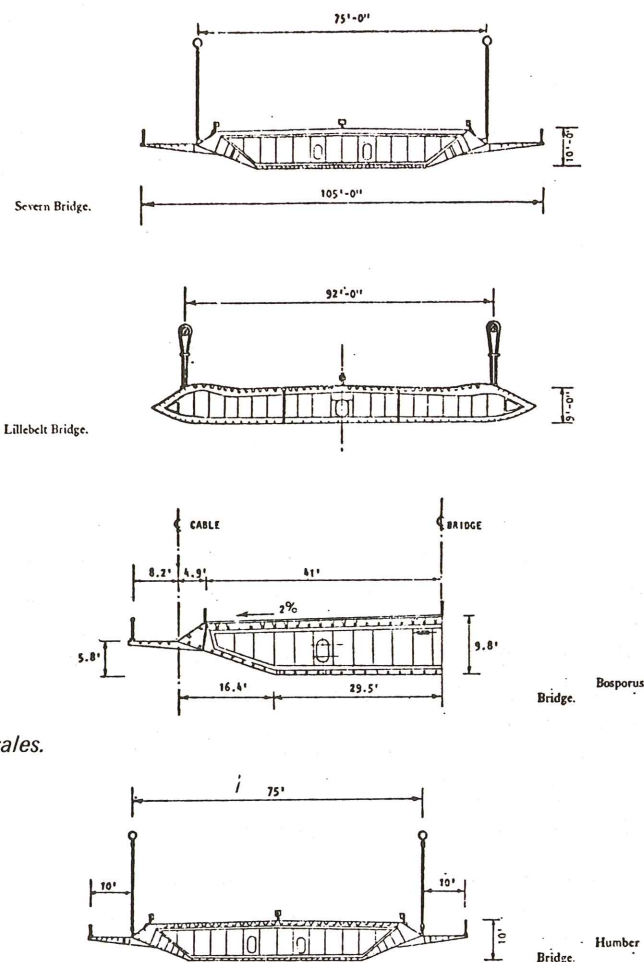


Fig. 23. Secciones transversales.

tal, de ataque, del tablero dejan a éste inmerso en la estela, en una gran longitud, por lo cual, la interacción entre fuerzas y movimientos es muy elevada dando lugar a la persistencia de los fenómenos de resonancia, a través del mecanismo de enganche.

Así pues, las secciones transversales que eviten el desprendimiento, o lo sitúen lo más aguas abajo posible, serán menos susceptibles de oscilar a bajas velocidades.

Este criterio conduce, naturalmente, a que las secciones de los tableros tiendan a ser curvilineas, asemejándose a los perfiles utilizados en aeronáutica. El autor de este artículo recuerda una sesión de trabajo en la cual, analizando una serie de cambios de forma que, como resultado de una campaña de ensayos, se proponían para un tablero de puente, alguien exclamó: ¡Hemos vuelto a inventar el ala del avión!

Sin llegar a esta semejanza tan completa, la Figura 23 pone de manifiesto la tendencia, en las secciones de los grandes puentes, de perturbar lo menos posible el flujo de aire incidente. Cuando la sección no ha sido concebida desde un principio con este criterio, siempre queda el recurso de utilizar medios análogos a los empleados en aeronáutica para corregir comportamientos indeseables.

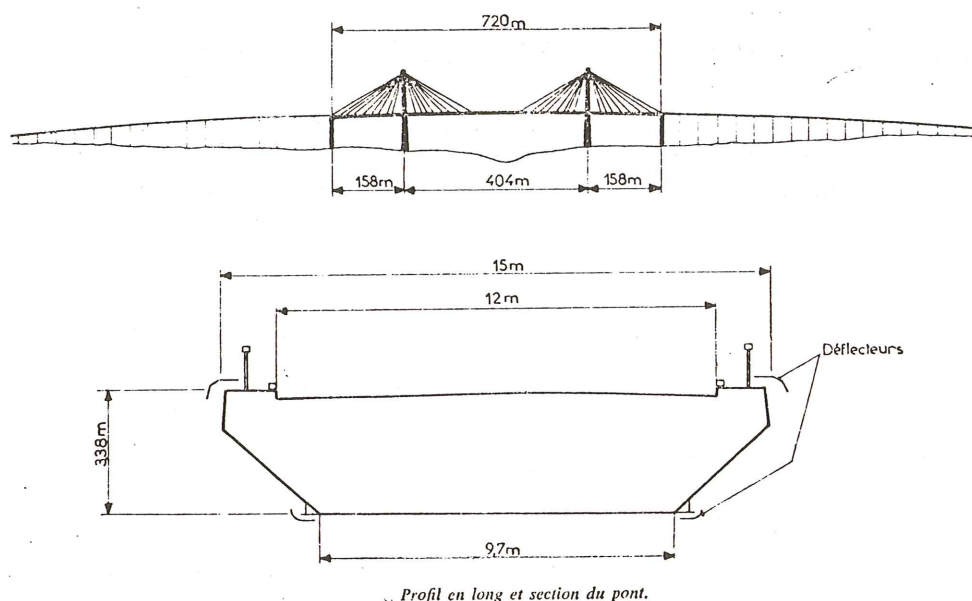


Fig. 24. Estabilización de las capas límites.

Así tenemos una variante de los "slots" de las alas de avión, aplicada al puente de St. Nazaire, cuya finalidad es dotar a las capas límites de mayor energía para retrasar su separación (Figura 24). En la Figura 25 se puede observar la forma, no estructural, con que hubo de ser suplementado al puente de Longs Creek para eliminar unas peligrosas oscilaciones, modificando el borde romo inicial. Otras veces basta un pequeño detalle para evitar el problema, como ocurre con el puente de Suéhiro, en donde un estabilizador, situado en la barandilla, es suficiente para impedir el desarrollo de oscilaciones. (Esta técnica recuerda a la usada por los pilotos, en los primeros tiempos, que arreglaban los problemas de oscilaciones de las alas colocando pequeños rebordes, cuerdas, etc. llamados "trims") (Figuras 26 a y b).

Son pues muy importantes los pequeños detalles, y deben de considerarse las barandillas barreras, bordillos, etc., que realmente se vayan a disponer, en el estudio aeroelástico.



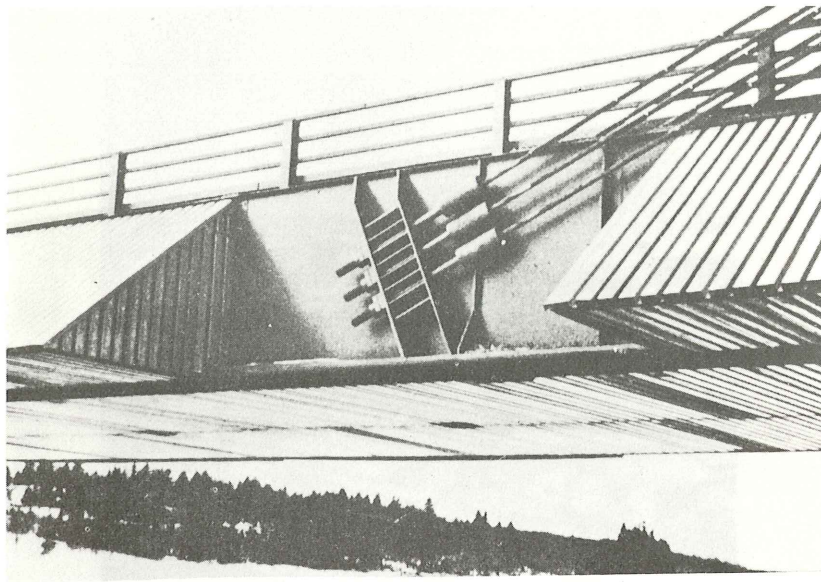


Fig. 25. Puente de Longs Creek.

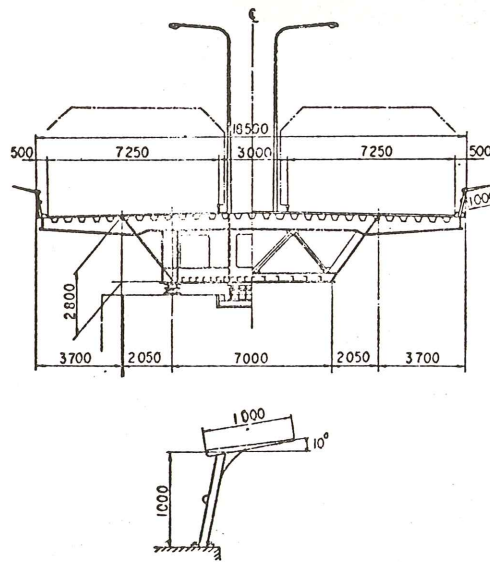


Fig. 26 a.

En principio las secciones cerradas son menos susceptibles a las oscilaciones (y más ventajosas debido a su mayor rigidez a torsión, como se verá más adelante). No obstante, se ha probado experimentalmente que las secciones abiertas, dotadas de bordes de ataque y desprendimiento afilados, presentan en la mayoría de los casos un comportamiento satisfactorio. Esta solución se ha adoptado tanto en tableros de hormigón (Figura 27) como en metálicos (Figura 28).

Aunque no puede hablarse, con propiedad, de secciones estables o inestables, puesto que toda sección posee su velocidad crítica de inestabilidad influenciada, además, por los demás parámetros estructurales, sí es cierto que los ensayos han demostrado la existencia de formas indeseables, por cuanto que a igualdad de las demás propiedades, dan lugar a velocidades de inestabilidad más bajas. Tales son las secciones abiertas, en H, y en  $\pi$  con vigas de borde planas.

Pero además de la forma geométrica de la sección, la velocidad crítica de inestabilidad, depende de otros parámetros. Al que se presta gran atención es, en la mayoría de los casos, y como se ha indicado al principio, el valor del cociente  $(\omega_\alpha/\omega_h)$ . Ello, que parece evidente a la vista de las expresiones (33), (34) y (35) responde al hecho de que el flameo acoplado de flexión y torsión, ocurre con una frecuencia intermedia entre las dos naturales. Así pues, si éstas están muy alejadas entre sí, será más difícil que las cargas aerodinámicas que equivalen a rigideces, masas y amortiguamientos, sean capaces de acoplar los dos grados de libertad.

Si bien en líneas generales, y bajo un aspecto cualitativo, el razonamiento anterior es correcto, no debe olvidarse que influyen también, simultáneamente, la capacidad de amortiguamiento, la distribución de masas (radio de giro) y la existencia de masas excéntricas que inducen un acoplamiento inercial; de modo que en ciertos casos, la velocidad crítica no presenta un mínimo para  $(\omega_\alpha/\omega_h) = 1$ . En la figura 29 puede verse como la presencia de una masa excéntrica, que aleja el centro de gravedad del centro aerodinámico (donde se sitúa la resultante de las presiones) altera el citado criterio, de modo que si ambos centros coinciden ( $x_\alpha = 0$ ) aumenta la velocidad de inestabilidad, en el punto  $(w_\alpha/w_h) = 1$ .

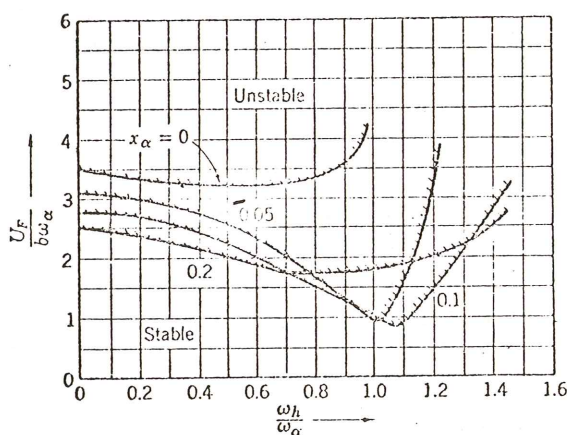


Fig. 29. Influencia de una masa excéntrica y del cociente de frecuencias en la velocidad crítica teórica.

La condición  $(\omega_\alpha/\omega_h) > 1$  es adoptada habitualmente en proyecto, (tabla 2) pero puede no ser suficiente. En efecto, en el caso de los tableros de puente, la inestabilidad, aún acoplada, es fundamentalmente de torsión, lo que supone que la energía necesaria para mantener una oscilación de amplitud  $\alpha(x)$  es:

$$W = W_\alpha = \frac{1}{2} m \omega_\alpha^2 \int_L \alpha^2(x) dx \dots \quad (37)$$

Se comprende que si, aún cumpliéndose que  $(\omega_\alpha > \omega_h)$  el valor absoluto de  $\omega_\alpha$  es pequeño, se necesitará extraer poca energía del aire, para desencadenar una oscilación importante.

Así pues es conveniente dotar a la estructura de una frecuencia elevada de oscilación a torsión. Por ello son recomendables secciones cerradas, con gran rigidez a torsión, con dos planos de atirantamiento lateral, (si las luces son grandes) y que a ser posible coincidan en un mismo punto de las pilas, para que su rigidez torsional sea elevada, al eliminar el desplazamiento relativo, en sentido longitudinal de dos montantes de la misma pila.

Puesto que la inestabilidad aeroelástica ocurre cuando se anula la capacidad de amortiguamiento de la estructura, (tanto si se considera uno o varios grados de libertad) es deseable alcanzar el máximo amortiguamiento estructural económicamente viable. Así pues son recomendables las uniones atornilladas, las calzadas de hormigón, las juntas con rozamiento, etc.

Es interesante citar un razonamiento presentado por Rocard en su publicación "General Dynamics of Vibrations" según el cual, el aumentar cierto tipo de amortiguamiento es perjudicial, en el sentido de que en tal caso las frecuencias de torsión y flexión no necesitan igualarse en el estado de inestabilidad, apareciendo esta a menor velocidad del viento.

Sin embargo, y a pesar de lo anterior (que el mismo Rocard pone en duda en un artículo posterior) existe gran cantidad de estudios experimentales que prueban la eficacia del amortiguamiento para aumentar los valores de las velocidades críticas, y las mismas ecuaciones del flameo clásico conducen, por vía teórica a esta conclusión.

En cuanto a la masa, y a la inercia másica, puede decirse que en los casos de inestabilidad acoplada, la velocidad crítica aumenta al aumentar ambos, a igualdad de frecuencias naturales. No obstante hay que considerar la influencia que pueden tener, disminuyendo las frecuencias naturales, si la masa añadida no es estructuralmente resistente.

El estudio de la inestabilidad a torsión proporciona una idea rápida y clara del sentido de la influencia de los parámetros. Las ecuaciones que definen el fenómeno son: (Referencia 6).

$$\frac{\omega_{\alpha}}{\omega} = \frac{\mu}{k^2} \cdot \frac{\pi}{\Delta} G_{\alpha}^M(k)$$

$$\left( \frac{\omega_{\alpha}}{\omega} \right)^2 = 1 + \frac{\mu}{k^2} F_{\alpha}^M(k) \quad (38)$$

en donde  $\mu = \rho b^4/I$  ( $I$  = inercia másica)

$\Delta$  = decremento logarítmico estructural

$$k = \frac{\omega b}{V}$$

De ellas se deduce:

- Siendo  $\mu$  en general pequeño para los tableros de puente, la frecuencia de inestabilidad es ligeramente inferior a la natural (entre un 5 y 10 por 100).
- Como consecuencia, fijado  $\mu$  y  $\Delta$ , es decir la inercia másica y la capacidad de amortiguamiento estructural, se obtiene  $k_c \cong$  constante, al ser  $\omega_{\alpha}/\omega \cong 1$  y por lo tanto la velocidad crítica  $V_c = \omega b/k_c$  varía casi proporcionalmente a la frecuencia natural de torsión.

La influencia de las restantes variables depende de las expresiones de las admitancias  $F(k)$  y  $G(k)$ .



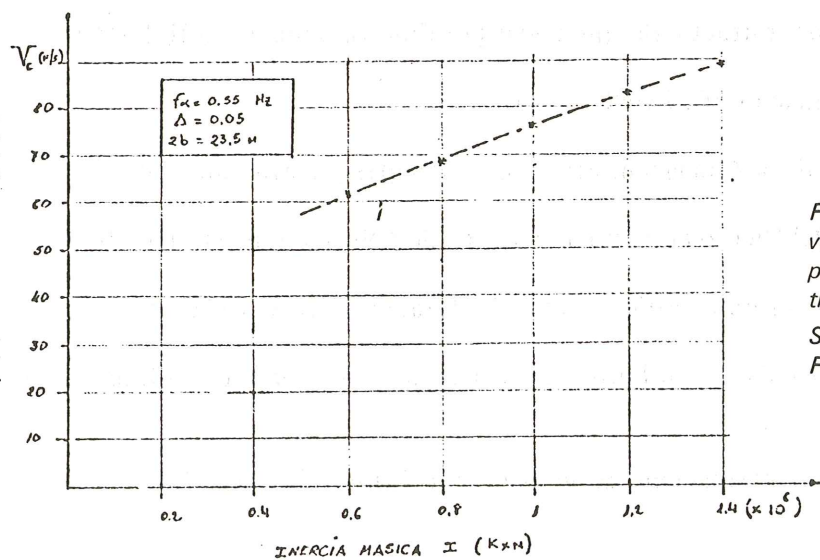
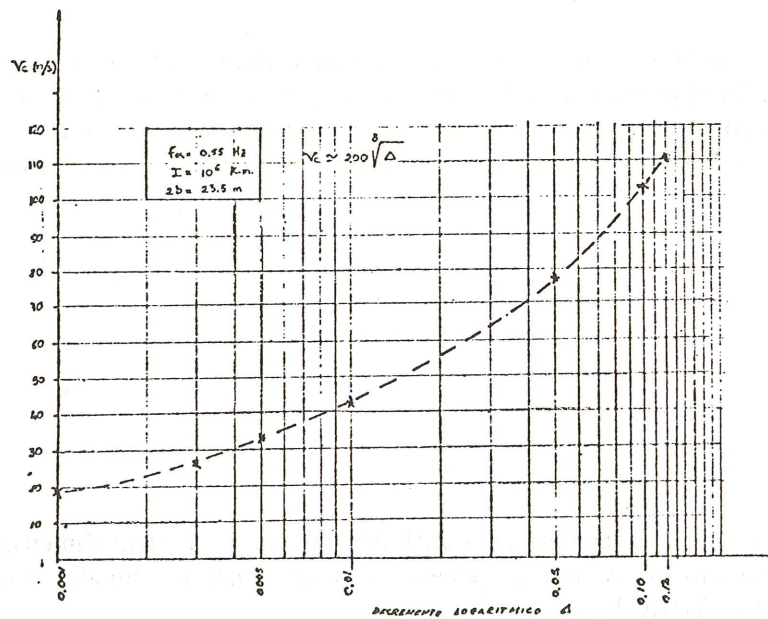
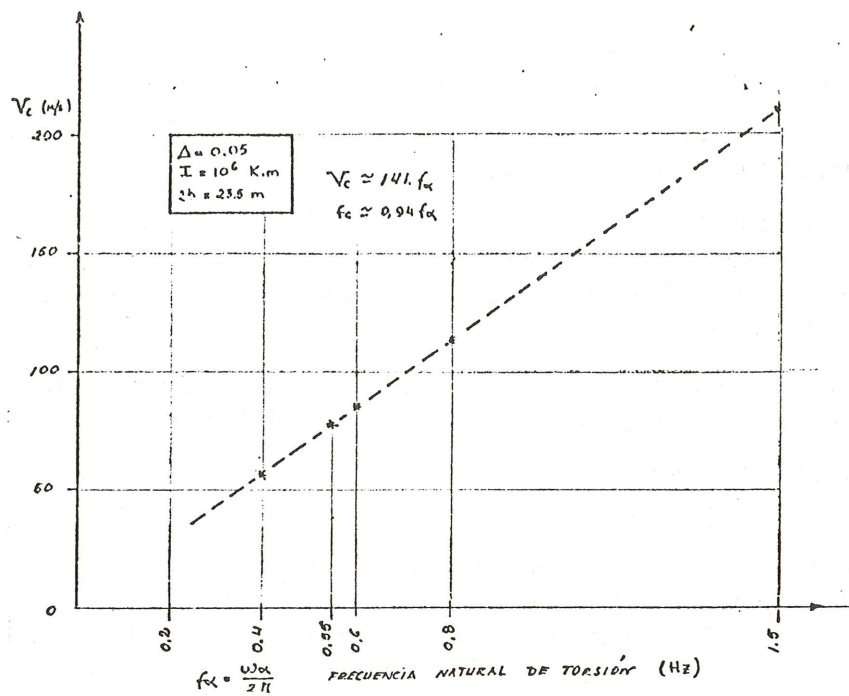


Fig. 30. Valores de la velocidad crítica  $V_c$ , para diversos parámetros estructurales. Sección indicada en Fig. 28.

Para las definidas en la figura 22, puede afirmarse que:

- c) La velocidad crítica crece aproximadamente proporcional a la raíz cúbica del amortiguamiento logarítmico estructural.
- d) El aumento de la inercia másica disminuye ligeramente el valor de la velocidad crítica, si se considera que no afecta a la rigidez estructural pero sí a la frecuencia (disminuyendo ésta). Pero un incremento del 100 por 100 en  $I$  solo disminuye en un 4 por 100 la velocidad.
- e) El aumento de la inercia másica, a igualdad de frecuencia natural  $\omega_\alpha$ , y decremento logarítmico, aumenta proporcionalmente la velocidad crítica.
- f) A igualdad de todos los parámetros, incluso las funciones de admitancia, la disminución del ancho de la sección aumenta la velocidad de inestabilidad.

Estas últimas conclusiones, aunque de carácter limitado a una sección determinada (Figura 28) son en opinión del autor, generalizables a la mayoría de los puentes, cuya sección sea análoga, al menos en su sentido cualitativo, ya que es de esperar un comportamiento similar en la respuesta al salto unidad. En la Figura 30 se indican algunos resultados para la sección mencionada.

Para terminar, resta solo añadir que se ha omitido intencionadamente todo el enfoque probabilístico ligado al problema de la turbulencia, y la manera en que es necesario proceder, para determinar las respuestas de las secciones a ráfagas, sean armónicas o de salto brusco, es decir para obtener las admitancias aerodinámicas necesarias para resolver el problema.

## BIBLIOGRAFIA

- 1 — Ensayos en modelo realizados en Canal Aerodinámico, para el dimensionamiento de puentes, teniendo en cuenta el peligro de vibraciones producidas por el viento. K. KLOPPEL Y F. THIELE, 1967.
- 2 — Vibraciones estructurales inducidas por fluidos. Symposium IUTAM-IAHP, 1972.
- 3 — Aeroelasticidad YC. FUNG, 1955.
- 4 — Jornadas de la Asociación Francesa de Puentes y Estructuras 1974.
- 5 — Efectos del Viento en Estructuras — R. SCANLAN Y E. SIMIU, 1978.
- 6 — Inestabilidad Aeroelástica — Tesis doctoral M. JULIA, 1978.
- 7 — Efectos del Viento en Edificios y Estructuras, 4ª Conferencia Internacional, Heathrow, 1974.
- 8 — Symposium internacional sobre puentes colgantes. Lisboa 1966.

## **Comportamiento de los anclajes de los cables de continuidad de los puentes construidos por voladizos sucesivos**

**Francisco Millanes Mato  
Dr. Ingeniero Caminos**

### **RESUMEN**

Un sistema frecuentemente utilizado para el anclaje de los cables de continuidad de los puentes construidos por voladizos sucesivos, consiste en disponer unos nervios o resaltes que sobresalen en la cara superior de la losa inferior de la sección cajón, permitiendo así el enfilado y la puesta en tensión de los cables, una vez cerrada la clave.

En un cierto número de puentes en servicio, se han observado fisuraciones inadmisibles en las proximidades de estos anclajes. La aplicación de la fuerza de pretensado de manera excéntrica a través de un nervio de gran rigidez respecto a la losa, que generalmente es muy delgada, produce unas flexiones locales muy importantes, que no son bien conocidas ya que, dado el carácter tridimensional del problema, muy pocos son los estudios que le han sido dedicados.

El presente trabajo resume los principales resultados de un estudio realizado por el Autor, en el que se ha analizado el comportamiento de este tipo de anclajes, tanto en fase elástica como en fase no lineal hasta la rotura.

En fase elástica, el estudio ha sido realizado mediante un método de cálculo armónico, que vamos a llamar "método de los cortes".

El análisis no lineal ha exigido la puesta a punto de un método de cálculo por elementos finitos no lineales, que incorpora los efectos placa y membrana en la losa, y que tiene en cuenta la fisuración del hormigón, su comportamiento no lineal a compresión y la plastificación de los aceros.

### **1. Introducción**

La construcción de puentes por voladizos sucesivos ha conocido un desarrollo particularmente importante en los últimos años. Las primeras realizaciones estaban articuladas en el centro del vano, pero este sistema presenta ciertos inconvenientes:



- a) Las flechas que toman las ménsulas durante la construcción no pueden estimarse mas que de forma aproximada. Existe pues un riesgo apreciable de encontrarse con diferencias de nivel importantes entre los extremos de las ménsulas en el momento de la unión. Si bien la igualdad de flechas puede ser restablecida mecánicamente, no ocurre lo mismo con las pendientes, apareciendo por ello un punto anguloso en el centro del vano.
- b) Incluso si esta continuidad de pendientes se produce inicialmente, las deformaciones diferidas del hormigón (la fluencia principalmente) agudizan el problema, obteniéndose siempre una ruptura del perfil longitudinal en clave.
- c) Además, las articulaciones y las juntas de dilatación de la calzada son siempre piezas delicadas cuyo mantenimiento plantea frecuentes problemas.

Es por todo ello que los sistemas articulados en clave han sido progresivamente abandonados en favor de sistemas continuos. La continuidad es obtenida por medio de cables enfilados una vez hormigonada la sección de clave y puestos en tensión después de endurecido el hormigón.

Estos cables de continuidad están situados cerca de la fibra inferior de la sección y pueden levantarse en el interior de las almas del cajón y anclarse en nichos preparados en el extradós de la obra, o bien, lo que es más frecuente, disponerse a lo largo de la losa inferior del cajón y anclarse en unos nervios o resaltes que sobresalen sobre la cara superior de ésta, que al no estar encofrada permite una fácil ejecución de la pieza.

Observaciones realizadas en ciertos puentes franceses han revelado la presencia de fisuras muy importantes en la losa inferior del cajón, cerca de los nervios de anclaje de los cables de continuidad. Las fisuras parten de detrás de los nervios y se propagan hacia delante, con una inclinación de  $35^{\circ}$  a  $45^{\circ}$  respecto al eje del tablero, en dirección de las almas laterales del cajón, que a veces se ven también afectadas (Fig. 1).

Estas fisuras, originadas por la difusión del pretensado, se encuentran a veces agravadas por la morfología de las obras: excesiva concentración de anclajes, dimensiones de los nervios desproporcionadas con respecto a las de la losa, armado insuficiente, etc.

Vemos pues el interés práctico de un buen conocimiento del funcionamiento de este tipo de anclaje, así como del estado tensional de la losa en las proximidades del mismo. El carácter tridimensional del problema lo hace bastante complejo, lo que explica que muy pocos estudios le hayan sido dedicados hasta el presente.

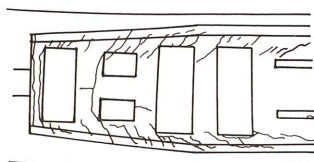


Fig. 1.

## 2. Planteamiento del problema

Desde un punto de vista práctico, se puede abordar el problema del comportamiento de estas piezas estudiando separadamente los cuatro aspectos siguientes (Fig. 2):

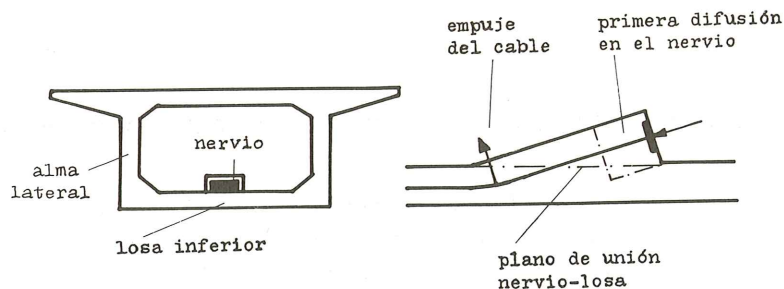


Fig. 2.

1. La cuestión de la difusión del pretensado en el interior mismo del nervio. Este constituye una pieza prismática de hormigón sobre la cual se aplica, a través de una placa de reparto, una fuerza concentrada de pretensado. Este primer aspecto no está muy lejos del problema del anclaje de un cable de pretensado en el extremo de una viga.
2. El estudio del plano de unión entre el nervio y la losa, es decir, la obtención de la armadura de cosido de ambas partes.
3. El equilibrio de la fuerza de empuje inducida por la curvatura del cable en la zona de acuerdo con la fibra media de la losa.
4. El estado tensional de la losa. Se trata del estudio de la difusión de una fuerza de pretensado concentrada, que se aplica de manera excéntrica, a través de un nervio, sobre un elemento, la losa inferior del cajón, generalmente delgado y que a su vez se encuentra empotrado elásticamente en sus bordes sobre las almas laterales del cajón.

### 3. Revista de los estudios anteriores

Mientras que los anclajes en los extremos de vigas o piezas prismáticas han sido objeto de investigaciones ya antiguas que han permitido un buen conocimiento del problema, así como el establecimiento de métodos de dimensionamiento satisfactorios (ver por ejemplo la ref. 1), no existen hoy en día más que muy pocas publicaciones sobre el tema que nos ocupa.

El caso de un anclaje intermedio colocado en el interior de una losa de hormigón (anclajes pasivos) también ha sido estudiado teórica y experimentalmente por varios autores: W. SCHLEE (ref. 2 y 3), J. EIBL y G. IVANYI (ref. 4), OULITSKI (ref. 5), entre otros. No obstante, se trata de un problema bidimensional cuyo conocimiento no puede aportar soluciones válidas a nuestro caso, donde la excentricidad de la aplicación de la carga a través de un nervio de gran rigidez con respecto a la losa produce unas flexiones locales en la misma que, como veremos más adelante, son determinantes en el problema que estudiamos.

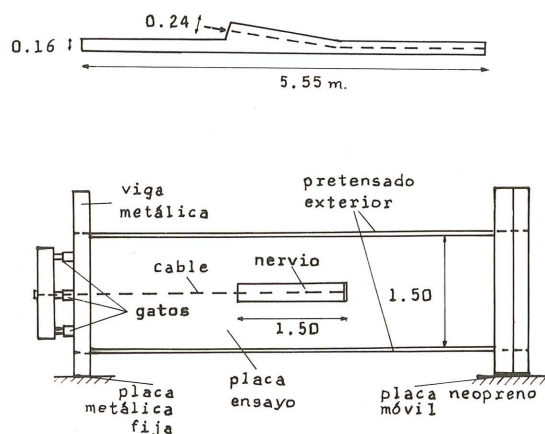
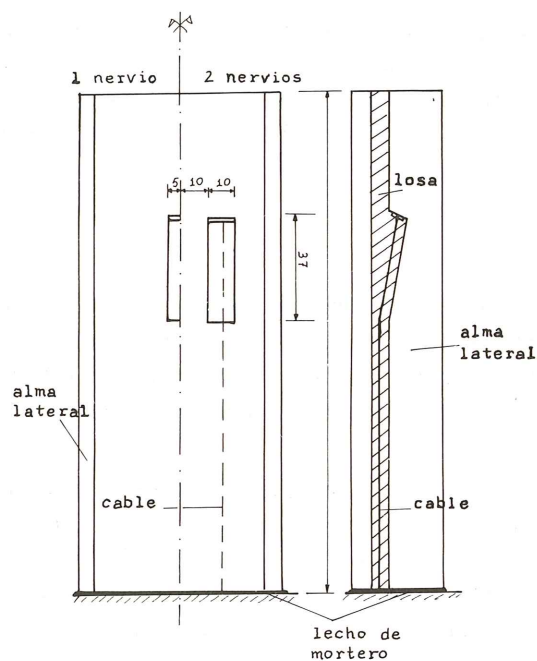


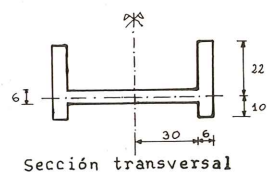
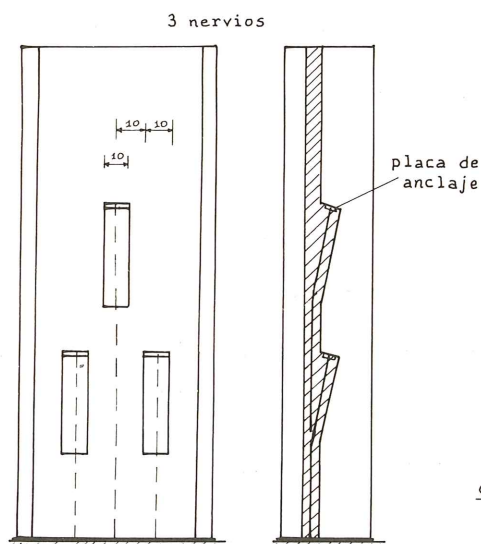
Fig. 3. Cuerpo de ensayo del L.C.P.C.

Esta cuestión ha sido abordada en Francia por dos programas de investigación de dos laboratorios:

- a) El Laboratoire Central des Ponts et Chaussées (L.C.P.C.), cuyo estudio teórico, muy avanzado en el dominio del cálculo elástico, ha sido acompañado de ensayos de un anclaje de este tipo, centrado en una losa de hormigón cuyos bordes laterales estaban libres (Fig. 3). Dicha investigación puede seguirse con detalle en las referencias 6 y 7.
- b) El Service d'Etude des Structures (S.E.S.) del Centre Expérimental de Recherches et d'Etudes du Batiment et des Travaux Publics (C.E.B.T.P.), que ha realizado un programa de ensayos simulando el anclaje de uno, dos y tres cables de pretensado en una losa de hormigón limitada lateralmente por dos almas perpendiculares (sección transversal en forma de H), ver la Fig. 4, lo que ha permitido tener en cuenta el efecto del empotramiento elástico de la losa inferior del cajón en las almas laterales del mismo (ref. 8).



*Fig. 4. Cuerpos de ensayo del C.E.B.T.P.*



cotas en cm.



Todo ello ha sido acompañado por un estudio teórico (ref. 9), realizado por el autor, que nos ha permitido el conocimiento analítico del estado tensional en el anclaje propiamente dicho y en la zona de la losa próxima a él, tanto en fase elástica como en fase no lineal hasta la ruptura, concentrándonos principalmente en el estudio de la influencia sobre dichas distribuciones de tensiones de los siguientes factores:

1. Empotramiento de la losa inferior del cajón en las almas laterales del mismo.
2. Dimensiones relativas del nervio respecto a las de la losa.
3. Efecto del agrupamiento de varios nervios de anclaje relativamente próximos.
4. Efecto del comportamiento no lineal de los materiales: fisuración del hormigón a tracción, comportamiento no lineal del mismo a compresión, y plastificación de las armaduras a tracción.

#### 4. El método de los cortes

Dicho método, puesto a punto por LY KIM TY (ref. 6), permite obtener analíticamente el estado tensional de una placa delgada en la que se disponen uno o varios nervios de anclaje. Se trata de un método elástico que ya había sido utilizado por OULITSKI (ref. 5) para el estudio bidimensional de una losa con un anclaje pasivo en su interior. LY lo adaptó para tener en cuenta la rigidez del nervio, superior a la de la placa, así como los efectos de las flexiones debidas a la excentricidad del cable con relación al plano medio de la placa, a su inclinación y a la forma del nervio.

La idea consiste en establecer una serie de cortes longitudinales en la placa, que se descompone así en varias bandas: las que contienen los nervios de anclaje y las adyacentes (Fig. 5).

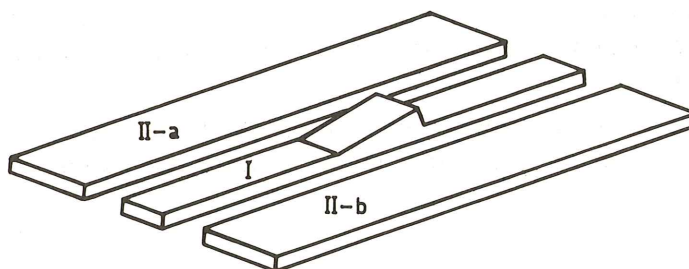


Fig. 5. Descomposición de la estructura en bandas.

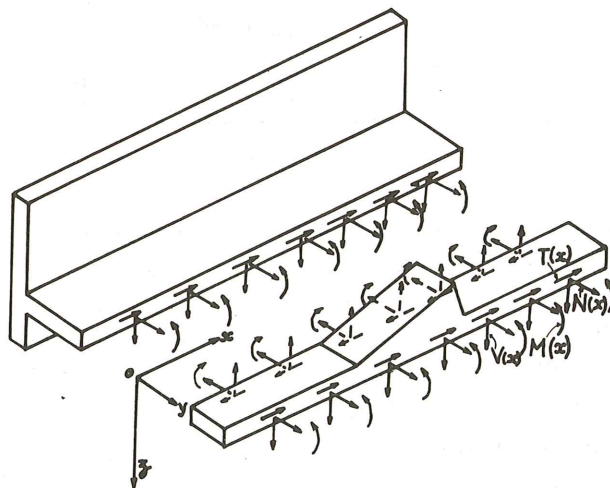


Fig. 6. Esfuerzos internos liberados.

La estructura aparece por tanto dividida en varias subestructuras. Sobre los dos labios de cada uno de los cortes efectuados es preciso aplicar los esfuerzos internos liberados (Fig. 6):

- Un esfuerzo normal:  $N(x)$ ;
- Dos esfuerzos tangentes:  $T(x)$  de cizallamiento.  
 $V(x)$  de esfuerzo cortante;
- Un momento flector:  $M(x)$ .

Dichos esfuerzos internos, incógnitas del problema, se suponen desarrollados en series de Fourier de la forma:

$$N(x) = \sum_n f_n \cos \alpha_n x ;$$

$$T(x) = \sum_n t_n \sin \alpha_n x ;$$

$$V(x) = \sum_n v_n \cos \alpha_n x ;$$

$$M(x) = \sum_n m_n \cos \alpha_n x ;$$

$$\text{siendo } \alpha_n = \frac{n\pi}{2L} , \quad n = 1, 3, 5, \dots$$

Aparecen pues  $4Nn_c$  incógnitas ( $N$  = número de términos del desarrollo de Fourier considerados;  $n_c$  = número de cortes longitudinales efectuados en la placa). El sistema de ecuaciones que permite resolver el problema es obtenido estableciendo la igualdad de los trabajos efectuados por cada uno de los componentes armónicos de los esfuerzos internos sobre los dos labios de cada corte.

En las bandas que no tienen nervio se puede obtener siempre una solución analítica exacta a partir de los métodos tradicionales de la elasticidad bidimensional y de la flexión de placas delgadas.

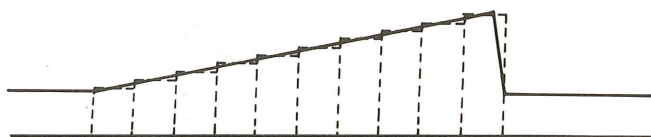


Fig. 7.

En las bandas que tienen nervio, es preciso recurrir a soluciones aproximadas, suponiendo el nervio descompuesto en varias secciones de altura constante (Fig. 7). Para ciertas sollicitaciones (flexión, torsión) se supondrá que la banda trabaja como una viga de inercia variable. Para los esfuerzos planos (normal y tangente), se utilizará la formulación correspondiente a la elasticidad bidimensional, pero introduciendo ciertos coeficientes correctores que permitan tener en cuenta el aumento de rigidez proporcionado por el nervio.

Este método puede seguirse con detalle en las referencias 6 y 9.

Vamos ahora a pasar a presentar los resultados más significativos obtenidos en estas investigaciones.

## 5. Difusión del pretensado en el interior del nervio

Las medidas experimentales efectuadas, así como los resultados de un análisis por elementos finitos (bi y tridimensionales) realizado en el L.C.P.C. (ref. 6), han mostrado que el comportamiento del nervio está muy próximo del que se tiene en los anclajes de cables de pretensado en los extremos de piezas prismáticas, con la presencia de las dos zonas de tracciones bien conocidas:

- a) Delante de la placa de anclaje, con tracciones transversales en una zona donde se produce una fuerte incurvación de las isostáticas de compresión. (Fig. 8).

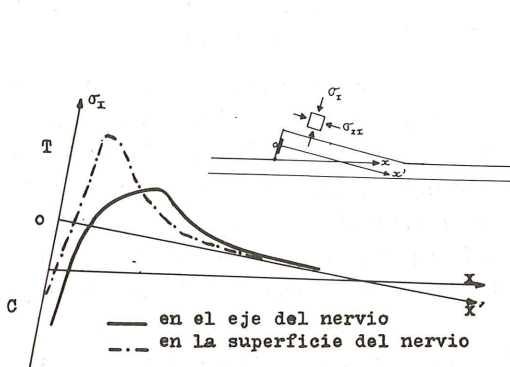


Fig. 8. Tracciones transversales en el nervio.

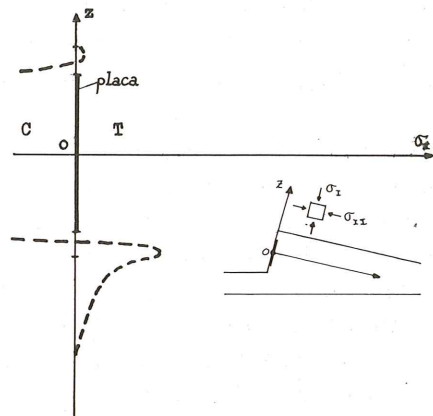


Fig. 9. Tracciones de superficie a ambos lados de la placa de anclaje.

- b) A ambos lados de la placa de reparto del anclaje, donde aparecen unas tracciones de superficie, tal como se ve en la figura 9.

Se constató que los criterios de armado ya conocidos para los anclajes en los extremos de piezas prismáticas proporcionan un dimensionamiento correcto del nervio siempre que se tenga cuidado de prolongar las armaduras de superficie hasta la cara inferior de la losa (Fig. 23).

## 6. Dimensionamiento de la armadura de cosido del nervio a la losa

En la figura 10 se muestran las curvas obtenidas por LY en el plano de unión nervio-lo-sa. Estas curvas indican que las tensiones normales  $\sigma_z$  son nulas salvo en la zona próxima al punto de anclaje del cable y en la zona de curvatura del mismo (empuje en vacío). No obstante, la resultante de las tracciones cerca del anclaje vale 0.04 Fp (Fp = fuerza pretensado), valor que corresponde a la resultante de las tracciones de superficie de las que se ha hablado en el punto anterior, y que está muy lejos de la tracción que resultaría con un esquema de resistencia como ménsula corta (fig. 11), la cual puede evaluarse en 0.09 Fp.

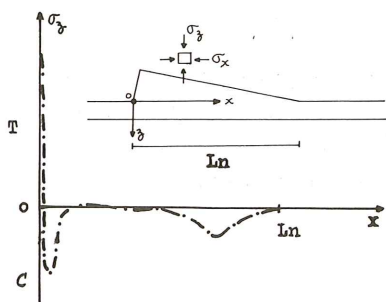


Fig. 10. Tensiones normales en la superficie de unión nervio-lo-sa.





Fig. 11. Esquema del mecanismo resistente como ménsula corta.

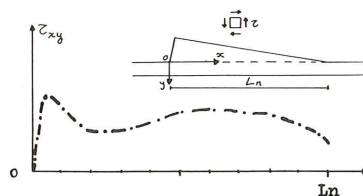


Fig. 12. Tensiones tangenciales a lo largo de la superficie de unión nervio-losa.

La curva de tensiones de cizallamiento (Fig. 12) es casi constante a lo largo de toda la superficie de unión, con una ligera punta debida a la aplicación brutal de la carga.

El estudio elástico muestra por consiguiente una transmisión del pretensado por cizallamiento a través del plano de unión nervio-losa, lo que aconsejaría una disposición de las armaduras de cosido uniformemente repartida sobre toda la longitud del nervio. No obstante, los ensayos realizados en el C.E.B.T.P. han mostrado que, como consecuencia de la fisuración que aparece en la zona posterior del nervio, este mecanismo de resistencia puede ser remplazado, fuera del dominio elástico, por uno de ménsula corta que solicita muy fuertemente las armaduras de cosido próximas a la placa de reparto del anclaje, pudiendo incluso llegar a plastificarlas. Nosotros aconsejamos por tanto reforzar las armaduras de cosido en dicha zona con vistas a garantizar una seguridad suficiente frente a una rotura por un mecanismo de ménsula corta (Fig. 23).

## 7. Estado tensional de la losa en la zona próxima al nervio

En la ref, 9 se presenta un estudio exhaustivo de la influencia sobre la distribución de tensiones en la losa de los siguientes factores:

- Empotramiento de los bordes de la losa en las almas laterales del cajón;
- Relación  $\gamma = \frac{b_0}{b}$  entre la anchura del nervio ( $2b_0$ ) y la de la losa ( $2b$ );
- Longitud del nervio;
- Canto del nervio con respecto a la losa;
- Trazado del cable en el interior del nervio;
- Efecto de la agrupación de varios nervios de anclaje relativamente próximos;
- Comportamiento no lineal de los materiales, principalmente la fisuración del hormigón;

Nosotros vamos a limitarnos aquí a presentar algunos de los resultados más significativos, así como las principales conclusiones de nuestro estudio.

### 7.1 Cálculo elástico

En las figuras 13 y 14 se presentan las curvas de tensiones longitudinales y transversales a lo largo del eje de la pieza y en la figura 15 los diagramas de tensiones principales correspondientes a la fibra superior, media e inferior de la losa. Todas ellas obtenidas en fase elástica para el caso de un solo anclaje centrado en el eje de simetría de la sección.

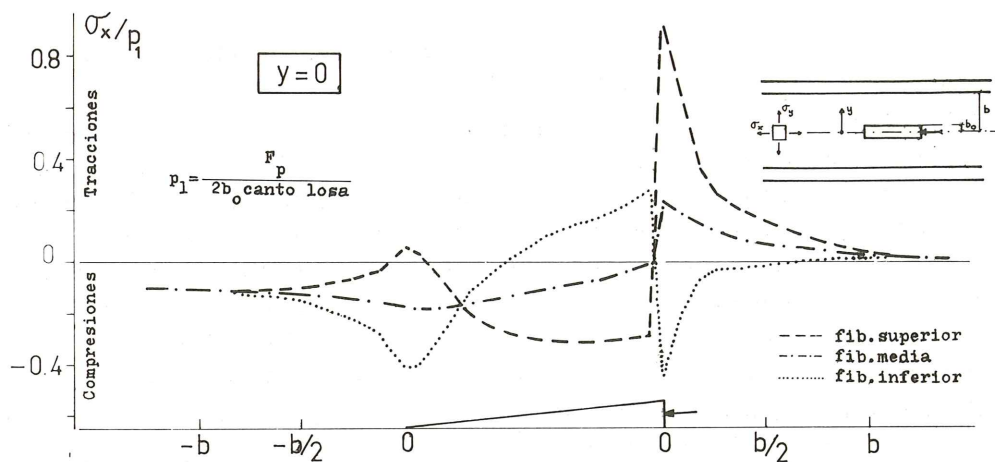


Fig. 13. Curvas de tensiones longitudinales en el eje de la pieza.

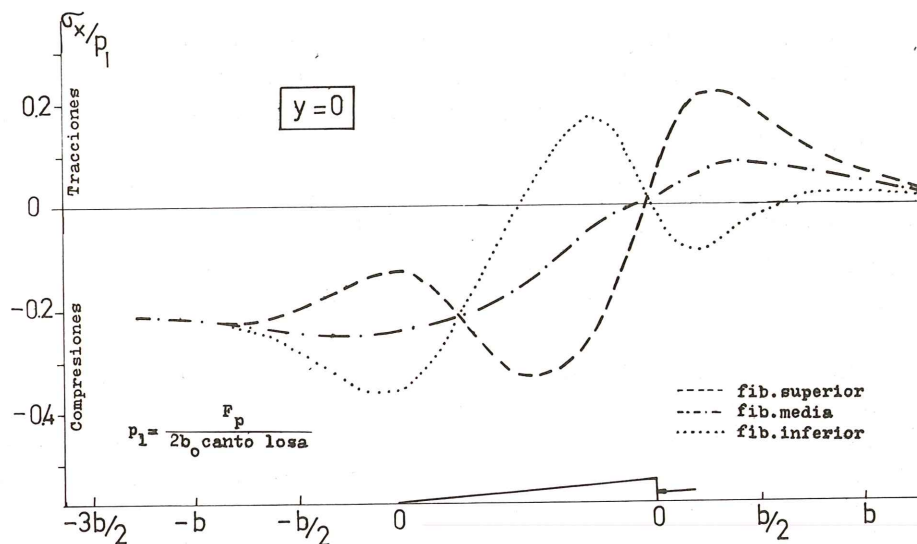


Fig. 14. Curvas de tensiones transversales en el eje de la pieza.

El examen de estos diagramas muestra que el estado tensional en el plano medio de la losa no es crítico. En efecto, la presencia del nervio reparte la aplicación del pretensado sobre la misma, que se realiza de forma gradual a través de un doble mecanismo: cizallamiento a lo largo de los bordes del nervio y arrastre de la zona posterior. A la altura de la base del nervio una gran parte del pretensado está ya difundida en la losa, reduciéndose así la importancia de dos efectos que eran característicos de los anclajes en los extremos de piezas prismáticas: las tracciones transversales y las fuertes compresiones longitudinales delante del anclaje. En este caso, se puede observar que ambos efectos son muy moderados. Por otro lado, las tracciones de arrastre detrás del nervio, aunque acrecentadas por el efecto desfavorable de la brusca discontinuidad geométrica del final del mismo, son a su vez mucho menos importantes que aquéllas que se obtienen detrás de los anclajes pasivos intermedios.

En cambio, la observación de los estados tensionales en las caras superior e inferior de la losa muestra la importancia de las flexiones locales que aparecen en las proximidades del nervio. Se puede constatar la presencia de tres zonas sometidas a grandes flexiones longitudi-

nales, acompañadas por flexiones transversales del mismo signo aunque más moderadas, con aparición de tracciones muy importantes en la losa:

- a) Detrás del nervio, con tracciones en la fibra superior de la losa. El cálculo muestra la presencia de una punta aguda de las flexiones longitudinales, muy localizada justo detrás de la discontinuidad geométrica del nervio. Pensamos que la hipótesis de conservación de secciones planas adoptada en nuestro estudio teórico, que ciertamente no se cumple en las cercanías de la discontinuidad, debe sobrevalorar dicho fenómeno. Pero en cualquier caso, y aunque sensiblemente suavizada, dicha punta debe subsistir en la realidad y dicha zona puede considerarse como crítica.
- b) A lo largo del nervio, y sobre una distancia de  $0.6$  a  $0.75 L_n$  (siendo  $L_n$  la longitud del nervio) a partir del anclaje, existe una zona sometida a tracciones sobre la cara inferior de la losa (la opuesta al nervio). Las mayores tracciones aparecen sobre los bordes laterales del mismo, formando un ángulo comprendido entre  $30^\circ$  y  $40^\circ$  con respecto al eje de la pieza y alcanzando su máximo a  $0.25 L_n$  del final del nervio. Dicha zona, más extendida que la anterior, está también sometida a tracciones importantes.
- c) En la base del nervio se obtienen tracciones transversales sobre la fibra superior de la losa. Dichas tracciones, debidas al empuje del cable en su zona curva, permanecen concentradas en las proximidades del eje de la pieza y son mucho más débiles que las de las zonas precedentes.

El análisis de diversos casos estudiados ha mostrado que los valores de las tracciones son función de las dimensiones relativas del nervio y de la losa:

- a) La resultante de las tracciones transversales delante del nervio, y al nivel de la fibra media de la losa, es siempre débil y oscila entre  $0.10$  y  $0.18$  de la fuerza de pretensado.
- b) La resultante de las tracciones longitudinales de arrastre detrás del anclaje, y al nivel de la fibra media de la losa, se halla siempre por debajo de la regla empírica de LEONHARDT (más apropiada para el caso de anclajes intermedios pasivos) que consiste en anclar  $0.5 F_p$ . Dicha resultante aumenta cuando  $\gamma$  ( $\gamma = \text{ancho nervio}/\text{ancho losa}$ ) disminuye, acercándose a  $0.5 F_p$  sólo cuando  $\gamma$  tiende hacia cero (caso equivalente al de un anclaje intermedio en un medio infinito), según se ve en la figura 16.
- c) Las flexiones longitudinales a lo largo y detrás del nervio, y por tanto las tracciones sobre las fibras superior e inferior de la losa, son muy sensibles al trazado del cable en el interior del mismo, y muy particularmente a su excentricidad con respecto a la línea de los centros de gravedad de las secciones.

La placa de anclaje no deberá por tanto centrarse en la cara posterior del nervio, sino colocarse lo más cerca posible de la cara superior de la losa (Fig. 23). Puede incluso ser conveniente aumentar ligeramente las dimensiones del nervio, si con ello se consigue centrar más el trazado del cable.

Por otro lado, el acuerdo del cable con la fibra media de la losa debe hacerse en el interior del nervio, garantizando así un revestimiento suficiente de hormigón en la zona de fuerte curvatura de aquél.

En la figura 15 se observan unas flexiones transversales apreciables en la línea de unión de la losa con las almas laterales del cajón, obteniéndose tracciones importantes sobre la fibra superior (fig. 15-a). Debemos sin embargo apuntar que en nuestro cálculo se ha impuesto la nulidad de las rotaciones a lo largo de los bordes de la losa, cuando lo que en realidad existe allí es un empotramiento elástico de la misma que permite una cierta rotación. Las flexiones reales deben ser por tanto sensiblemente menos importantes que las obtenidas teóricamente. Nosotros pensamos, no obstante, que cuando los nervios de anclaje se hallen próxi-



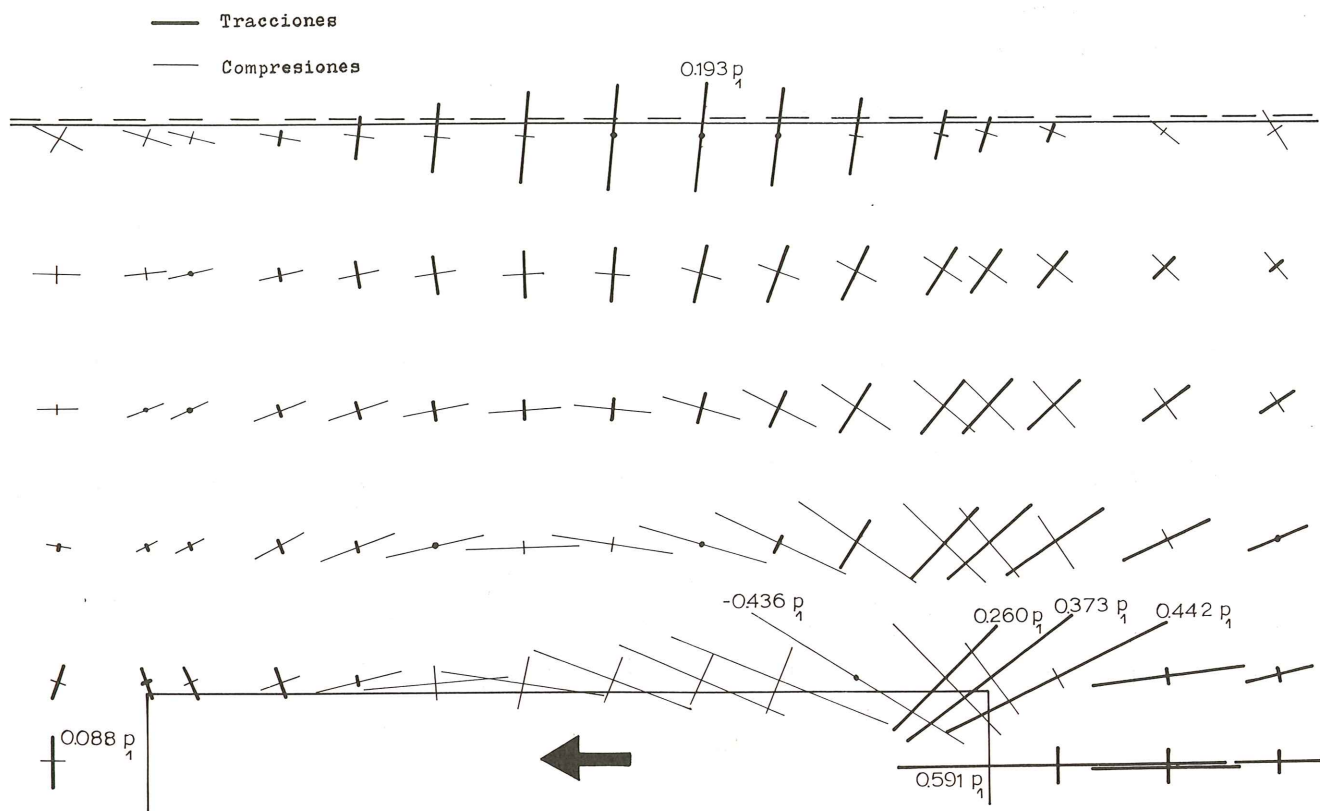


Fig. 15 a. Diagrama de tensiones principales sobre la fibra superior de la losa.

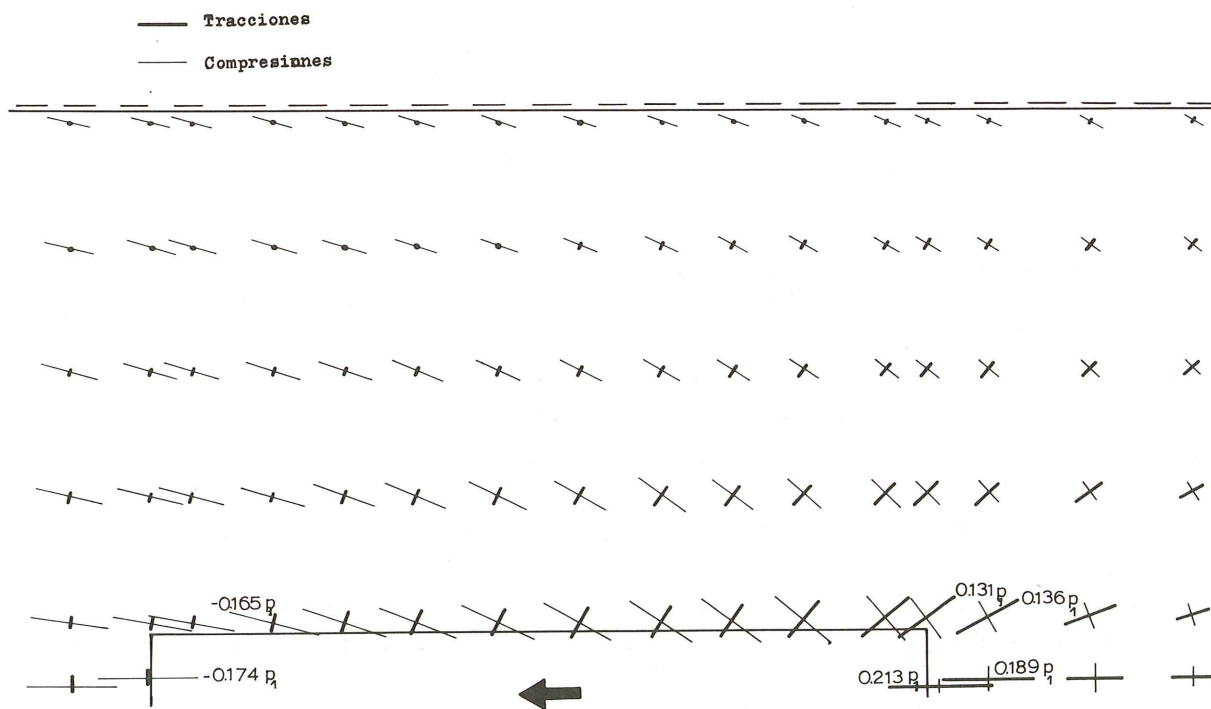


Fig. 15 b. Diagrama de tensiones principales sobre la fibra media de la losa.

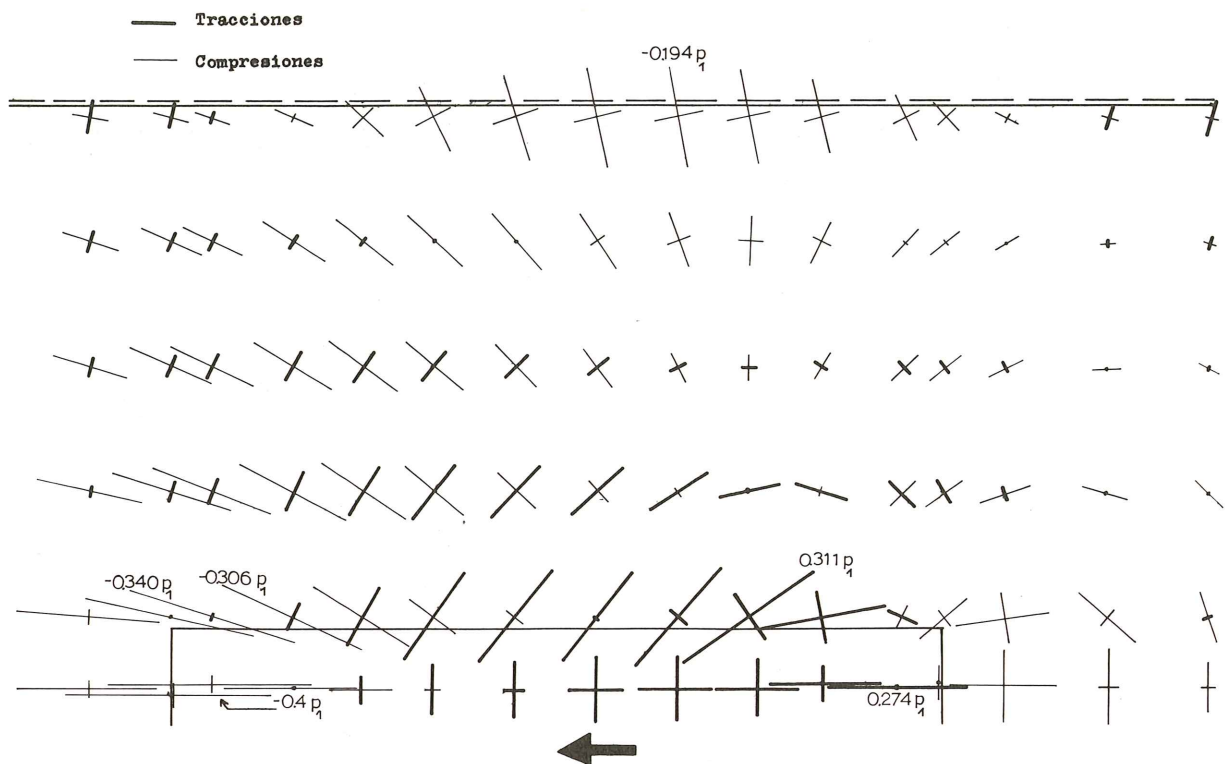


Fig. 15 c. Diagrama de tensiones principales sobre la fibra inferior de la losa.

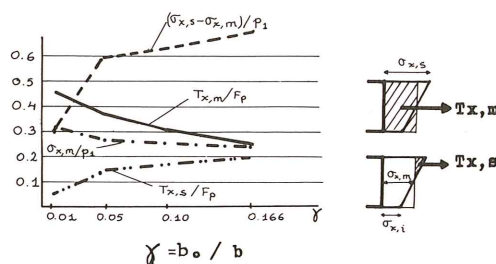


Fig. 16.  $T_{x,m}$  y  $T_{x,s}$  son, respectivamente, los volúmenes obtenidos por integración de las tracciones medias y de flexión a lo largo de la sección transversal situada inmediatamente detrás del nervio.

mos a los bordes de la losa, es aconsejable prever una armadura transversal sobre la fibra superior de la misma que permita recoger la flexión que se produce en el empotramiento.

En la figura 17 se presentan los diagramas de tensiones longitudinales obtenidos para el caso de dos anclajes relativamente próximos. Se muestran las curvas en dos secciones longitudinales: una en el eje del nervio del anclaje (fig. 17-a) y otra en el eje de la pieza (fig. 17-b)

La figura 17-a no se diferencia apenas de la obtenida en el caso de un solo anclaje, persistiendo las dos zonas críticas sometidas a tracciones importantes: detrás del nervio en la fibra superior y a lo largo del mismo en la fibra inferior. Con respecto al caso de un solo anclaje, se observa un lógico aumento de las compresiones delante de los nervios. No ocurre lo mismo con los valores máximos de las tracciones, que al tener su origen en unas flexiones muy localizadas alrededor de los mismos, no se ven sensiblemente afectados por la presencia de otros anclajes próximos.

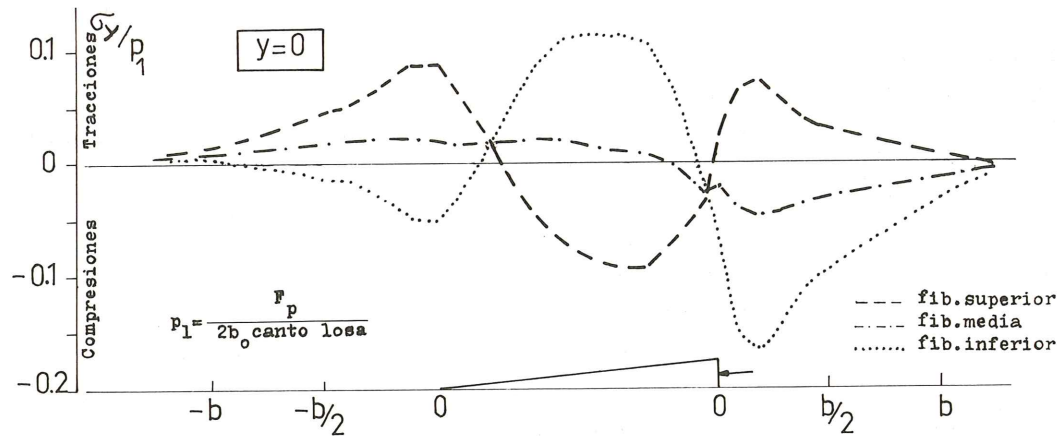


Fig. 17 a. Curvas de tensiones longitudinales en el eje del nervio.

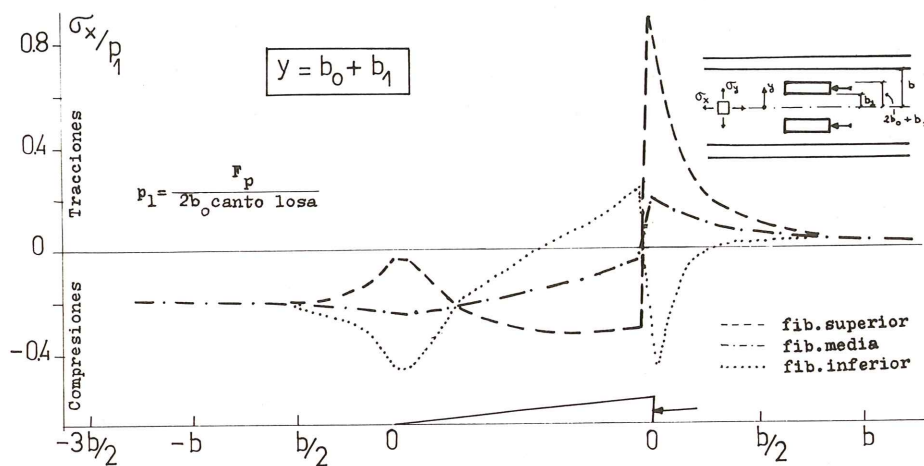


Fig. 17 b. Curvas de tensiones longitudinales en el eje de la pieza.

En la Fig. 17-b se observa que las tres zonas de flexión longitudinal, de las que ya se ha hablado anteriormente, persisten en la parte de la losa comprendida entre ambos nervios. Las armaduras longitudinales que se dispongan para recogerlas deberán por tanto extenderse sobre toda la zona entre anclajes.

Cuando sea preciso disponer varios anclajes relativamente próximos, una distribución desfasada de los mismos es más favorable. En efecto, la compresión proporcionada por los anclajes posteriores mejora el comportamiento de los situados delante, reduciendo sensiblemente las tracciones de arrastre detrás de los mismos.

## 7.2 Estudio no lineal

El estudio elástico, cuyos principales resultados acabamos de presentar, ha sido acompañado de un análisis no lineal que ha permitido seguir el comportamiento de la pieza hasta la rotura, teniendo en cuenta las importantes redistribuciones de tensiones que se producen como consecuencia, principalmente, de la fisuración del hormigón.

Dicho análisis ha exigido la puesta a punto de un modelo de cálculo por elementos finitos que permite la consideración de la presencia de armaduras de acero con comporta-



miento elastoplástico, de la fisuración del hormigón a tracción y de su respuesta no lineal bajo estados de compresión uni o biaxial. No vamos a entrar en la descripción de dicho modelo pues será objeto de una posterior publicación. Vamos por tanto a limitarnos al estudio de los principales resultados obtenidos:

En la figura 18 se presentan las curvas de tensiones longitudinales a lo largo del eje de la pieza en las fases elástica y fisurada, para el caso de un solo anclaje central. En ella se puede observar la importante redistribución de esfuerzos que tiene lugar como consecuencia de la fisuración del hormigón de la zona situada justo detrás del nervio. También se aprecia el comienzo de la fisuración sobre la cara inferior de la losa en la zona interior del nervio.

En la figura 19 se muestra la evolución de las tensiones y deformaciones longitudinales en dos secciones A y B situadas en el eje de la pieza a 1 y 8 cm, respectivamente, detrás del nervio. La fuerte punta de flexiones que allí se produce fisura rápidamente la fibra superior de la sección A. La fisuración se extiende muy pronto sobre el espesor de la losa llegando incluso a plastificar los aceros, produciéndose en dicha sección una especie de rótula. En la sección B la fisuración aparece también pronto, pero debido a la rótula que va desarrollándose en A, permanece bloqueada a partir de un cierto momento, sin llegar a solicitar excesivamente las armaduras.

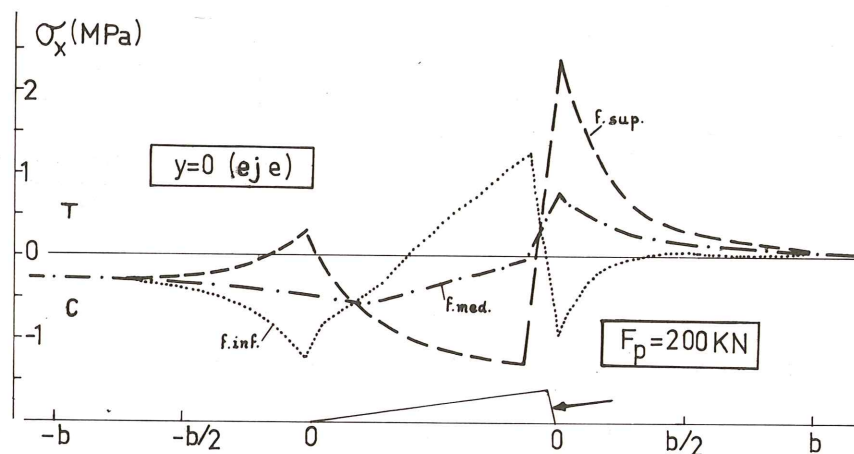


Fig. 18 a. Tensiones longitudinales en el eje de la pieza (fase elástica).

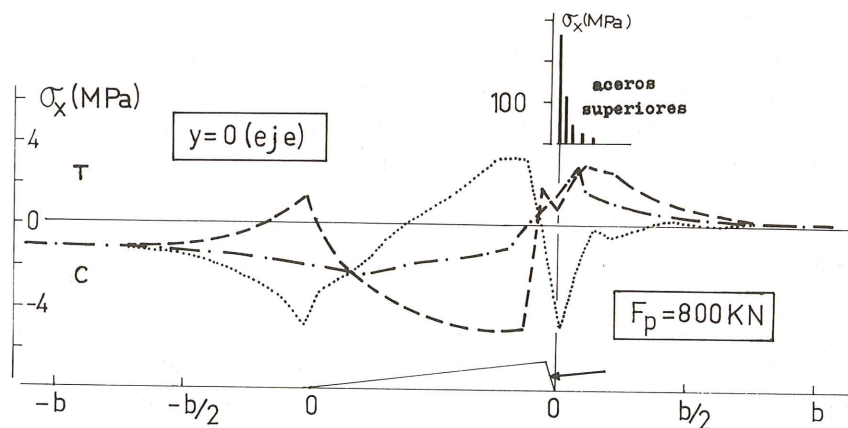
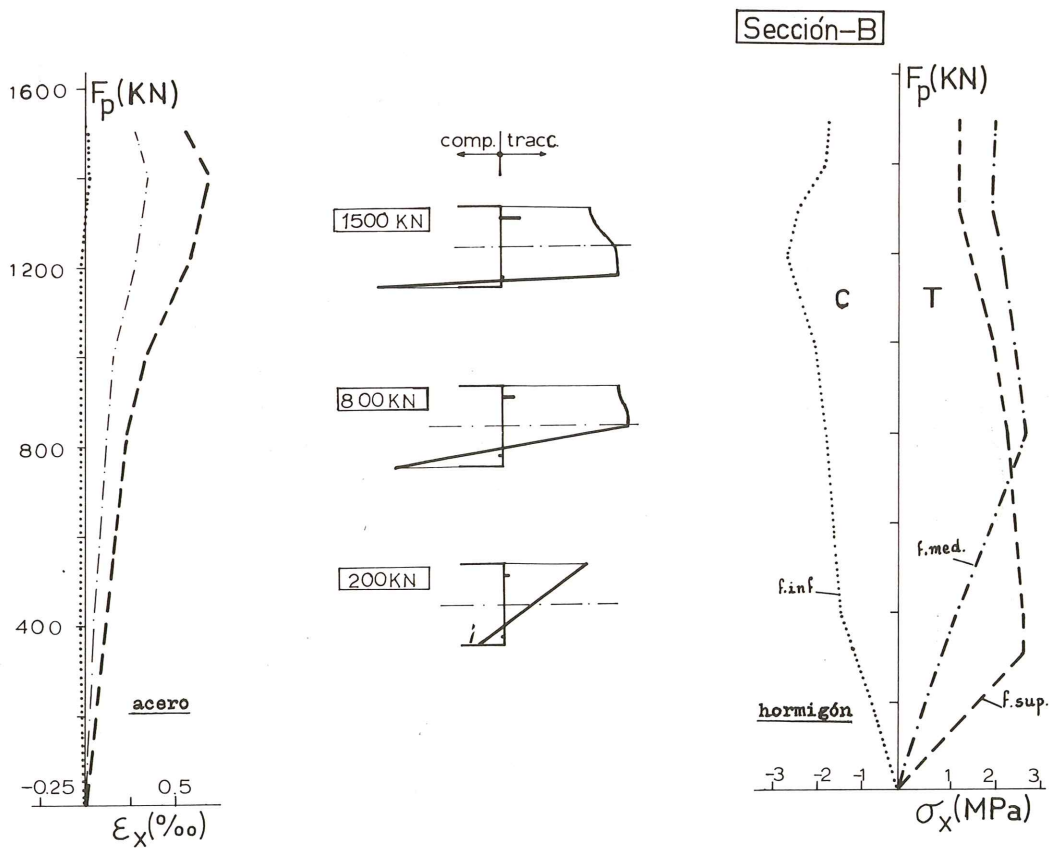
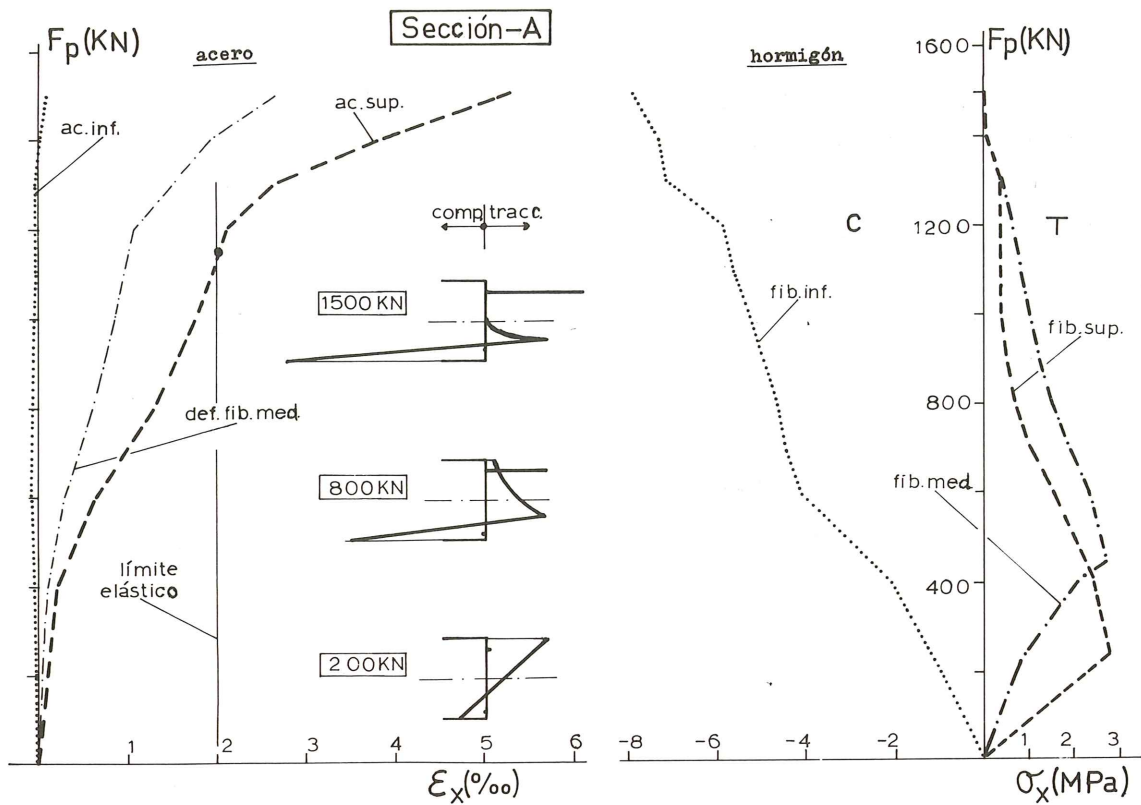


Fig. 18 b. Tensiones longitudinales en el eje de la pieza (fase fisurada).



En la figura 20 se muestran las tensiones longitudinales y transversales en la sección situada justo delante del nervio, donde las compresiones son máximas. Como ya se apuntó en el estudio elástico, la transmisión del pretensado a la losa a través del nervio se hace de forma gradual sin producir compresiones importantes en la misma, las cuales, como vemos, permanecen siempre en la zona de comportamiento lineal. Se observa así mismo cómo la flexión transversal inducida por el empuje del cable en su parte curva llega a fisurar la fibra superior de la losa. Esta fisura, sin embargo, no progresa apenas y solicita sólo débilmente al acero.

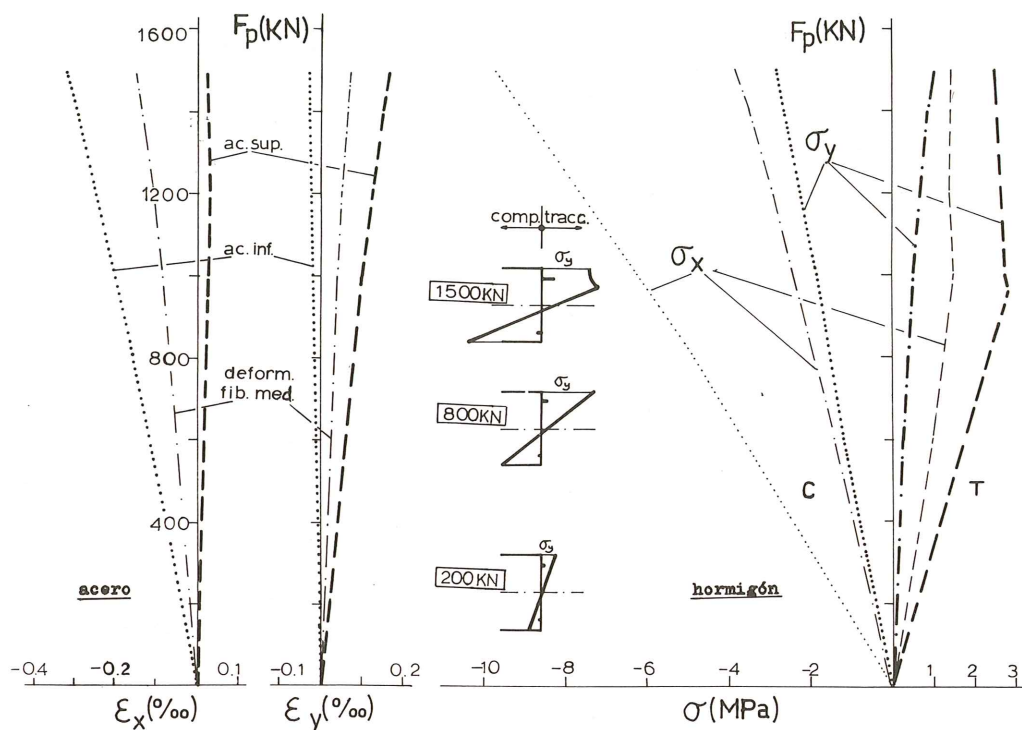


Fig. 20. Evolución del estado de tensiones y deformaciones en la sección del eje de la pieza situada justo delante del nervio.

Las curvas de las figuras 19 y 20 llegan hasta una fuerza de pretensado de 1.500 kN, valor para el cual, tanto en el análisis teórico como en el ensayo, se produjo la rotura a compresión del hormigón del nervio justo delante de la placa de reparto del anclaje.

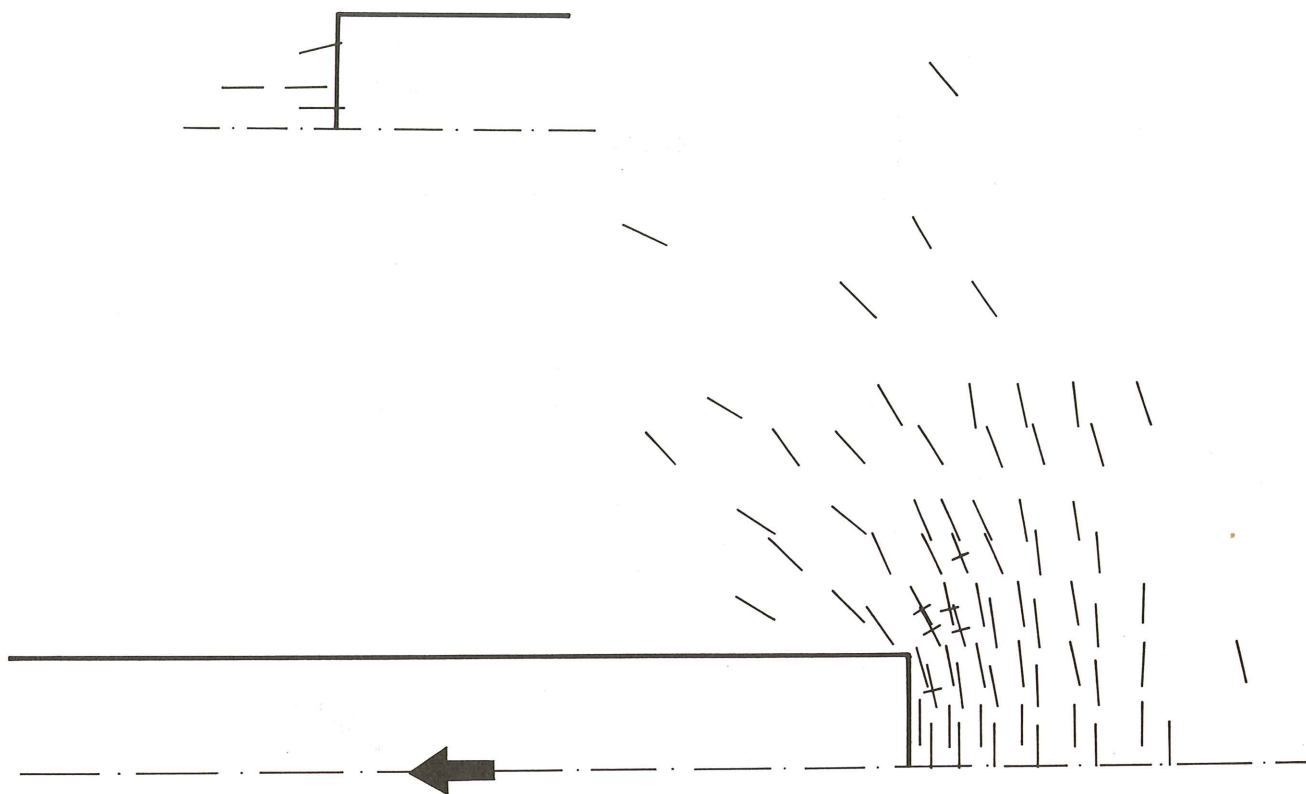
En la figura 21 se muestran las direcciones de fisuración obtenidas teórica y experimentalmente en el momento de la rotura. El acuerdo entre ambas puede considerarse aceptable.

En ellas se pueden apreciar tres tipos de fisuras:

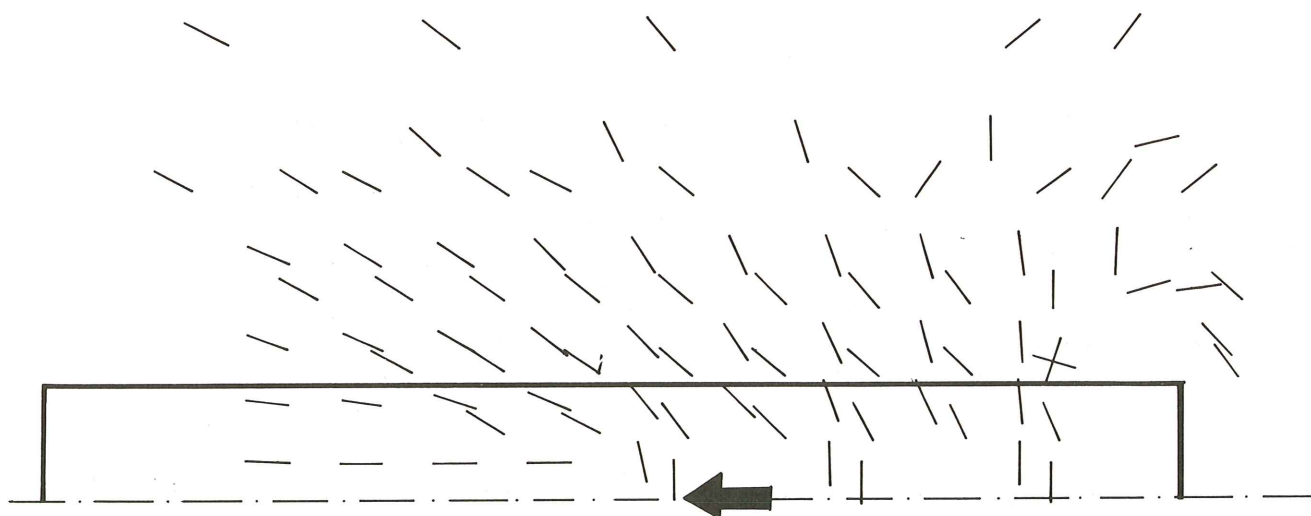
- Una primera, sobre la fibra superior de la losa, justo detrás del nervio. Esta fisuración permanece bastante concentrada en la zona próxima a la discontinuidad geométrica, donde aparece una especie de rótula que solicita fuertemente las armaduras, pudiendo incluso plastificarlas si la cantidad del acero es insuficiente.
- Una segunda fisuración se produce sobre la fibra inferior de la losa a lo largo del anclaje. Comienza a  $0.25 L_n$  del mismo y se extiende hacia adelante. Las fisuras permanecen finas, muy difundidas a lo largo y ancho de la pieza, extendiéndose sobre una zona algo superior a aquélla que aparecía traccionada en el estudio elástico. Los aceros más solicitados son los situados en los bordes laterales del nervio, aunque las tracciones no llegan nunca a ser muy importantes.



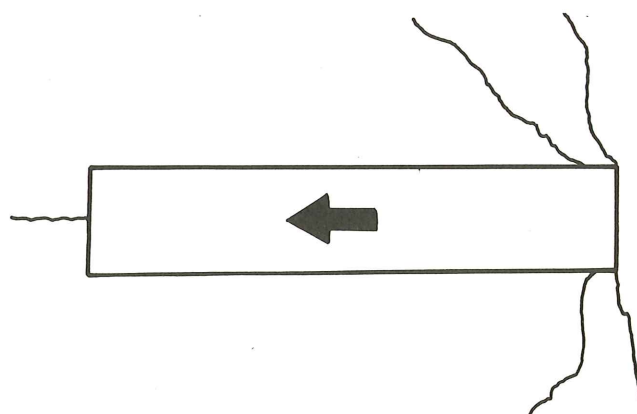
- c) Una fisura muy fina aparece en la base del nervio un poco antes de la rotura, debida al empuje del cable en su zona curva. La sollicitación en los aceros es poco importante.



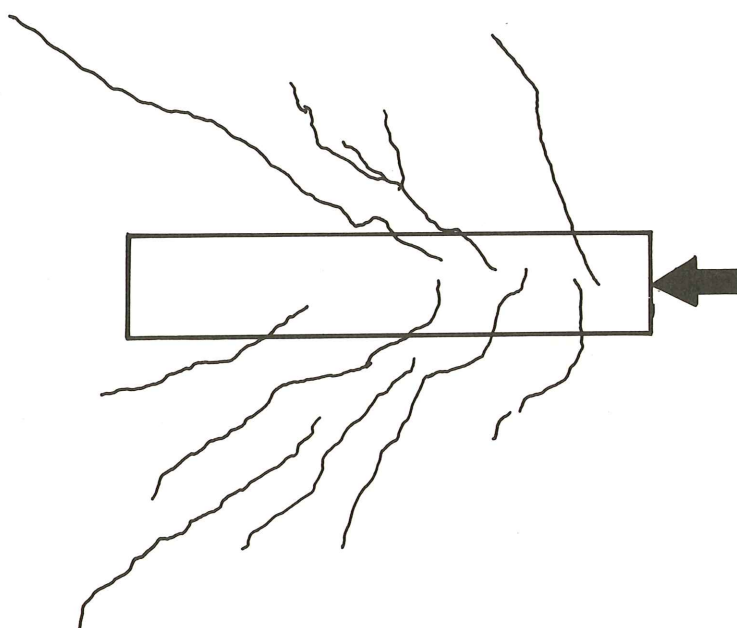
*Fig. 21 a. Direcciones de fisuración sobre la cara superior de la losa (teóricas)*



*Fig. 21 b. Direcciones de fisuración sobre la cara inferior de la losa (teóricas).*



*Fig. 21 c. Direcciones de fisuración sobre la cara superior de la losa (experimentales).*



*Fig. 21 d. Direcciones de fisuración sobre la cara inferior de la losa (experimentales).*

En la figura 22 se muestran las tensiones obtenidas en los aceros momentos antes de la rotura. Vemos que el acuerdo entre las zonas donde las armaduras están sometidas a esfuerzos importantes y aquéllas donde han aparecido fisuras en los ensayos es muy aceptable.

El estudio de estos resultados permite sacar una conclusión importante: incluso si la resultante de las tracciones medias de arrastre detrás del nervio es moderada y siempre inferior a la mitad de la fuerza de pretensado, y si la parte resistida por los aceros es todavía menos importante ( $0.29 F_p$  en la rotura para el acero estudiado), un dimensionamiento correcto de las armaduras deberá prever que:

- a) En la sección situada justo detrás del nervio aparece una flexión muy importante que tiende la fibra superior de la losa. La ferralla deberá pues disponerse de forma que recoja dicha flexión.
- b) Transversalmente, deberán concentrarse los aceros en la zona situada justo detrás del nervio, puesto que es la más solicitada.

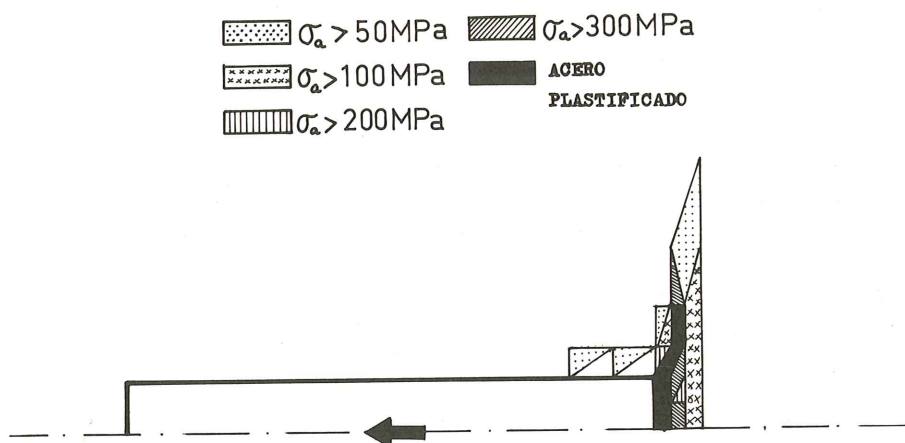


Fig. 22 a. Tensiones en los aceros de la capa superior para la carga de rotura del anclaje.

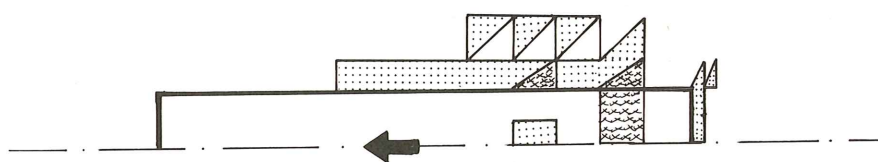


Fig. 22 b. Tensiones en los aceros de la capa inferior para la carga de rotura del anclaje.

En caso contrario, existe un riesgo evidente de formación de fisuras importantes en dicha zona, con grandes aberturas y posible plastificación de los aceros.

En la figura 23 presentamos una disposición de armaduras que se ha juzgado adecuada, de acuerdo con las conclusiones anteriormente expuestas. No se suministran cuantías, pues como ya se ha visto, depende en gran medida de las dimensiones de la losa y del nervio (ref. 9).

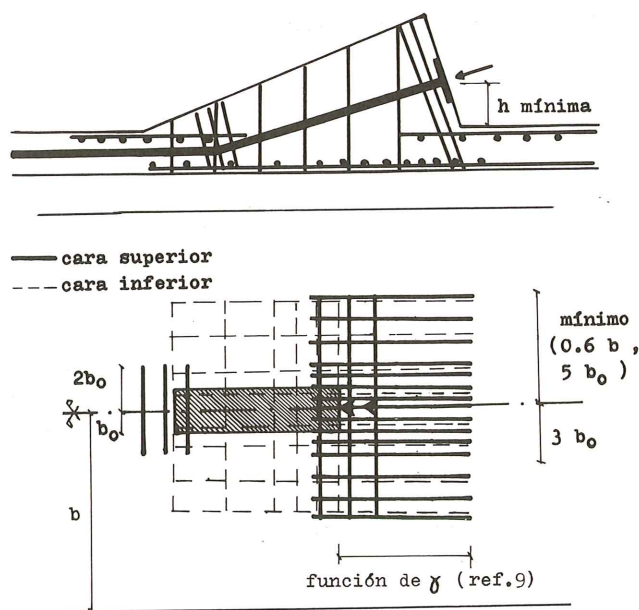


Fig. 23. Armado del nervio y de la parte de la losa próxima al mismo.



### 7.3 Efecto de una tracción uniforme actuando sobre la losa en la zona de los anclajes

No quisiéramos terminar sin comentar un punto que nos parece importante:

Hasta ahora se ha considerado únicamente el estado tensional de la losa debido a la aplicación de la fuerza de pretensado, suponiendo que la losa no se halla previa o posteriormente solicitada por ninguna otra causa. Evidentemente si como es lo normal, la cabeza inferior del cajón se halla comprimida, el efecto de dicha compresión será siempre favorable. Pero podría ocurrir que a causa de los efectos diferidos y térmicos se produjesen eventuales puestas en tracción (aunque sean moderadas) de las zonas de la losa donde se encuentran los anclajes.

Para estudiar las consecuencias de dicha eventualidad, hemos utilizado el programa de elementos finitos no lineales y, a partir del estado tensional obtenido para la carga de servicio del anclaje ( $F_p$  800 KN. para el caso estudiado), hemos aplicado progresivamente una descarga uniforme de la losa por etapas de 0.5 MPa. Los resultados obtenidos nos muestran que incluso con niveles de tracción moderados se produce una degradación importante de la losa, con un sensible aumento de las zonas fisuradas en ambas caras y un fuerte incremento de la sollicitación en los aceros superiores de la zona situada detrás del nervio, que lógicamente va acompañado de importantes aberturas de las fisuras.

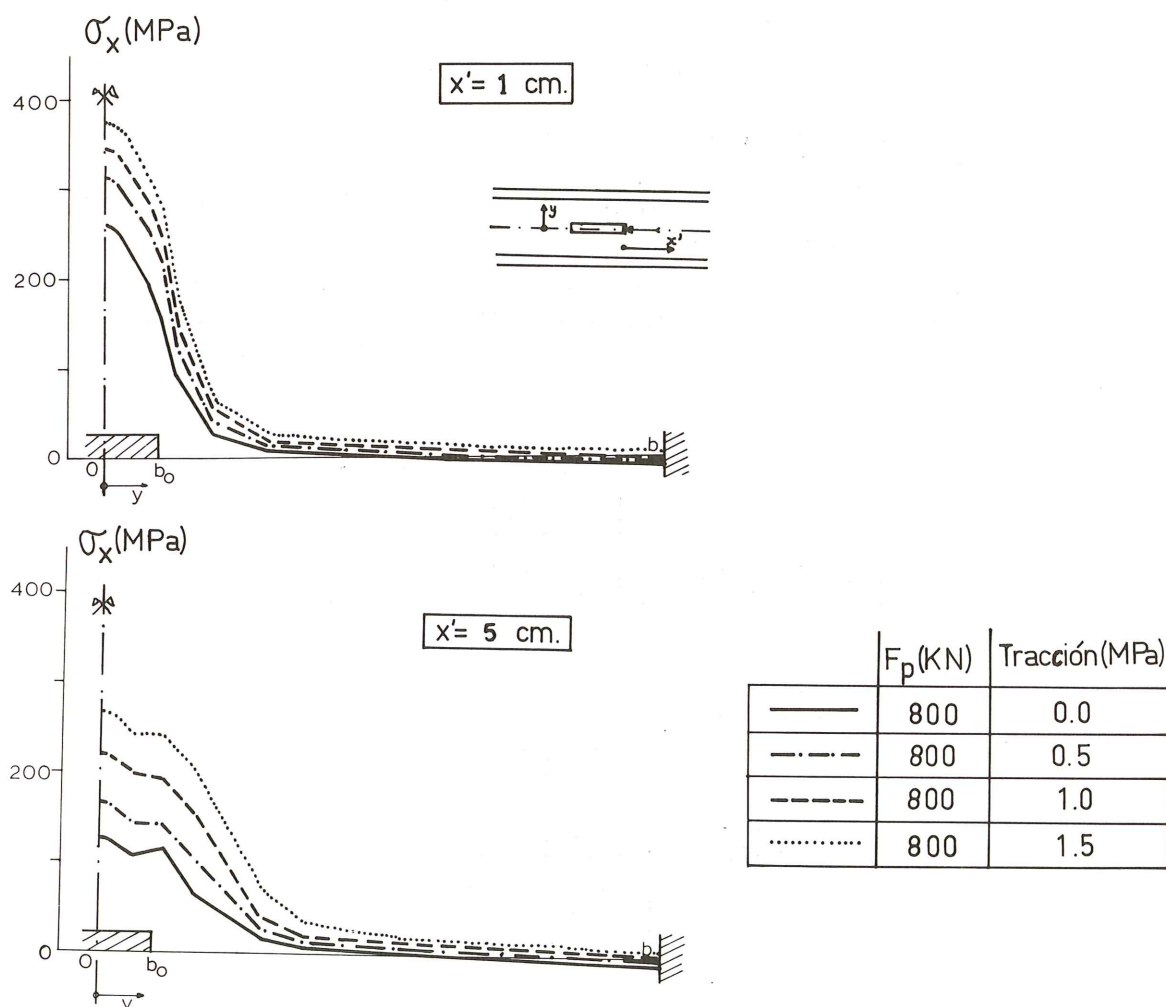


Fig. 24. Evolución de las tracciones en los aceros situados detrás del anclaje, a medida que aumenta la tracción de la losa.

En la figura 24 se presentan las tracciones de dichas armaduras en dos secciones transversales situadas, respectivamente, a 1 y 5 cm. detrás del nervio. Los incrementos de tensión obtenidos son los siguientes:

| tracción en la losa (MPa) | 0.5        | 1.0        | 1.5         |
|---------------------------|------------|------------|-------------|
| 1 cm. detrás del nervio   | 19 por 100 | 31 por 100 | 44 por 100  |
| 5 cm. detrás del nervio   | 33 por 100 | 80 por 100 | 120 por 100 |

Para concluir una última observación:

Los ensayos y el estudio teórico realizados han permitido obtener unas fisuras que corresponden, tanto en posición como en naturaleza, a aquéllas que se han observado en obras reales. Pero las fisuras obtenidas experimentalmente bajo la carga de servicio del cable han sido siempre muy finas y sólo para cargas muy próximas a las que han producido la rotura de los anclajes se han llegado a obtener fisuras comparables a aquéllas detectadas en algunos puentes.

Sin embargo, el cálculo teórico parece indicar que pequeñas tracciones en la losa en la zona donde se hallan los anclajes, pudiendo representar el efecto de los fenómenos diferidos y térmicos, podrían explicar la importancia de ciertas fisuraciones reales. Creemos por tanto conveniente estudiar la evolución en el tiempo del estado tensional de la zona de losa próxima a este tipo de anclajes, en algunas obras reales, con el fin de poder confrontar esta hipótesis.

## REFERENCIAS

1. Y. GUYON — “Constructions en béton précontraint” (Construcciones en hormigón pretensado).

Cours du CHEBAP, Tome 2, Eyrolles, París, 1968.

2. W. SCHLEE — “Ein einfaches Verfahren zur Lösung von Scheibenaufgaben”. (Método simplificado para resolver los problemas relativos a las placas).

Beton und Stahlbetonbau. Heft 3, 4 y 5. 1964.

3. W. SCHLEE — “Spanngliedverankerungen im Innern hoher Träger. (Anclaje de los cables de pretensado en el interior de vigas de gran canto).

Beton und Stahlbetonbau. Heft 2. 1974.

4. J. EIBL y G. IVANYI — “Innenverankerungen im Spannbetonbau”. (Los anclajes interiores en el hormigón pretensado).

Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Heft 223. Berlín, 1973.

5. B. Y. OULITSKI, O. I. VALOUYVA y D.N. POLIADOV. — Rastchyét Myéstnikh Napryágénii vo Khonstraukhtsiyakh Mostov” (Cálculo de los esfuerzos locales en los puentes de hormigón pretensado).

Moscú, 1974.

6. LY KIM TY — “Effets des forces de précontrainte concentrées dans les poutres caissons”. (Efectos de la fuerzas de pretensado concentradas en las vigas cajón). Tesis para la obtención del título de Doctor Ingeniero, presentada en la Universidad de París VI. Diciembre, 1976.

7. J. BRUNEAU — “Etude de l’ancrage d’un câble de précontrainte par bossage” (Estudio del anclaje de un cable de pretensado mediante cajetines).

La Technique Française du Béton Précontraint. Association Française du Béton. 8ème Congrès International de la Précontrainte. FIP, Londres, 1978.

8. M. KAVYRCHINE, J. TRINH, R. LAPLACE. “Etude de l’ancrage des câbles de précontrainte dans les hourdis” (Estudio del anclaje de los cables de pretensado en los forjados).

Compte rendu du S E S des essais HO, Saint Rémy lés Chevreuse (Francia) 1976.

9. F. MILLANES MATO — Anclages par bossage dans les hourdis des ponts: étude théorique et expérimentale”. (Anclajes por cajetines en los tableros de puente). Tesis para obtención del título de Doctor Ingeniero presentada en L’Ecole Nationale des Ponts et Chaussées de París. Septiembre, 1979.



## RESEÑA BIBLIOGRAFICA

“HORMIGON PRETENSADO”; por: Enrique Luis De Luca.— Librería Editorial “El Ateneo”. 243 páginas. Numerosas figuras.— Precio 665,00 ptas.

El Autor, Ingeniero Civil argentino, Profesor de la Cátedra “Hormigón II” en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Buenos Aires, y con una amplia y calificada actividad profesional en el proyecto y dirección de diversos tipos de obras de hormigón pretensado (muelles fluviales y marítimos, puentes y viaductos, estructuras para transporte de energía eléctrica, etc.), ha volcado en este libro su experiencia, con el objeto de lograr la capacitación de los ingenieros dedicados a esta moderna especialidad constructiva.

Para ello, al tratamiento de los fundamentos teóricos de la materia, agrega la descripción de la tecnología actual del pretensado para, finalmente, tratar del proyecto de las estructuras. De esta forma el libro mantiene un equilibrio razonable entre teoría y práctica, lo que proporciona al lector los conocimientos necesarios para fines de estudio, así como los medios idóneos para proyectar y construir estructuras.

Partiendo del hecho de que el hormigón pretensado es una técnica en permanente desarrollo, se siguen en el texto las directrices de la última versión del Código Modelo CEB—FIP, presentado en el Congreso Internacional de la F.I.P. celebrado, en Londres, en 1978.

También se dedica especial atención a las disposiciones de proyecto y construcción, características de los elementos prefabricados de hormigón pretensado, haciéndose un detenido estudio de los problemas relativos a uniones, apoyos, armaduras especiales, etc.

En resumen, el contenido de esta publicación puede esquematizarse en los siguientes puntos:

- Referencias históricas y desarrollo. Principios fundamentales. Métodos de pretensado. Unidades-Nomenclatura. Materiales. Pérdidas de tensión. Grados de pretensado. Equipos para la realización del pretensado. Sistemas. Transmisión del pretensado al hormigón. Adherencia. Diseño estructural. Principios de cálculo. Recomendaciones del Código Modelo CEB—FIP 78. Solicitaciones de flexión: Dimensionamiento de secciones. Solicitaciones tangenciales (esfuerzo cortante y torsión): Dimensionamiento de secciones. Secciones compuestas o mixtas: Dimensionamiento. Principios y detalles constructivos. Trazado de cables. Estructuras hiperestáticas. Prefabricación. Aplicaciones del hormigón pretensado. Ejemplos de cálculo. Bibliografía.

Los interesados en adquirir este libro pueden dirigir sus pedidos a:

En Madrid:

EDITORIAL “EL ATENEO”

San Pedro Mártir, 4

En Barcelona:

Loreto, 2



NOTAS DE LA F. I. P.  
Nº 61 marzo-abril, 1976

Selección de los trabajos más importantes (\*)

**MUROS DE HORMIGON PRETENSADO PARA DEPOSITOS DESTINADOS  
A ALMACENAR GAS NATURAL LICUADO**

En Staten Island, USA, se han construido dos grandes depósitos para el almacenamiento de gas natural licuado. La capacidad de cada uno de ellos es de 143.000 metros cúbicos. El muro perimetral tiene una altura de aproximadamente 36 metros y su diámetro exterior es de 82 metros. Ambos tienen las paredes interiores y exteriores constituidas por paneles a base de piezas prefabricadas de hormigón longitudinalmente pretensadas. Una vez situadas y montadas y para su afianzamiento van pretensadas con una armadura postesa circunferencialmente dispuesta.

Para conseguir los 36 metros de altura se monta cada par de piezas prefabricadas una sobre otra. Estas placas tienen 2,4 m de ancho por 18 m de alto. Las dos paredes guardan una separación de unos 4 m y en el espacio que queda entre ambas se intercala un relleno de 1 m de perlita en polvo y 3 m de hormigón en masa, siendo la finalidad de éste resistir los impactos exteriores. Esta protección es capaz de absorber, sin que se produzca la rotura, la fuerza producida por un Boeing 747 que choque a una velocidad de 200 nudos (370 km/h).

Ambos paramentos de hormigón pretensado tienen barreras de vapor exteriores, consistentes en placas de acero de 5 mm de espesor perfectamente adheridas al hormigón ya que se encuentran solidarizadas con éste mediante pernos de anclaje soldados a las citadas placas. Al montar estas piezas en obra se deja una separación entre cantos consecutivos de 20 cm; posteriormente la junta así formada se cubre con chapas y se hormigona.

La cubierta es una superficie esférica de 113 m de radio. Se ha construido sobre cerchas radiales que sustentan unas placas de 10 mm de espesor, de acero al carbono soldadas a tope.

El siguiente artículo, que trata de los problemas que se han planteado al proyectar y construir estos depósitos, es original del Carl Bernhardt, jefe de obras de la firma Preload y responsable de las operaciones de bobinado de la armadura.

Con motivo de la fabricación y montaje de las duelas prefabricadas de hormigón pretensado, que constituyen parte de la estructura de los dos depósitos mayores del mundo para el almacenamiento de gas natural licuado, se ha probado que el trabajo en equipo hace posible se lleve a feliz término el proyecto, la coordinación y el control de un complejo conjunto de unas dimensiones más bien extraordinarias.

---

(\*) Artículos seleccionados de Notas de la FIP, núm. 61, marzo-abril, 1976. Ante la imposibilidad de publicar todos los trabajos que aparecen en las Notas de la FIP, a partir de ahora y salvo que varíen las circunstancias, sólo se incluirán los que, por su indudable interés para nuestros lectores, sea necesario difundir. Lamentamos sinceramente no reproducir todo el contenido de la referida publicación, ya que por su cada vez mayor extensión no podemos dar cabida de la misma en las páginas de Hormigón y Acero.

Distintas materias tales como bajas temperaturas, termodinámica, mecánica de roturas, hidráulica y análisis estructural fue necesario coordinarlas y aplicarlas a los muros de estos depósitos, que están pretensados verticalmente con armaduras pretesas y horizontalmente con una armadura postesa, consistente en un devanado helicoidal cilíndrico. Los efectos que producen variaciones de temperatura de trabajo de 300°F (149°C) sobre tal compleja estructura no monolítica fue preciso considerarlos detenidamente, teniendo presente la influencia de ciertas características usuales en el hormigón pretensado tales como su elasticidad, retracción, fluencia, relajación, etc.

También se ha estudiado el comportamiento de los elementos que constituyen el depósito, y el depósito como conjunto, para condiciones no normales tales como impacto de aeronaves, fuego interior o exterior, presión excesiva interna o externa y accidentes de funcionamiento.

Ciertas partes aplicables de las normas del American Petroleum Institute, como por ejemplo (API 620 & App. Q) "Reglas para el diseño y la construcción de grandes depósitos soldados para baja presión", sirvieron como complemento a las especificaciones de la Instrucción para el hormigón convencional y para el hormigón pretensado. Estas últimas tuvieron que revisarse con objeto de que las especificaciones para fines criogénicos fuesen también tenidas en cuenta. Seguidamente se procedió a la revisión y evaluación del proyecto por varias comisiones técnicas y de seguridad, instituciones gubernamentales y por especialistas. Esta fase requirió un gran esfuerzo, ya que fue necesario conseguir se aceptase la utilización de alambres de acero al carbono en un medio criogénico.

El hormigón es un material criogénico, pero no puede contener los gases naturales licuados, en forma de vapor a presión, en condiciones normales de sequedad. Por consiguiente es preciso protegerlo con una barrera de vapor.

Preload ha aplicado la tecnología del pretensado a construcciones compuestas situando una delgada placa de acero al carbono de forma que trabaje a compresión, eliminando eficazmente las tensiones de tracción, que pueden dar lugar a la propagación de las fisuras por rotura frágil. Las discontinuidades entre cada uno de los elementos independientes del depósito también contribuyen a impedir la propagación de las fisuras. El ensayo criogénico probó la validez de la teoría. El tesado previo de los paneles de muro de hormigón pretensado tuvo como finalidad producir las fuerzas de compresión verticales requeridas en las secciones compuestas. Los pasadores soldados a la chapa sirven para aumentar la adherencia entre esta y el hormigón. En los extremos de los paneles de 18 metros de longitud se colocaron chapas de acero al níquel (9 por 100) y pasadores de acero inoxidable, debido a que están en tracción. La pared del depósito circular de piezas ensambladas se pretensó circunferencialmente para producir la necesaria fuerza de compresión horizontal en la misma. El ensayo a temperatura criogénica mostró que el alambre no presenta rotura frágil. Esto puede explicarse si se observa que el estirado, que produce la terraja sobre el alambre da lugar a una microestructura alargada lineal, de forma que el alambre puede asimilarse a una estructura fibrosa. Todas las fibras son materiales criogénicos. El pequeño calibre del alambre (4,8 mm de diámetro después del estirado final) lo sitúa en la zona extrema de la seguridad del espectro de sensibilidad al entallado. Además, el alambre se coloca sobre el paramento a tracción, debido al estirado final realizado por la terraja, que efectúa un ensayo real del alambre en toda su longitud. Si existe algún defecto en el alambre éste se romperá y la parte de arrollamiento que se ha dispuesto sobre el paramento quedará suelta y, por tanto, será descartada.

El productor de piezas prefabricadas está familiarizado con la soldadura de pasadores, pero la logística requerida para soldar 1,3 millones de pasadores a placas de 2,4 m de ancho y 18 m de longitud, requiere un turno adicional nocturno para realizar este trabajo. Las técnicas de soldadura han de ser buenas y los operarios deberán estar bien entrenados en la planta para ser capaces de realizar la soldadura a tope de acero al carbono con acero al carbono y de acero al carbono con acero al 9 por 100 de níquel. El que ajusten perfectamente las chapas y el que las soldaduras por solape no presenten deformaciones constituyeron problemas adicionales que fue preciso resolver.

Las medidas para el control de la calidad durante la fabricación comprendió: radiografías de las soldaduras por zonas, prueba de vacío con solución jabonosa, verificación de la situación y alargamiento de los cordones, comprobación de las soldaduras en chapas y aditamentos, limpieza, medición de asiento, aire, registro de temperaturas y ensayo de temperaturas y ensayo de probetas cilíndricas a 7 y 28 días.

Los paneles de paramento se liberaron del banco de moldeo cortando a soplete los sobrantes de los cordones en grupos de a cuatro, alternando la operación desde cada lado hacia el centro de la pieza. Para retirar los paneles de 45 toneladas del banco de moldeo y llevarlos al lugar de almacenamiento se utilizó un dispositivo de cuatro puntos de enganche. Los cantos de los paneles apilados se trataron con chorro de arena para dejar al descubierto el árido y mejorar así la adherencia de la junta de hormigonado. Los paneles de paramento se transportaron a medida que se moldeaban, con la parte cóncava hacia arriba.

La colocación en obra de los paneles de paramento requirió una perfecta coordinación entre los personales siderúrgico, caldereros y los que elaboran el hormigón. Se montaron verticalmente Secciones de cim-



bra para puentes Bailey, que se unieron para formar una circunferencia sustentadora de una viga curva destinada a la erección de los paneles. Las piezas prefabricadas se fijaron entre sí y a la cimentación del depósito. En ciertas zonas de las cimbras Bailey se montaron plataformas, escaleras y, a determinadas alturas, se dispusieron pasadizos. El orden de sucesión de las operaciones comprendió, la erección de los paneles, la soldadura de las placas de revestimiento y el moldeo de las juntas. El procedimiento de realizar el montaje fue el siguiente:

1. Se colocaron en su correcta posición las planchas de cimentación y las planchas de zócalo del depósito. Se completó y ensayó la soldadura en "T" entre las planchas de zócalo (de 9,5 mm de grueso y con 9 por 100 de níquel) y la plancha de cimentación de características similares.
2. Los paneles inferiores del paramento interior se dispusieron sobre un camión plataforma con la cara cóncava (interior) hacia arriba.
3. Se pasaron eslingas por las cuatro horquillas de izado del panel y por los dos ganchos de una grúa doble, para levantar la pieza.
4. Se retiró la plataforma y se hizo descender la parte inferior del panel mientras se levantaba la superior de modo que el panel se apoyase en el suelo. Se continuó la operación levantando la parte superior haciendo girar el aguilón de la grúa hasta que el panel colgaba totalmente. De la parte inferior del tablero se retiró la eslinga y en las horquillas de izado de la parte inferior se ataron unas cuerdas guía.
5. Se colocó una plancha de plomo, de 5 mm de espesor, como elemento de apoyo sobre la chapa de cimentación, que es de acero con un 9 por 100 de níquel, y se montaron sobre la cimbra Bailey unos gatos.
6. El panel se llevó con sumo cuidado a su posición definitiva. Esta operación se realizó con los gatos, que por una parte se apoyaban en la cimbra Bailey y por otra empujaban a unos acomplamientos dispuestos en la parte inferior del panel. Los gatos desplazaron suavemente al panel en sentido radial hacia el exterior para apoyarlo en la chapa del zócalo; posteriormente se descendía éste para situarlo en su correcta posición. Para poder realizar una buena soldadura a tope entre la chapa de zócalo y la barrera de vapor del paramento fue preciso hacer muy exacto el ajuste.
7. Por medio de los gatos situados en la parte superior se colocaron los paneles perfectamente verticales. Sin embargo los paneles presentaban un ligero arqueamiento hacia afuera, pero se decidió dejarlos así en lugar de obligarlos a estar rectos, puesto que esto podía dar lugar a que se formasen tensiones secundarias y, por otra parte no importaba presentasen esta "forma de barril".
8. Los paneles se fueron montando en el sentido inverso al de la marcha de las agujas de un reloj con objeto de proporcionar una mejor visibilidad al maquinista de la grúa. Entre paneles contiguos se dejó una separación de 20 cm. Las placas de conexión, situadas en los cantos verticales y distanciadas entre sí 3 metros, se enlazaron mediante la soldadura de unas pletinas de 12 x 76 mm para afianzar los paneles adyacentes, manteniéndose así alineados.
9. Para dar continuidad a la barrera de vapor, por encima de las juntas se soldaron, solapándolas sobre los paneles adyacentes, unas chapas de acero al carbono con clavijas de anclaje. Esta operación en todos los casos resultó muy difícil de realizar.
10. Sobre los cantos de los paneles adyacentes se fijó un juego de encofrados, moldeándose las juntas por medio de una trompa de elefante y a través de unas ventanas especialmente previstas en los mencionados encofrados. El personal componente del equipo de hormigonado observó que el hueco entre paneles constituía una perfecta trompa de elefante, apta para colocar el hormigón. Haciendo tal uso de ella, consecuentemente las ventanas sirvieron únicamente como lugares de acceso para los vibradores, pudiendo de esta forma realizar un vibrado continuo. Hubo cierta preocupación respecto a la posibilidad de que el hormigón se atascase entre las piezas de enlace de los paneles. Introduciendo el hormigón con consistencia semiseca en pequeñas tongadas se logró una buena compacidad. Ni un solo metro de los 13.000 m de juntas presentó huecos o coqueras.
11. Después de colocados en obra la mitad de los paneles y hormigonadas sus juntas se trasladó la cimbra Bailey por secciones para proseguir la erección de los restantes paneles.
12. Cuando estaba a punto de completarse la colocación de los paneles interiores, comenzó la erección de los paneles exteriores. Dichas piezas se colocaron sobre apoyos de amianto y caucho. Una vez colocadas se soldaron al zócalo pero no así a la placa de apoyo al suelo. Dicha placa se ancló a la cimentación. La soldadura de los paneles a la placa de apoyo al suelo se realizó después de finalizado el pretensado circular, con objeto de que los paneles pudiesen desplazarse radialmente hacia el interior, alcanzando este corrimiento unos 20 mm.



13. El acceso a la parte superior de los paneles exteriores, separados cuatro metros de los interiores, se consiguió colocando caballetes especiales metálicos colgados de los paneles interiores. Estos caballetes además de servir como andamio de trabajo y acceso, sujeción y mantenimiento de los paneles exteriores, se emplearon como plataforma para almacenar materiales, equipo y herramientas.

Finalizada la operación de montar todas las piezas inferiores del paramento interior, se colgaron los caballetes de los paneles que forman parte del muro exterior, facilitándose así acceso desde el exterior a la parte inferior de los paneles superiores del muro interior. La erección de estos elementos se realizó de una manera similar. Los paneles de la parte superior tienen unas muescas coincidentes con resaltos dispuestos en el canto superior de los paneles inferiores. Para calzar los paneles y distribuir la carga se utilizaron planchas de plomo. Cuando se montaron todos los paneles superiores, que completaban el muro interior, se colgaron de los citados muros los caballetes para tener acceso a la zona superior de los paneles exteriores.

Los muros del depósito una vez terminados apenas presentaban desviación respecto a la horizontal, siendo esta desviación no superior a los 12 mm y su altura media se encontraba comprendida dentro de los 6 mm referida a la medida de la altura media requerida. Seguidamente se procedió al bobinado del alambre para impartir la requerida fuerza de compresión horizontal a los muros.

## **VIADUCTO PARA EL METRO DE LA HAYA**

**Por Ir. A. van der Niet.**

Se trata de un comentario sobre las obras destinadas al primer ramal de una línea de transporte rápido en La Haya, capital de Holanda. Formando parte de este ramal ha sido necesario construir un viaducto de 18 tramos, los cuales tienen una longitud media de 35 m. Su trazado es parcialmente recto y el resto en curva.

El tablero del puente tiene que sustentar una doble vía en la cual se han utilizado carriles sin juntas, con objeto de mejorar el confort de la circulación. Como consecuencia de esto ha sido necesario impedir el movimiento de los carriles fijándolos de modo que no se desplazasen ni longitudinal ni transversalmente. Sin embargo, el tablero del puente como consecuencia de los cambios de temperatura presenta variaciones longitudinales y se ha de mover respecto a la posición de los carriles. Los apoyos de los carriles, por tanto, están previstos para estos movimientos, pero la correspondiente fricción incrementa los esfuerzos en los citados carriles. Por esta razón la amplitud de los movimientos por dilatación del tablero deben limitarse y consecuentemente los tramos van simplemente apoyados.

La sección transversal del puente consiste en una viga cajón unicelular de hormigón pretensado moldeada en dos partes. Una vez moldeado el fondo y las almas del cajón conjuntamente con las alas del voladizo, se moldea la zona central sobre una delgada placa prefabricada, que hace de encofrado perdido, con nervios transversales rigidizadores. El pretensado longitudinal se ejerce por medio de unos tendones Fryssinet, constituidos por 12 cordones de 0,52 pulgadas (13 mm) de diámetro. El pretensado transversal se obtiene con cables formados por alambres de 12 - 5 mm.

Las pilas tienen como cimientos zanjas rellenas formando placas. En la parte curva del puente el ancho de las placas de cimentación se ha incrementado, ya que tienen que resistir fuertes esfuerzos horizontales y excéntricos así como cargas permanentes y sobrecargas.

Los apoyos para las cargas verticales, situados debajo de las almas de la viga cajón, consisten en placas de caucho de suficiente espesor para poder absorber las dilataciones debidas a efectos térmicos. Los diafragmas situados en los extremos de las vigas cajón tienen un resalto que encaja en un alojamiento previsto en la parte superior de las pilas. Este resalto queda fijado transversalmente en sus dos extremos por medio de gatos planos, acoplados entre placas de apoyo de caucho. Los gatos se rellenan con lechada. Se ha estudiado la posibilidad de rotura de los carriles, bajo temperaturas extremadamente bajas, ya que tales carriles continuos se encuentran sometidos a altas tensiones de tracción.

La desaparición de estas tensiones al producirse la rotura da lugar a movimientos del tablero, originándose grandes esfuerzos sobre las pilas inmediatas, para los cuales no han sido diseñadas. El tramo completo puede llegar a desprenderse de sus apoyos.

Por consiguiente, en la zona de los apoyos los diafragmas de los tramos contiguos se han acoplado con 6 barras Dywidag de acero de alta resistencia a la tracción de 32 mm de diámetro. Estas barras que no están tensas pueden moverse libremente en los conductos y únicamente trabajan cuando se producen condiciones excepcionales. En el espacio existente entre las placas de anclaje y los diafragmas se ha situado una placa de caucho, que tiene como finalidad absorber el impacto, en el caso de que los carriles se rompan. De esta forma los esfuerzos sobre las pilas y los movimientos de los apoyos no sobrepasan ciertos valores, que se ha previsto sean los aceptables.

## UN VIADUCTO DE HORMIGON PRETENSADO RESISTE EL FUEGO

La Mancunian Way, en Manchester, Inglaterra, es una carretera de dos calzadas y 4 km de longitud, elevada en la mayor parte de su trazado. El tramo elevado está constituido por dos vigas cajón gemelas prefabricadas y sobre cada una de ellas hay una losa que vuela a ambos lados. Los tendones de pretensado, situados en las almas de la viga cajón, hacen que el viaducto sea una estructura continua en toda su longitud.

En septiembre de 1975, alrededor de las ocho de la tarde, hora punta para el tráfico, ardieron, directamente debajo de uno de los carriles de tráfico, cinco grandes casetas de obra hechas con madera. El fuego se logró extinguir en menos de treinta minutos, pero se estima que la temperatura en el intrados del viaducto, a pocos metros por encima de las casetas, alcanzó los 1.000°C.

En la inspección realizada al día siguiente se observó que solamente unos 25 metros de una de las calzadas había sido dañada por el fuego. Por no estar afectada la otra calzada se puso en servicio inmediatamente. El desconchamiento, con una profundidad de 50 mm, afectó a una superficie de aproximadamente 350 metros cuadrados. El árido utilizado en la construcción del viaducto es una grava caliza con bajo coeficiente de dilatación. Como consecuencia del desconchamiento las barras inferiores quedaron visibles, pero examinada la zona afectada se llegó a la conclusión de que ni el acero ni el resto del hormigón de la estructura se habían debilitado por la acción del fuego.

El trabajo de reparación, en lo que se refiere a la zona correspondiente a la sección de la viga cajón, consistió en aplicar una capa de gunita de 50 mm y una malla metálica. Por otra parte para sustituir los 50 mm de "pérdidas" de hormigón pretensado en las losas transversales del voladizo, se añadieron 70 mm de gunita y malla metálica.

Traducido por  
C. Sánchez Castro

---

### Exposición Internacional de equipos para construcción, 81. Exposición y Congreso de Obras Públicas y servicios Municipales

Este acontecimiento, que se celebrará en el Centro Nacional de Exposiciones de Birmingham, Inglaterra, del 23 al 28 de febrero de 1981, abarca un amplio campo de actividades tales como maquinaria para la Construcción y Obras Públicas, Tratamiento de aguas limpias y residuales, materiales y servicios para la industria de la construcción, etc. También queda comprendido dentro de este certamen el 34 Congreso de Obras Públicas y Servicios, que tendrá lugar durante la Exposición en el Hotel Metropole, teniendo como tema "El Futuro". En este Congreso se presentarán comunicaciones sobre los planes futuros para el medio ambiente, servicios públicos, carreteras, ingeniería civil, arquitectura y cuestiones afines.

Los interesados pueden solicitar un folleto de 12 páginas, que describe tanto la Exposición como el Congreso, en inglés, francés y alemán, a Mr Jack Mitchell, exhibition organiser, The Municipal Agency Ltd., 178 - 202 Great Portland Street, London W1N 6NH, Inglaterra. (T° 01 - 637 2400; Télex 262568). Pueden obtenerse detalles del Congreso solicitándolos a The Public Works Congress Council, Monaco House, Bristol Street, Birmingham B5, Inglaterra (T° 021 - 622 2984).



**Materiales para Hormigón  
(Concrete-Making Materials)**

**Sandor Popovics**

**Ingeniero Consultor**

**Profesor de Ingeniería Civil en la Universidad de Drexel (USA)**

**Hemisphere Publishing Corporation**

**McGraw-Hill Book Company, New York, 1979**

**La obra**

Se trata de un libro sobre las propiedades de los materiales para hormigón, en relación con las propiedades del hormigón mismo.

Va dirigido a profesionales y estudiantes que de una forma u otra tengan que ver con la producción, el consumo y la venta, o con las especificaciones, los ensayos y el control del hormigón. En el libro se enfocan y hacen destacar aspectos prácticos de las propiedades y aplicaciones tecnológicas del material.

Dentro de dicho marco se dan recomendaciones para la selección y utilización de los materiales para hormigón, en función de sus propiedades técnicas más importantes. En particular se tratan aspectos cuantitativos fundamentales de los cementos portland y de otros conglomerantes, desde el punto de vista de su fabricación, de los diferentes tipos, y composiciones, y de las propiedades técnicas de los mismos.

Atención especial merecen los temas de la hidratación del cemento y de sus correspondientes mecanismos, referidos a las reacciones del fraguado y del endurecimiento, así como a la estructura de la pasta hidratada.

Los cementos portland, aluminosos, siderúrgicos, puzolánicos y supersulfatados, como también los naturales y de albañilería, los blancos y coloreados, los impermeables e hidrófobos, los de fraguado rápido o regulado, los de bario y estroncio, los antibacterianos, o los especiales para sondeos y perforaciones petrolíferas, son tratados individualmente.

El agua, los aditivos y los áridos, estos últimos en cuanto a sus propiedades físicas, químicas, geométricas, granulométricas y de peso específico, son asimismo tomados en consideración en la obra.

Todo ello constituye el contenido de un volumen de 370 páginas distribuidas en 14 capítulos, con un prólogo, una introducción y un índice alfabético de materias, a más de un total de 29 tablas, 129 figuras (de ellas 5 fotografías) y 916 referencias bibliográficas distribuidas entre los 14 capítulos.

En suma, se trata de una buena obra sobre materiales para hormigón, con especial énfasis en cementos y áridos, de comprensión fácil y clara exposición, no exenta de profundidad, detalle y rigor, lo cual la hace valiosa en múltiples aspectos.

**El autor**

Sandor POPOVICS es un prestigioso Ingeniero Consultor en materiales de construcción, con el grado de Ph. D. en Ingeniería Civil por la Universidad norteamericana de Pur-



due. Ha sido Profesor y Coordinador de investigación en la Universidad de Arizona, y es Profesor en la Universidad de Ingeniería Civil de Drexel (EE.UU.).

Ha prestado sus servicios en el National Highway Safety Advisory Committee y participado en el intercambio científico de la National Academy of Science de los Estados Unidos.

Está inscrito como Ingeniero Civil en el estado norteamericano de Alabama, y es autor de numerosas publicaciones técnicas, entre libros y artículos aparecidos en conocidas revistas periódicas de circulación mundial. Las condiciones personales del autor en cuanto a conocimientos y experiencias, avalan la alta calidad de su reciente obra.

José Calleja

---

## ULTIMA PUBLICACION ESPECIAL DE LA A.T.E.P.

### Manual H.P. 5-79 "Recomendaciones para la disposición y colocación de Armaduras"

Como continuación de la serie de Manuales que, desde hace años, viene editando la Asociación Técnica Española del Pretensado, y en los que se recogen las recomendaciones relativas a las diferentes etapas del proceso general de ejecución de las construcciones pretensadas, se publica ahora el Manual H.P. 5-79 en el que, bajo el título "Recomendaciones para la disposición y colocación de armaduras", se han recopilado todas aquellas normas que la práctica ha demostrado deben tenerse en cuenta para obtener una adecuada disposición de las armaduras en los elementos pretensados, tanto si se trata de armaduras pretesas como postesas, incluyéndose así mismo las armaduras pasivas que suelen acompañar a las activas.

Por la íntima relación existente entre tales armaduras y otra serie de dispositivos y piezas tales como los anclajes, empalmes, vainas, separadores, etc., se recogen también en este Manual las recomendaciones correspondientes a su colocación.

En todos los casos, se tratan por separado las fases de proyecto, ejecución y control.

El interés del tema elegido resulta evidente si se tiene en cuenta que el estado tensional creado por las armaduras activas en todo elemento pretensado, debe ser tal que permita a éste cumplir, con las necesarias garantías de seguridad y durabilidad, la función a que va destinado. Y como dicho estado tensional depende, no sólo de la magnitud sino también del punto de aplicación de la resultante de las fuerzas de pretensado introducidas, se comprende que la disposición de las armaduras en este tipo de piezas adquiere una importancia primordial; por lo que su colocación debe ser cuidadosamente realizada en obra.

A la consecución de este objetivo se estima que habrán de contribuir, de modo importante, las recomendaciones del Manual que ahora se ofrece y que se espera tendrá la misma favorable acogida que los anteriores de la serie, no sólo entre los Miembros de nuestra Asociación, sino también entre cuantos profesionales desarrollan sus actividades en el campo de la técnica del pretensado.

Este Manual H.P. 5-79, con 87 páginas y varias figuras, se ha puesto a la venta al precio de 300,— ptas. el ejemplar (6,— dólares USA para el extranjero). Para los Miembros de la A.T.E.P. se ha establecido el precio especial de 200,— pesetas (4,— dólares USA para el extranjero).

Los interesados en su adquisición deberán dirigir sus pedidos a la Secretaría de la Asociación Técnica Española del Pretensado, Apartado 19.002, Madrid-33, Tfno: 202 04 40.

## JORNADAS NACIONALES DE CALIDAD EN CONSTRUCCION: MARCAS Y SELLOS

Durante los días 24 y 25 de Junio de 1980, se celebraran las Jornadas Nacionales de la Construcción: Marcas y Sellos, con el siguiente programa:

### Primer día:

Apertura. Análisis del desarrollo de las Jornadas regionales. Primer tema: CERTIFICACION DE LA CALIDAD DE MATERIALES, EQUIPOS Y SISTEMAS. Incluirá: Calidad en la Construcción, Normativa actual, documentos de certificación, homologación y garantías. Segundo Tema: FUNCIONAMIENTO DE LAS MARCAS Y SELLOS DE CALIDAD. Incluirá: Creación, composición, organización y costes de las Marcas y Sellos. Organismos tuteladores. Primera Mesa Redonda: La experiencia de los Sellos y Marcas en la actualidad: Marcas y Sellos en funcionamiento y en preparación.

### Segundo día:

Tercer Tema: LOS SELLOS Y MARCAS Y LA ADMINISTRACION. Incluirá: Reconocimiento, exigencias, beneficios y política general de Sellos y Marcas por la Administración. Código de la Edificación. Cuarto Tema. LOS SELLOS Y MARCAS CARA AL FUTURO. Incluirá: Necesidad de nuevos Sellos y Marcas, ampliación a otras fases del progreso constructivo. Unificación, promoción y difusión. El Seguro en Construcción. Segunda Mesa Redonda: Propuesta y debate de conclusiones.

### Conclusiones y Clausura.

- Se invita a todos los participantes a presentar comunicaciones breves a cada uno de los cuatro temas.
- Los temas y mesas redondas irán seguidos de los correspondientes coloquios.

La Secretaría de las Jornadas radica en el I.E.T. cc., Costillares-Chamartín. Apartado, 19.002. Madrid-33. Telf. 202 04 40 (A la atención de D. Felipe Gómez). Donde se puede obtener información más amplia.



**asociación técnica  
española del pretensado**