

Diseño paramétrico de ruedas trianguladas de radios traccionados con perfil biconvexo para estructuras de cubierta sobre graderíos de estadios con planta elíptica

Parametric Design of Triangulated Tensile Spoke-Wheels With Bi-Convex Profile for Roof Structures on Elliptical Stadium Stands

Rodrigo Martín-Sáiz^{a,*}, Blas Herrera^a

^aDr. Arquitecto, Profesor Asociado, Escuela Técnica Superior de Arquitectura, Universitat Rovira i Virgili, Reus

^bDr. en Matemáticas, Profesor Titular, Departamento de Ingeniería Informática y Matemáticas, Universitat Rovira i Virgili, Tarragona

Recibido el 10 de julio de 2023; revisado el 25 de septiembre de 2023, aceptado el 29 de septiembre de 2023

RESUMEN

En este artículo, desarrollamos analíticamente el paso a paso de un procedimiento de diseño paramétrico de ruedas trianguladas de radios traccionados de perfil biconvexo para estructuras de cubierta sobre graderíos de estadios con planta elíptica. A través de este procedimiento, es posible definir la forma geométrica y la distribución de fuerzas de pretensado necesarias para conseguir unas condiciones óptimas de dimensionado de la sección transversal del anillo exterior, atendiendo a su no-circularidad. Estas condiciones óptimas se consiguen cuando, en situación de carga permanente, la rueda se deforma homotéticamente en planta. En cada paso del procedimiento formulamos los sistemas de ecuaciones que describen la relación entre la forma geométrica y el comportamiento mecánico, y definimos los métodos numéricos para resolverlos. A partir de la forma en planta de diversos anfiteatros romanos, desarrollamos ejemplos de aplicación y mostramos los límites geométricos razonables del procedimiento de diseño. Por último, en un modelo de análisis comprobamos cómo, efectivamente, una estructura diseñada según este procedimiento se deforma homotéticamente en situación de cargas permanentes.

PALABRAS CLAVE: diseño paramétrico, cubiertas de estadios, ruedas trianguladas de radios traccionados, perfil biconvexo, planta elíptica .

©2024 Hormigón y Acero, la revista de la Asociación Española de Ingeniería Estructural (ACHE). Publicado por Cinter Divulgación Técnica S.L. Este es un artículo de acceso abierto distribuido bajo los términos de la licencia de uso Creative Commons (CC BY-NC-ND 4.0)

ABSTRACT

In this article, we make an analytical development of the step-by-step of a parametric design procedure for triangulated tensile spoke-wheels with bi-convex profile for roof structures on elliptical stadium stands. Through this procedure it is possible to define the geometric shape and the distribution of the pre-stressing forces necessary to achieve optimal conditions for the cross-section sizing of the outer ring, while considering its non-circularity. These optimal conditions are achieved when, under permanent loads, an in-plane homothetic deformation occurs. In each step of the procedure we formulate system of equations that describe the relationship between the geometric shape and the mechanical behavior, and we define the numerical methods to solve them. From the ground plan shape of several Roman amphitheatres, we develop application examples and we show the reasonable geometric limits of the design procedure. Finally, in an analysis model, we verify how, effectively, a structure designed according to this procedure deforms homothetically under permanent loads.

KEYWORDS: Parametric design, stadium roofs, triangulated tensile spoke-wheels, bi-convex profile, elliptical ground plan .

©2024 Hormigón y Acero, the journal of the Spanish Association of Structural Engineering (ACHE). Published by Cinter Divulgación Técnica S.L. This is an open-access article distributed under the terms of the Creative Commons (CC BY-NC-ND 4.0) License

* Persona de contacto / *Corresponding author*:
Correo-e / e-mail: rodrigo.martin@urv.cat (Rodrigo Martín-Sáiz)

Cómo citar este artículo: Martín-Sáiz, R., & Herrera, B. (2024). Diseño paramétrico de ruedas trianguladas de radios traccionados con perfil biconvexo para estructuras de cubierta sobre graderíos de estadios con planta elíptica. *Hormigón y Acero* 75(304):35-50. <https://doi.org/10.33586/hya.2023.3128>

1. INTRODUCCIÓN

En las últimas décadas, la rueda de radios traccionados (RRT) se ha convertido en la tipología estructural más recurrente para cubrir graderíos de grandes estadios [1-3]. Esta tipología

es mucho más eficiente que cualquier otra a partir de los 35 m de voladizo [4, 5].

Las RRT, además de ser muy ligeras, no transmiten empujes ni momentos flectores. Esto simplifica el diseño de los soportes y de sus cimentaciones, y permite optimizar su dimensionado.

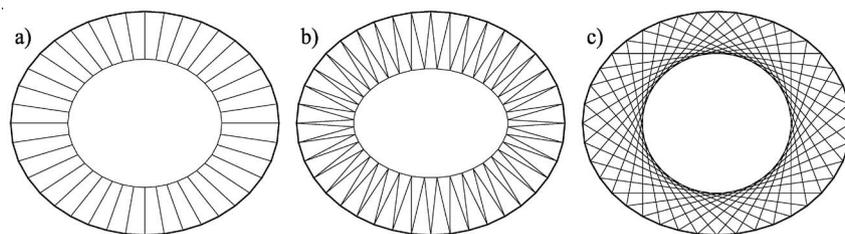


Figura 1. Disposiciones de radios en una RRT: a) radial concurrente, b) triangulada, c) cruzada.

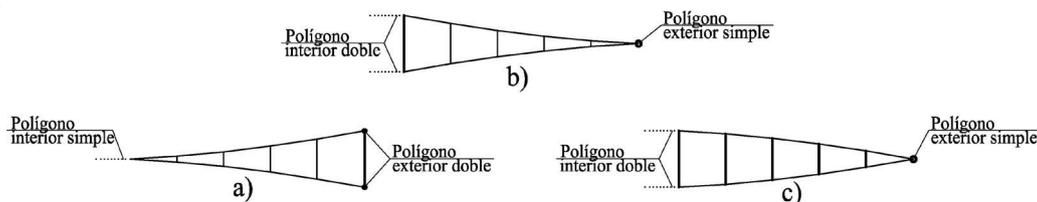


Figura 2. Perfiles de radios: a) bicóncavo con dos polígonos exteriores y uno interior, b) bicóncavo con un polígono exterior y dos polígonos interiores, c) biconvexo con un polígono exterior y dos polígonos interiores.

Las RRT son especialmente interesantes para cubrir construcciones históricas [6, 7] porque no generan alteraciones significativas en el estado tensional de sus muros.

Las RRT están formadas por anillos de compresión en el perímetro exterior, radios y anillos de tracción en el perímetro interior. El anillo exterior es el elemento que concentra la mayor cantidad de material. Esto es debido a sus grandes dimensiones y a que soporta esfuerzos de compresión muy elevados, producidos por las fuerzas de reacción de los radios en el plano de la rueda. Si no hay una concordancia entre su forma y las fuerzas de reacción de los radios, el anillo exterior además tiene que resistir momentos flectores muy elevados que hacen incrementar enormemente el dimensionado de su sección transversal. Éste es el principal problema de diseño de las RRT. Para definir esta concordancia se considera la estructura en situación de cargas permanentes (peso propio+pretenso). Estas cargas son las que determinan en mayor medida el dimensionado de la sección transversal del anillo exterior [8].

En una RRT poligonal inscrita en una circunferencia la concordancia es clara. Además, el esfuerzo de compresión es uniforme en todo el anillo poligonal exterior. Los radios son equidistantes y coinciden con los soportes, situados en los vértices. En definitiva, en una RRT inscrita en una circunferencia todos los tramos del anillo poligonal exterior tienen las mismas condiciones de dimensionado.

En adelante y en todo el artículo ya no nos referiremos a los anillos poligonales, sino a los polígonos, interiores y exteriores.

2. PLANTEAMIENTO

2.1. RRT elípticas que se deforman homotéticamente

Pretendemos diseñar una RRT en la cual, en estado de carga permanente, el polígono exterior, de lados iguales e inscrito en una elipse, se comporte como un polígono funicular de las fuerzas de reacción de los radios. Además, pretendemos que el esfuerzo de compresión sea uniforme en todo el polígono

exterior, igual que sucede en una RRT inscrita en una circunferencia. Si el polígono interior también es un polígono funicular de las fuerzas de reacción de los radios, toda la estructura podrá deformarse en planta homotéticamente.

2.2 Radios triangulados con perfil biconvexo

La disposición triangulada de los radios en el plano de la RRT (figura 1b) complementa al efecto diafragma de la membrana y evita la aparición de momentos flectores relevantes en el polígono exterior cuando actúan cargas variables asimétricas. Esta disposición es una alternativa intermedia entre la radial concurrente (figura 1a), la más habitual, y a la disposición cruzada [9,10] (figura 1c).

La discusión sobre las ventajas de la simplicidad de una estructura puramente radial y la mayor rigidez, y estabilidad de las estructuras trianguladas y/o entrecruzadas es antigua. Sirva de ejemplo la comparación entre los diseños de la cúpula tensada de R. Buckminster Fuller [11], totalmente triangulada, y la de D. Geiger, totalmente radial y arriostrada por la membrana [12]. Siendo estos dos ejemplos de una tipología ligeramente distinta a las RRT, su problemática en cuanto a la rigidez y estabilidad es la misma.

El perfil de los radios determina el número de polígonos exteriores, la forma de la membrana de cobertura, y los esfuerzos en los espaciadores entre las cuerdas inferior y superior de cada radio [13]. Si el perfil es bicóncavo (figuras 2a y 2b), los espaciadores están formados por tensores; si el perfil es biconvexo (figura 2c), los espaciadores están formados por mástiles flotantes comprimidos.

La sección necesaria para resistir un esfuerzo de compresión en un solo polígono exterior (figuras 2b y 2c) es menor a la que se necesitaría si se dividiese el mismo esfuerzo en dos polígonos exteriores (figura 2a). Esto es debido a que el pandeo afecta a la proporcionalidad entre los esfuerzos y el dimensionado de la sección transversal. Además, si el polígono exterior es único, en el perfil biconvexo (figura 2c) la forma de la cuerda de los radios inferiores coincide con la lógica de un polígono funicular en el cual el camino de las cargas gravitatorias va desde el interior de la RRT hacia el exterior, donde se sitúan los soportes. Esto

permite que la tracción generada en el extremo exterior de la cuerda inferior, el tramo más solicitado de cada radio, sea menor que la que se generaría en un perfil bicóncavo con un polígono exterior único. Por otro lado, los radios traccionados con perfil biconvexo tienen menor estabilidad lateral que otros perfiles; esta circunstancia se explica en el apartado 3.3.4.

2.3 Diseño paramétrico con objetivo de optimización

El diseño paramétrico de estructuras con objetivo de optimización es una herramienta proyectual cada vez más utilizada [14- 20]. Hemos definido un procedimiento de diseño paramétrico de ruedas trianguladas de radios traccionados (RTRT) con planta elíptica y perfil biconvexo. Este procedimiento tiene como objetivo la optimización estructural del polígono exterior. Para formularlo hemos empezado definiendo el comportamiento ideal del polígono exterior en situación de cargas permanentes. A partir de ese comportamiento, hemos definido la manera en la cual, a partir de unos pocos parámetros de entrada, obtenemos la totalidad de los parámetros que definen el diseño de la RTRT. Finalmente, mediante un modelo de análisis estructural, hemos comprobado que, efectivamente, en situación de cargas permanentes el polígono exterior se comporta idealmente (figura 3).

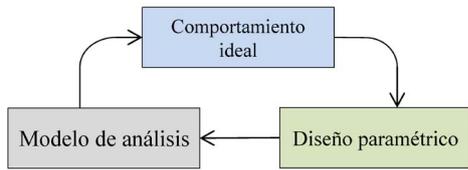


Figura 3. Proceso de formulación del procedimiento de diseño paramétrico con el objetivo de optimización estructural.

2.4 Una RTRT sobre un anfiteatro romano

La forma del graderío de los anfiteatros romanos es elíptica o pseudoelíptica. Muchos estuvieron cubiertos por un *velarium* con un esquema parecido al de una RRT. En una muestra representativa de nueve de los anfiteatros romanos más grandes y mejor conservados (tabla 1), podemos observar que la relación entre sus semiejes (b/a) oscila entre 0.688 y 0.917. Esta relación es parecida a la de algunos estadios modernos. Vamos a aprovechar las proporciones en planta de los anfiteatros romanos para desarrollar, a modo de ejemplo, una RTRT con perfil biconvexo que sirviera de estructura de cubierta sobre su graderío.

3 DESARROLLO

3.1. Diseño en planta

El polígono exterior debe estar inscrito en una elipse y debe tener todos sus lados iguales. Pretendemos que los polígonos exterior e interior sean polígonos funiculares de las fuerzas de reacción de los radios en el plano de la RTRT. Además, pretendemos que el esfuerzo de compresión sea uniforme en todo el polígono exterior. La funicularidad de las elipses ya ha sido estudiada antes por otros autores [23, 24].

TABLA 1.

Razón de los semiejes (b/a) de la planta elíptica de diversos anfiteatros romanos [21, 22].

Anfiteatro	a (m)	b (m)	b/a
Leptis Magna (Libia)	60.50	55.50	0.917
Roma	93.88	77.80	0.829
El Djem (Túnez)	74.00	61.00	0.824
Uthina (Túnez)	56.50	45.00	0.796
Pula (Croacia)	66.25	52.55	0.793
Verona	69.00	54.50	0.790
Pompeya	67.50	51.00	0.756
Nimes	68.00	51.00	0.751
Arlés	78.50	54.00	0.688

3.1.1 Índice de la notación

Como existe doble simetría respecto de los ejes de coordenadas, en adelante nos referiremos a los elementos y las fuerzas del primer cuadrante de la RTRT (figuras 4a y 4b).

- n es el número de lados en un cuadrante del polígono exterior.
- C_i son los vértices del polígono exterior, con $i=1 \div n+1$, en sentido anti-horario empezando desde el vértice situado en el eje X (a lo largo del texto de este documento, la notación $i=1 \div n+1$ significa que i va de 1 a $n+1$, incrementando de 1 en 1).
- (a_i, b_i) son las coordenadas de los vértices del polígono exterior; a_1 y b_{n+1} son además los semiejes de la elipse.
- c_i son los lados del polígono exterior, con $i=1 \div n$, en sentido anti-horario empezando desde el lado más próximo al eje X.
- T_i son los vértices del polígono interior, con $i=1 \div n$, en sentido anti-horario empezando desde el vértice más próximo al eje X. Además T_1 y T_n son los puntos interiores extremos del cuadrante, situados en los semi-lados primero y último del polígono interior.
- (x_i, y_i) son las coordenadas de los vértices del polígono interior.
- t_i son los lados del polígono interior, con $i=1 \div 1n+1$, en sentido anti-horario empezando desde el situado en el eje X, teniendo en cuenta que realmente t_1 y t_{n+1} son semi-lados dentro del cuadrante.
- r_i son los radios, con $i=1 \div 2n$, en sentido anti-horario respecto del centro de la estructura, empezando desde los que nacen en C_1 . Entonces, 2_i-2 y 2_i-1 son los subíndices de las dos parejas de radios que nacen de un vértice C_i , mientras que 1 y $2n$ son los subíndices de los radios que nacen de los vértices C_1 y C_{n+1} respectivamente.
- N es el esfuerzo de compresión uniforme en el polígono exterior; N_i es el esfuerzo de tracción en cada lado del polígono interior; P_i es el esfuerzo de tracción en cada radio. Todas estas fuerzas están contenidas en el plano del polígono exterior de la RTRT.
- γ_i es la amplitud del ángulo entre dos lados del polígono en cada vértice.
- $\alpha_i, \beta_i, \zeta_i$ y φ_i son las amplitudes de los ángulos que forman los lados del polígono exterior, los radios, los lados del polígono interior y la bisectriz del ángulo de γ_i respectivamente con el eje X, medidos en sentido anti-horario.
- d_i es la distancia desde un vértice del polígono exterior hasta la intersección de su bisectriz con la bisectriz del vértice contiguo siguiente.

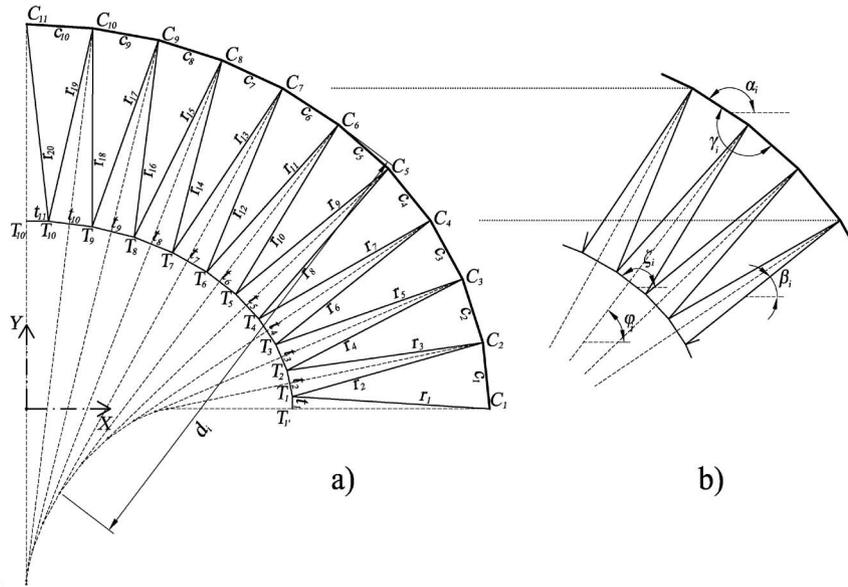


Figura 4. a) Ejemplo de numeración de los nudos y barras del diseño en planta de una RTRT con $n=10$. b) Criterio de notación de ángulos.

Con las letras minúsculas c_i , t_i y r_i también nos referimos a la longitud de estas barras en las ecuaciones que aparecen más adelante.

3.1.2 Datos geométricos de partida

Los datos de partida para el diseño en planta son los semiejes de la elipse (a_1, b_{n+1}) , el número n de lados de un cuadrante del polígono exterior y la profundidad de la RTRT en el eje X. La longitud c de los lados del polígono exterior está determinada por las dimensiones de la elipse y por n . El pandeo condiciona el dimensionado de su sección transversal. Por este motivo n deberá ser más elevado cuanto mayor sea la elipse en la que se inscribe la RTRT.

En algunas RRT sobre estadios modernos, diseñadas por la ingeniería Schlaich Bergermann Partner (SBP) [2, 4, 8, 25], los graderíos tienen unas proporciones $0.75 \leq b_{n+1}/a_1 \leq 1$, el número de lados en un cuadrante es $9 \leq n \leq 15$, y su longitud no supera los 16 m en el caso de los anillos de acero o los 22 m en el caso de los anillos de hormigón armado. Además, la profundidad relativa varía según $0.4 \leq (a_1 - x_1)/a_1 \leq 0.5$.

3.1.3 Polígono exterior

Empezamos definiendo el polígono exterior de $4n$ lados iguales inscrito en la elipse. Las coordenadas de los vértices extremos del primer cuadrante, C_1 y C_{n+1} , son $(a_1, 0)$ y $(0, b_{n+1})$ respectivamente. Para encontrar las coordenadas del resto de vértices es necesario resolver un sistema de $2n-1$ ecuaciones (1 y 2). Las incógnitas son c y las coordenadas (a_i, b_i) de los vértices.

$$\left(\frac{a_i}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{b_i}{b_{n+1}}\right)^2 = 1; i = 2 \div n \quad (1)$$

$$c = \sqrt{(a_{i+1} - a_i)^2 + (b_{i+1} - b_i)^2}; i = 1 \div n \quad (2)$$

Resolvemos este sistema mediante un método iterativo. En este método utilizamos una notación con dos subíndices: el primero es i e indica el número de lado, con $i=1 \div n$, y el segundo es j e indica el número de iteración. Así, el punto de

arranque se obtiene con $a_{i,0} = \cos((\pi/2)i/n)$ y sustituyendo $a_{i,0}$ en la ecuación (1) para encontrar el semieje $b_{i,0}$. Entonces, calculamos $\eta_{i,0} = c_{i,0} / (\sum_{i=1}^n c_{i,0}/n)$ con $c_{i,0} = \sqrt{(a_{i+1,0} - a_{i,0})^2 + (b_{i+1,0} - b_{i,0})^2}$, donde $c_{i,0}$ es a la longitud resultante en cada uno de los lados en el punto de arranque. Cambiamos las abscisas de cada vértice según $a_{i+1,j+1} - a_{i,j+1} = (a_{i+1,j} - a_{i,j})^2 / \eta_{i,j}$ y después encontramos las nuevas $b_{i,j+1}$, $c_{i,j+1}$ y $\eta_{i,j+1}$, en las sucesivas iteraciones. Este proceso se repite tantas iteraciones como sea necesario para que la razón $\eta_{i,j+1}$ se aproxime a la unidad con un error previamente fijado en $\tau_i = |1 - \eta_{i,j+1}| \leq 10^{-3}, i=1 \div n$.

3.1.4 Polígonos interiores y radios

Definimos un polígono interior tal que sea polígono funicular de las fuerzas de reacción de los radios en el plano de la RTRT, teniendo en cuenta que el polígono exterior también es un polígono funicular de las fuerzas de reacción de los mismos radios y además tiene compresión uniforme. Gracias a esa doble funicularidad, la RTRT podrá deformarse en planta homotéticamente. Es precisamente este tipo de deformación en la cual el polígono exterior tiene un esfuerzo de compresión uniforme.

Entonces, planteamos las ecuaciones de equilibrio externo (3-5) del primer cuadrante de la RTRT (figura 5a):

$$H_{1'} + H_1 = 0 \quad (3)$$

$$H_{n'} + H_{n+1} = 0 \quad (4)$$

$$H_{n+1} + b_{n+1} - H_1 a_1 + H_{n'} y_n - H_1 x_1 = 0 \quad (5)$$

donde H_{n+1} , $H_{n'}$, H_1 y $H_{1'}$ son las fuerzas de reacción en el plano en los extremos del primer cuadrante de la RTRT (figura 5a). Como el polígono interior del diseño en planta es la superposición de los dos polígonos interiores de la RTRT, $H_{n'}$ y $H_{1'}$ son en realidad la suma de las fuerzas de reacción en el plano en los extremos del primer cuadrante de los dos polígonos interiores.

Después planteamos las ecuaciones de equilibrio de fuerzas en los nudos del polígono interior (6-9), (figura 5c), y en los

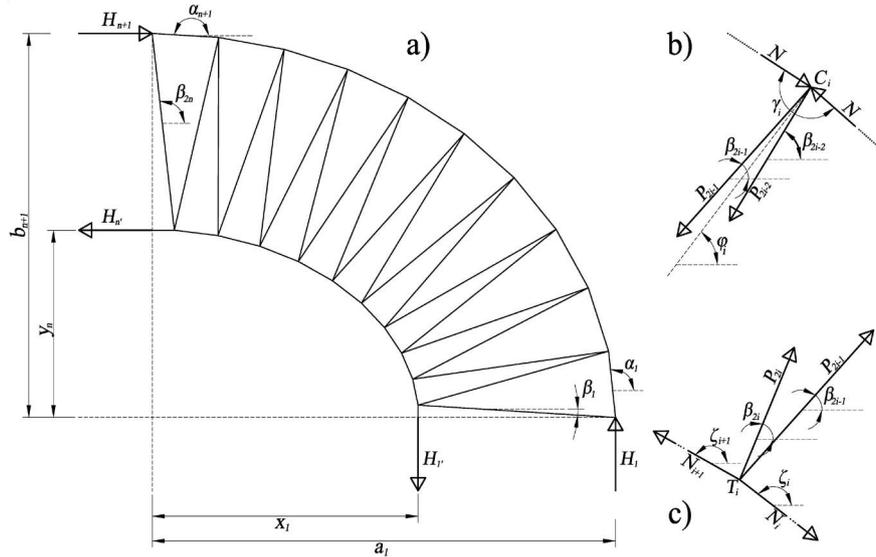


Figura 5. a) Planta del primer cuadrante de la RTRT con las reacciones necesarias para el equilibrio externo; b) fuerzas en un vértice del polígono exterior; c) fuerzas en un vértice del polígono interior.

nudos del polígono exterior (10-15), (figura 5b), teniendo en cuenta un valor N de compresión uniforme en todos sus lados:

$$H_1 - N_1 = 0 \quad (6)$$

$$H_n - N_{n+1} = 0 \quad (7)$$

$$H_{i+1} \cos \zeta_{i+1} + P_{2i} \cos \beta_{2i} + P_{2i-1} \cos \beta_{2i-1} - N_1 \cos \zeta_i = 0, i = 2 \div n \quad (8)$$

$$N_{i+1} \sin \zeta_{i+1} + P_{2i} \sin \beta_{2i} + P_{2i-1} \sin \beta_{2i-1} - N_1 \sin \zeta_i = 0, i = 2 \div n \quad (9)$$

$$H_1 - N (\sin \alpha_1 + \cos(y_1/2) \tan \beta_1) = 0 \quad (10)$$

$$H_{n+1} - N \left(-\cos \alpha_n + \frac{\cos(y_{n+1}/2)}{\tan(\beta_{2n})} \right) = 0 \quad (11)$$

$$P_1 - N \frac{\cos(y_1/2)}{\cos(\beta_1)} = 0 \quad (12)$$

$$P_{2n} - N \frac{\cos(y_n/2)}{\sin(\beta_{2n})} = 0 \quad (13)$$

$$P_{2i-2} - P_{2i-1} \frac{\sin(\varphi_i - \beta_{2i-1})}{\sin(\beta_{2i-2} - \varphi_i)} = 0, i = 2 \div n \quad (14)$$

$$P_{2i-1} - \frac{2N \sin(y_n/2)}{\cos(\varphi_i - \beta_{2i-1}) \frac{\sin(\varphi_i - \beta_{2i-1})}{\sin(\beta_{2i-2} - \varphi_i)}} = 0, i = 2 \div n \quad (15)$$

Además, existen relaciones entre distancias y ángulos inherentes a la propia geometría de la RTRT. Estas relaciones son las siguientes (16-22):

$$\beta_1 = -\arccos \left(\frac{a_1 - x_1}{\sqrt{(a_1 - x_1)^2 + (b_1 - y_1)^2}} \right) \quad (16)$$

$$\beta_{2i-1} = \arccos \left(\frac{a_i - x_i}{\sqrt{(a_i - x_i)^2 + (b_i - y_i)^2}} \right), i = 2 \div n \quad (17)$$

$$\beta_{2i-2} = \arccos \left(\frac{a_i - x_{i-1}}{\sqrt{(a_i - x_{i-1})^2 + (b_i - y_{i-1})^2}} \right), i = 2 \div n + 1 \quad (18)$$

$$\zeta_i = \arccos \left(\frac{x_i - x_{i-1}}{\sqrt{(a_{i-1} - x_i)^2 + (b_{i-1} - y_i)^2}} \right), i = 2 \div n \quad (19)$$

$$t_1 = 2y_1 \quad (20)$$

$$t_{n+1} = 2x_n \quad (21)$$

$$t_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}, i = 2 \div n \quad (22)$$

Finalmente, definimos la condición (23) de diseño adicional que permite definir las longitudes t_i de los lados del polígono interior de manera proporcional a la distancia d_i . La longitud t_i resultará menor cuanto menor sea d_i y viceversa. Es decir, la longitud de los lados irá incrementándose progresivamente desde el más pequeño t_1 hasta el más grande t_{n+1} :

$$t_i = \frac{d_i \sum_{i=1}^{i=n+1} t_i}{\sum_{i=1}^{i=n+1} d_i}, i = 2 \div n \quad (23)$$

Entonces, agrupamos todas estas ecuaciones (3 a 23) en un sistema de $9n+4$ ecuaciones e incógnitas. Los parámetros de entrada son: $n, x_1, (a_i, b_i)$ con $i=1 \div n+1$, γ_i con $i=1 \div n+1$, φ_i con $i=2 \div n$, $\alpha_1, \alpha_n, \zeta_1, \zeta_{n+1}$ y d_i con $i=1 \div n+1$. Las incógnitas son: x_i con $i=2 \div n$, y_i con $i=1 \div n$, t_i con $i=1 \div n+1$, ζ_i con $i=2 \div n$, β_i con $i=1 \div 2n$, P_i con $i=1 \div 2n$, N_i con $i=1 \div n+1$, $H_1, H_{1'}, H_{n+1}$ y H_n .

Para que la solución sea mecánicamente viable y geoméricamente coherente, el sistema también se tiene que verificar con las siguientes desigualdades (24 a 26):

$$\beta_{2i-2} > \varphi_i > \beta_{2i-1}, i = 2 \div n \quad (24)$$

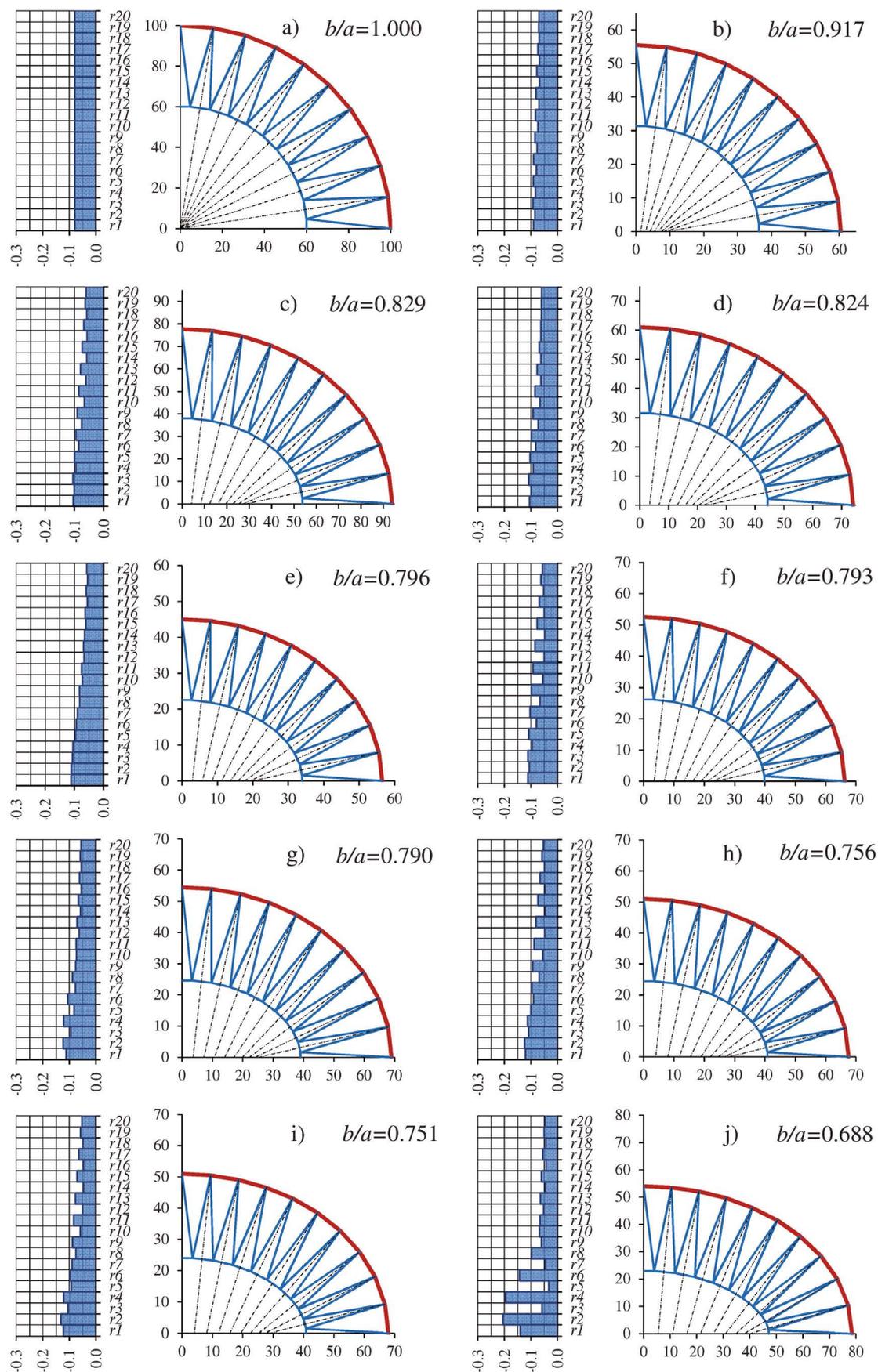


Figura 6. a) Diseño en planta y distribución relativa de los esfuerzos de tracción (P_i/N) en los radios de una RTRT circular. Igualmente, mostramos lo mismo para nueve RTRT considerando las dimensiones de los anfiteatros de: b) Leptis Magna, c) Roma; d) El Djem, e) Uthina, f) Pula, g) Verona, h) Pompeya, i) Nimes, y j) Arlés.

$$0 < x_{i+1} < x_i, i = 1 \div n-1 \quad (25)$$

$$0 < y_i < y_{i+1}, i = 1 \div n-1 \quad (26)$$

Si alguna de estas desigualdades no se verifica, es preciso modificar alguno de los parámetros de entrada del diseño en planta (n , a_1 , b_{n+1} ó x_i) y volver a iniciar el proceso.

Este sistema puede ser resuelto mediante métodos iterativos clásicos como el de Newton-Raphson, o más modernos como el de Gradiente-Reducido-Generalizado [26]. Definimos el punto de arranque de las coordenadas del polígono interior, para el método iterativo, a través de las siguientes ecuaciones (27 a 29):

$$x_i = \frac{x_i \cos\left(\frac{\pi(i-1/2)}{2n}\right)}{\cos(\pi/4n)}, i = 2 \div n \quad (27)$$

$$y_i = \frac{3b_{n+1}x_i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi(i-1/2)}{2n}\right)}{4a_1 \cos(\pi/4n)}, i = 1 \div n \quad (28)$$

$$N_i = \frac{1}{2} \left[\frac{N_{i+1} \cos \zeta_{i+1} + P_{2i} \cos \beta_{2i} + P_{2i-1} \cos \beta_{2i-1}}{\cos \zeta_i} + \frac{N_{i+1} \operatorname{sen} \zeta_{i+1} + P_{2i} \operatorname{sen} \beta_{2i} + P_{2i-1} \operatorname{sen} \beta_{2i-1}}{\operatorname{sen} \zeta_i} \right], i = 2 \div n \quad (29)$$

Los parámetros N_i , H_1 , $H_{1'}$, H_{n+1} y $H_{n'}$, β_i y P_i con $i = 2 \div n$ en el punto de arranque se encuentran substituyendo los obtenidos en las ecuaciones (27) a (29) en las ecuaciones del sistema. Establecemos un criterio de parada a través de una tolerancia $\tau=10^{-3}$ en la resolución del sistema (la suma de los valores absolutos de los $9n+4$ errores de las ecuaciones es menor que $\tau=10^{-3}$).

3.1.5 Ejemplo de aplicación

Mostramos un ejemplo de aplicación del proceso de diseño en planta teniendo en cuenta las dimensiones de los nueve anfiteatros romanos de la tabla 1, además de un décimo caso correspondiente a una forma circular. Hemos considerado en todos ellos $n=10$ y $(a_1-x_1)/a_1 \approx 0.40$

Hemos representando gráficamente los resultados obtenidos (figuras 6a a 6j). Al lado del diseño en planta obtenido en cada una de las RTRT, mostramos la distribución relativa P_i/N_i de las fuerzas de tracción de los radios respecto de la compresión uniforme del polígono exterior. La diferencia entre los esfuerzos de tracción en los radios en una misma RTRT se incrementa de forma inversa a la relación b/a . En el caso de la RTRT de planta circular con $b/a=1.00$, obtenemos $P_i/N_i = -0.079$, en todos los radios, mientras que en el caso de Arlés, con $b/a=0.688$, obtenemos $-0.205 \leq P_i/N_i \leq -0.033$. Si ambas RTRT tuvieran la misma dimensión a , y hubiéramos de garantizar un esfuerzo de tracción mínimo en el radio menos solicitado de la RTRT de Arlés igual la tracción de los radios de la RTRT circular, la compresión en el polígono exterior de Arlés sería 2.365 veces mayor que en la RTRT circular. En el caso de Nimes con $b/a=0.751$, el esfuerzo de compresión en su polígono exterior sólo sería 1.704 veces mayor. Cuanto más alejada de la circunferencia está la forma elíptica, mayor es el esfuerzo de

compresión que tiene que soportar el polígono exterior. Así, un límite geométrico razonable del diseño en planta podría ser una relación $b/a=0.75$. Una relación menor provocaría un incremento notable del esfuerzo N de compresión, lo cual repercutiría significativamente en el dimensionado de la sección resistente del polígono exterior.

3.2 Diseño del perfil de los radios

Cada radio de la RTRT está compuesto de dos cuerdas, una inferior y otra superior, contenidas en un plano vertical. Estas cuerdas describen dos formas poligonales simétricas respecto del plano horizontal $z=0$, en el cual se encuentra contenido el polígono exterior de la RTRT. Esta simetría de las cuerdas respondería a una simetría entre los valores de carga máxima descendente (q_d) y carga máxima ascendente (q_a). Las dos cuerdas están separadas por mástiles. El número de mástiles es constante en todos los radios. El mástil más alto de cada radio se sitúa entre dos vértices de los dos polígonos interiores, inferior y superior, cuyo diseño en planta ya hemos definido. Cada uno de estos n mástiles más altos está compartido por dos radios.

3.2.1 Índice de la notación

- $T_{i,1}$ y $T_{i,2}$ son los vértices de los dos polígonos interiores, inferior y superior respectivamente, con $i=1 \div n$, en sentido anti-horario empezando desde los vértices más próximos al eje X. Además $T_{1',1}$ y $T_{1',2}$, y $T_{n',1}$ y $T_{n',2}$ son los nudos extremos del cuadrante, situados en el primer y último semilados de los polígonos interiores, inferior y superior respectivamente. Todos estos vértices tienen las mismas coordenadas (x,y) que los vértices T_i del polígono interior en el diseño en planta.
- $t_{i,1}$ y $t_{i,2}$ son los lados de los polígonos interiores, inferior y superior respectivamente, con $i=1 \div n+1$, en sentido anti-horario empezando desde el situado en el eje X, donde $t_{1',1}$ y $t_{n+1,1}$, y $t_{1',2}$ y $t_{n+1,2}$ son en realidad semilados dentro del cuadrante. Ambos polígonos tienen la misma proyección en el plano horizontal $z=0$ que el polígono interior utilizado para el diseño en planta.
- m es el número de mástiles que hay en cada radio.
- s_i son los mástiles más altos de cada pareja de radios. Estos mástiles están situados entre los vértices de los dos polígonos interiores, con $i=1 \div n$, en sentido anti-horario empezando desde el más próximo al eje X.
- $s_{i,j}$ son los mástiles intermedios de cada radio, con $i=1 \div n$ y $j=2 \div m$, empezando desde el interior hacia el exterior de la rueda.
- $r_{i,1,j}$ y $r_{i,2,j}$ son los tramos de las cuerdas, inferior y superior respectivamente, entre los mástiles de cada radio, con $i=1 \div n$, en sentido anti-horario respecto del centro de la estructura, empezando desde los que nacen en C_1 , y $j=1 \div m$, empezando desde el interior hacia el exterior de la rueda en cada radio.

En un alzado desplegado representamos el perfil de una pareja de radios r_{2i} y r_{2i-1} que comparten un mismo mástil si en el extremo (figura 7). Estos radios van desde un vértice C_i hasta otro C_{i+1} del polígono exterior de la RTRT, y pasan por los vértices $T_{i,1}$ y $T_{i,2}$ de los polígonos interiores, donde se sitúa el mástil si. En este alzado, C_i queda a la derecha, C_{i+1} a la izquier-

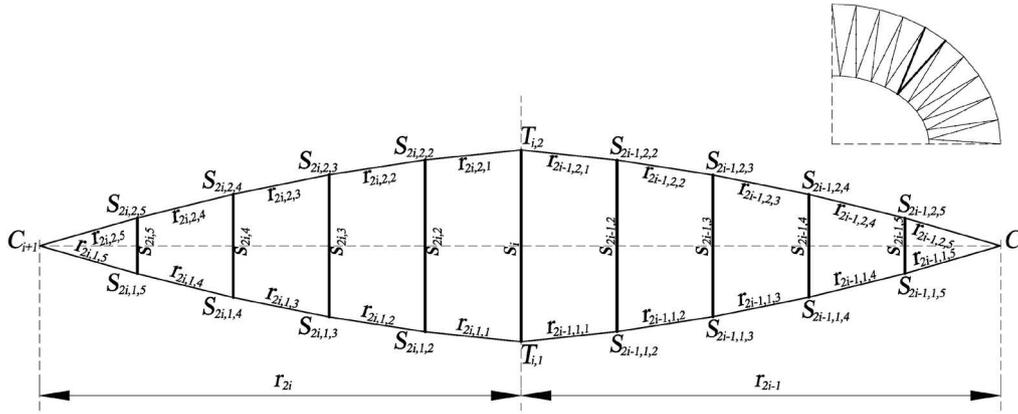


Figura 7. Ejemplo de numeración de los nudos y barras de una pareja de radios con $m=5$.

da, y $T_{i,1}$ y $T_{i,2}$ en el centro. Situamos la posición del resto de los $m-1$ mástiles ($s_{2i-1,j}$ y $s_{2i,j}$ con $j=1 \div m$), a distancias equidistantes en cada radio, desde sí hacia los extremos.

3.2.2 Datos geométricos de partida

Los datos de partida para el diseño del perfil de los radios son: el número m de mástiles sobre cada radio, la altura del mástil s_n más alto de la RTRT, la longitud en planta r_i de los radios y las cargas gravitatorias permanentes (G) que actúan transversalmente al plano de la RTRT.

El número de mástiles define la longitud de los tramos de cuerda de los radios. La longitud s_n , del mástil más alto condiciona la rigidez de la estructura frente a cargas transversales al plano de la rueda. En algunas RRT sobre estadios modernos, diseñadas por SBP [2, 4, 8, 25], las longitudes de los mástiles más altos oscilan según $4.25 \leq (r_i/s_i) \leq 6.75$. Además, la distancia entre los espaciadores de un mismo radio está comprendida entre 6 y 8 m aproximadamente. Esta distancia determina el número m de mástiles de un radio.

3.2.3 Longitud de los mástiles más altos

Definimos la longitud del mástil s_n , según $s_n = r_{2n}/4.25$. Después, calculamos la fuerza F_i resultante de la suma vectorial de las fuerzas de tracción P_i y P_{i+1} de los radios en cada vértice del polígono interior, obtenidas en el diseño en planta (30). Entonces definimos la longitud del resto de mástiles si de manera inversamente proporcional a la fuerza F_i en cada vértice (31). Por último, comprobamos que la razón entre la longitud del radio r_i y longitud de mástil s_i no difiera de los límites observados en otras RRT.

$$F_i = \sqrt{(P_{2i} \cos \beta_{2i} + P_{2i-1} \cos \beta_{2i-1})^2 + (P_{2i} \sin \beta_{2i} + P_{2i-1} \sin \beta_{2i-1})^2}, i = 1 \div n \quad (30)$$

$$s_i = \frac{s_n F_n}{F_i}, i = 1 \div n-1 \quad (31)$$

Al definir la longitud de los mástiles más altos de cada radio de esta manera, la separación entre los dos polígonos interiores de la RTRT no es constante, sino que incrementa en sentido anti-horario desde la más pequeña, en la posición más próxima al eje X hasta la más grande, en la posición más próxima al eje Y, según el esquema en planta de la figura 4.

3.2.4 Estimación del dimensionado de las barras

El diseño del perfil de los radios está directamente relacionado

con su peso propio y éste con la sección transversal de las barras. El área A de la sección transversal de cada barra depende principalmente del pretensado necesario para garantizar la tracción de los radios en cualquier situación de carga. En general, existen dos situaciones a comprobar en un pre-dimensionado: carga máxima descendente (q_{\downarrow}), debida a la combinación de las cargas permanentes con la sobrecarga de nieve y presión de viento, y carga máxima ascendente (q_{\uparrow}), debida a la combinación de las cargas permanentes con la succión de viento (figura 8).

Para estimar la fuerza máxima de tracción en las cuerdas, primero calculamos los momentos flectores isostáticos generados por ambas cargas en la longitud del radio r_1 , considerando su área de influencia en planta (32a y 32b). Después, dividimos ambos momentos entre la longitud del mástil s_1 y le sumamos la fuerza de pretensado necesaria para que las dos cuerdas del radio siempre estén en tracción, considerando un margen de seguridad de un 10% frente al destensado (33a, 33b, 34a y 34b). Así, obtenemos una estimación de las fuerzas $P_{1,1,\max}$ y $P_{1,1,\min}$ de tracción máxima y mínima en la cuerda inferior, y $P_{1,2,\max}$ y $P_{1,2,\min}$ en la cuerda superior. Alternativamente, podemos utilizar otros procedimientos más precisos para la estimación de estas fuerzas [27].

$$M_{i\downarrow} = \frac{q_{\downarrow} (c+t_1) r_1^2}{8}; M_{i\uparrow} = \frac{q_{\uparrow} (c+t_1) r_1^2}{8} \quad (32a \text{ y } 32b)$$

$$P_{1,1,\min} = \frac{2.1 M_{i\downarrow}}{s_1}; P_{1,2,\max} = \frac{2.1 M_{i\uparrow}}{s_1} \quad (33a \text{ y } 33b)$$

$$P_{1,1,\min} = \frac{0.1 M_{i\downarrow}}{s_1}; P_{1,2,\max} = \frac{0.1 M_{i\uparrow}}{s_1} \quad (34a \text{ y } 34b)$$

A partir de estas fuerzas y de la distribución relativa obtenida en el diseño en planta, estimamos los esfuerzos máximos de tracción en las cuerdas del resto de radios (35) y en los lados de los polígonos interiores (36), y el esfuerzo de compresión en el polígono exterior (37).

$$P_{i,j,\max} = \frac{P_{1,j,\max} P_i}{P_1}; i = 2 \div 2n, j = 1 \div 2 \quad (35)$$

$$N_{i,j,\max} = \frac{P_{1,j,\max} N_i}{P_1}; i = 1 \div n+1, j = 1 \div 2 \quad (36)$$

$$N = \frac{P_{1,1,\max} P_{1,2,\min}}{P_1} \quad (37)$$

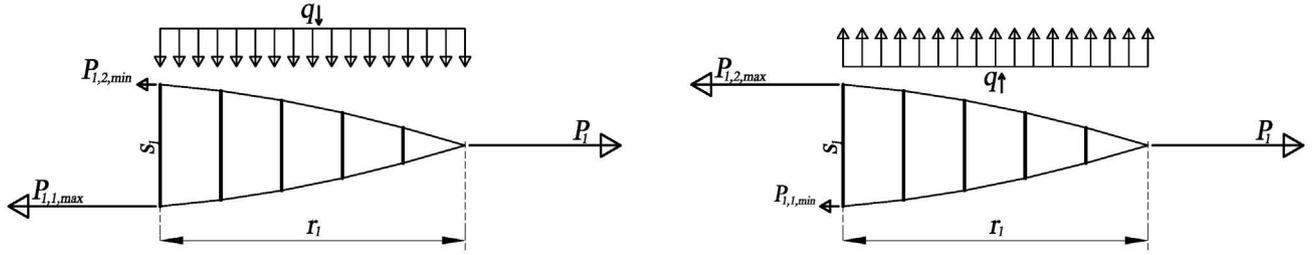


Figura 8. Esquema de fuerzas en el radio: a la izquierda, en situación de carga máxima descendente (q_d); a la derecha, en situación de carga máxima ascendente (q_u).

Luego estimamos el área de la sección transversal de cada uno de estos elementos.

Los esfuerzos axiales en los mástiles son significativamente más pequeños que los del resto de elementos de la rueda. Por este motivo, para estimar el dimensionado de su sección transversal basta con tener en cuenta una esbeltez mecánica $\lambda_m \approx 100$.

3.2.5 Estimación de las cargas gravitatorias permanentes

Las cargas gravitatorias permanentes son transmitidas a la cuerda inferior de cada radio a través de una fuerza vertical G en cada mástil. Esta fuerza es la suma del peso propio g del material de cobertura, normalmente una membrana, repercutido en el área B de influencia en planta de cada mástil, y del peso propio de las barras que confluyen en dicho mástil, conforme al área A de la sección transversal, la longitud y la densidad w del material de cada barra. Podemos distinguir las fuerzas $G_{i,j}$, $G_{T,i}$ y $G_{C,i}$ que actúan en los mástiles intermedios (38a), en los mástiles más altos (38b) y en los vértices del polígono exterior (38c) respectivamente.

$$N_{i,j} = gB_{i,j} + w \left[\frac{A_{s,i,j} s_{i,j} + \frac{A_{r,1}(r_{i,1,j-1} + r_{i,1,j})}{2}}{+ \frac{A_{r,2}(r_{i,2,j-1} + r_{i,2,j})}{2}} \right], i=1 \div 2n, j=2 \div m \quad (38a)$$

$$G_{T,i} = gB_i + w \left[\frac{A_{s,i} s_i + \frac{A_{r,1}(t_{i,1} + t_{i+1,1}) + A_{r,2}(t_{i,2} + t_{i+1,2})}{2}}{+ \frac{A_{r,1}(r_{2i,1,1} + r_{2i-1,1,1}) + A_{r,2}(r_{2i,2,1} + r_{2i-1,2,1})}{2}} \right], i=1 \div n \quad (38b)$$

$$G_{C,i} = gB_{i,1} + w \left[\frac{A_c + A_{r,1}(r_{2i,1,m} + r_{2i-1,1,m}) + A_{r,2}(r_{2i,2,m} + r_{2i-1,2,m})}{2} \right], i=1 \div n \quad (38c)$$

3.2.6 Perfil biconvexo de los radios

Existe una relación de afinidad entre la forma del diagrama de momentos flectores de una viga y la forma de un polígono funicular de barras inextensibles afectado por las mismas cargas que la viga [28]. Según esta relación, la razón entre el momento flector en un punto cualquiera del diagrama y el momento flector máximo es la misma que existe entre la coordenada z de un vértice cualquiera del polígono y la del vértice más bajo. Utilizamos esta relación para definir el polígono funicular de las fuerzas G que describe la cuerda inferior de los radios y,

por simetría, la cuerda superior. La definición de este polígono funicular es un problema no-lineal cuyo planteamiento y método iterativo de resolución describimos a continuación.

Suponemos una viga horizontal, isostática y de longitud igual a la suma de los dos radios, donde actúan las fuerzas G . Después, formulamos las ecuaciones (39 y 40) para encontrar una estimación de las fuerzas de reacción verticales V_i y V_{i+1} en los extremos y las ecuaciones (41a y 41b) para calcular el valor del momento flector M en la posición de cada uno de los mástiles.

$$V_i + V_{i+1} + G_{C,i} + G_{C,i+1} + G_{T,i} + \sum_{j=2}^m G_{2i,j} + \sum_{j=2}^m G_{2i-1,j} = 0 \quad (39)$$

$$G_{C,i+1}(r_{2i} + r_{2i-1}) + G_{T,i} r_{2i-1} + \sum_{j=2}^m \left[G_{2i,j} \left(r_{2i} + r_{2i-1} - \frac{j r_{2i}}{m} \right) \right] + \sum_{j=2}^m \left[G_{2i-1,j} \left(r_{2i-1} - \frac{(m-j) r_{2i-1}}{m} \right) \right] - V_{i+1}(r_{2i} + r_{2i-1}) = 0 \quad (40)$$

$$M_{2i-1,j} = (V_i - G_{C,i}) \frac{(m-j) r_{2i-1}}{m} + \sum_{j'} \left[G_{2i-1,j'+1} \frac{(m-j+1) r_{2i-1}}{m} \right] \quad (41a \text{ y } 41b)$$

$$M_{2i,j} = (V_{i+1} - G_{C,i+1}) \frac{(m-j) r_{2i-1}}{m} + \sum_{j'} \left[G_{2i,j'+1} \frac{(m-j+1) r_{2i}}{m} \right]$$

Entonces, partimos de un punto de arranque para el método iterativo en el cual todos los mástiles de una misma pareja de radios son iguales y tienen la longitud del más alto (s_j). Mediante las ecuaciones 38a, 38b y 38c, calculamos las fuerzas G que resultan de la longitud de las cuerdas en esa primera aproximación de la longitud de los mástiles. Mediante las ecuaciones 39, 40, 41a y 41b obtenemos un primer diagrama de momentos flectores. A partir de la forma de este primer diagrama, definimos una forma afín de un polígono funicular que pase por la coordenada $(0, z_{s,i,1})$, correspondiente al extremo inferior del mástil más alto. Por simetría respecto del plano $z=0$, obtenemos la forma del polígono que describe la cuerda superior y, por ende, la longitud del resto de mástiles de la pareja de radios. Puesto que las longitudes $s_{2i-1,j}$ y $s_{2i,j}$ son menores que las del punto de arranque, modificamos las fuerzas G , y volvemos a calcular el diagrama de momentos y obtenemos un nuevo polígono. Repetimos este proceso hasta que la diferencia de las longitudes de los mástiles obtenidas en una iteración respecto de la anterior sea inferior a 10^{-3} . Durante este proceso reajustamos el dimensionado de la sección transversal de los mástiles para que su esbeltez mecánica sea $\lambda_m \approx 100$.

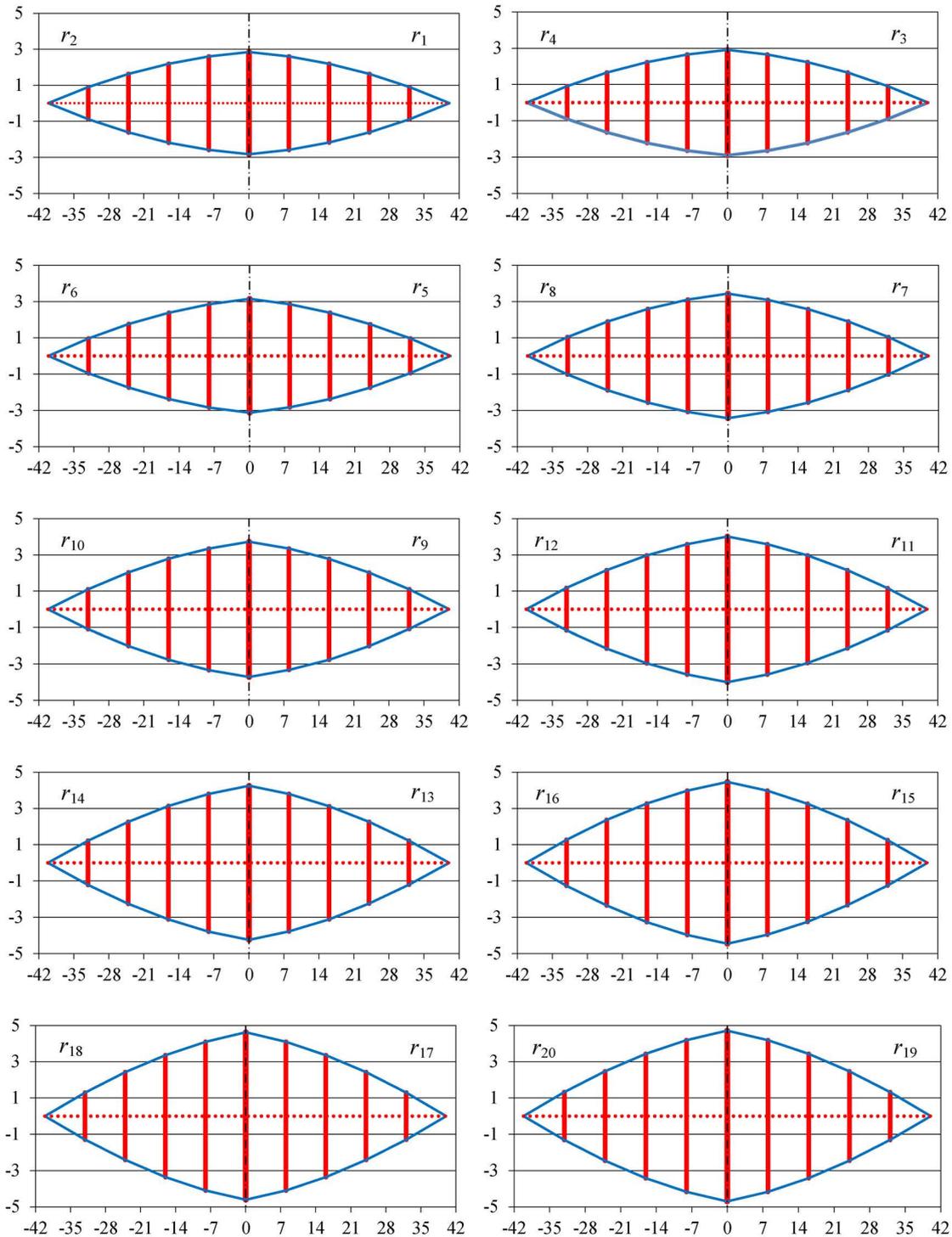


Figura 9. Perfil biconvexo de las diez parejas de radios de la RTRT sobre el Coliseo, desde r1-r2 hasta r19-r20, ordenadas de izquierda a derecha y de arriba a abajo. En el eje horizontal se representa la longitud de los radios y en el eje vertical la longitud de los mástiles, ambas dimensiones en metros.

3.2.7 Ejemplo de aplicación

Hemos aplicado este proceso para definir el perfil de los radios (figura 9) a partir del diseño en planta de una RTRT sobre el Coliseo (figura 6c). Los datos geométricos de partida son la longitud del mástil más alto ($s_i=9.41$ m) y el número de mástiles en cada radio ($m=5$). Además, en este proceso hemos supuesto estos otros parámetros: peso propio del material de cobertura $g=0.05$ KN/m², carga máxima descendente $q_1=-0.75$ KN/m², carga máxima ascendente $q_1=-0.75$ KN/m², aceros con $f_y=355$

N/mm² en el polígono exterior, con $f_y=235$ N/mm² en los mástiles y con $f_y=1200$ N/mm² en las cuerdas de los radios y en los polígonos interiores.

A partir de estos parámetros hemos estimado los siguientes esfuerzos máximos: en el polígono exterior, 12413 KN; en los polígonos interiores, entre 12264 y 12307 KN variando de menos a más desde t_1 hasta t_{n+1} ; en las cuerdas de los radios, entre 1297 y 745 KN variando de más a menos desde r_1 hasta r_{2n} . De estos esfuerzos se derivan las siguientes secciones: en el polígono-

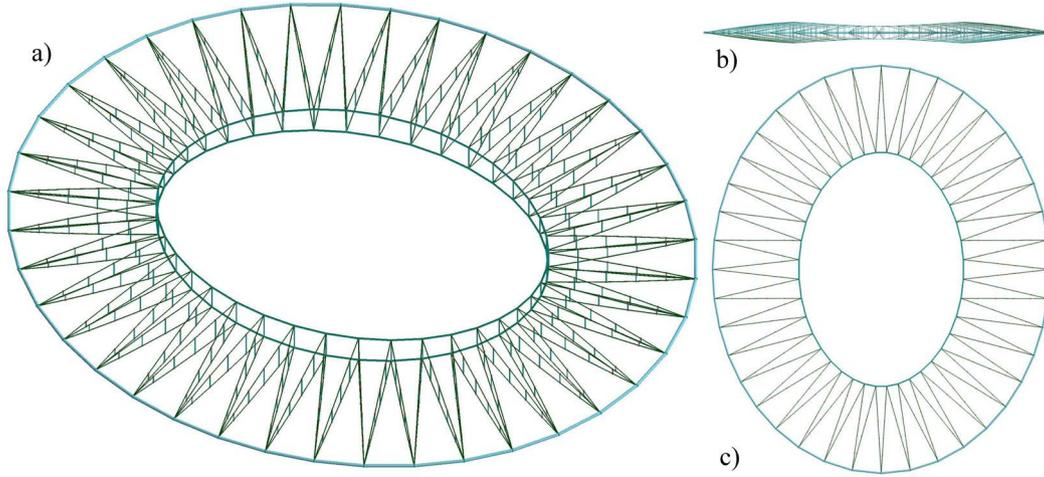


Figura 10. Diseño tridimensional la RTRT sobre el graderío del Coliseo: a) Axonometría, b) perfil y c) planta.

no exterior, tubo circular de 820x20 mm; en cada uno de los polígonos interiores, siete barras de 52 mm de diámetro; en las cuerdas de los radios, una barra cuyo diámetro varía entre 48 y 36 mm, de más a menos desde r_1 hasta r_{2n} ; y finalmente, tubos circulares cuya sección varía entre 60x5 mm en los mástiles más bajos hasta 244.5x5 mm en los mástiles más altos. En la figura 10 hemos representado el diseño tridimensional de la RTRT sobre el graderío del coliseo. Este diseño es el resultado de combinar la forma en planta de la figura 6c con el perfil de cada uno de los radios de la figura 9.

Teniendo en cuenta su superficie en planta (16458 m²) y el peso total de sus elementos (373046 Kg) resulta una cuantía de 22.7 Kg/m² de acero. El 56% del peso corresponde al anillo exterior y el 44% al resto de elementos de la rueda. Así, tal y como indicábamos en la introducción, el dimensionado de la sección transversal del polígono exterior es, con diferencia, el factor más determinante en la optimización del material en este tipo de estructuras.

3.3. Comportamiento ideal de la RTRT en situación de cargas permanentes

En esta sección describimos el proceso para encontrar las coordenadas (x^* , y^* , z^*) de los nudos de la RTRT deformada debido a las cargas permanentes. También encontramos de las reacciones verticales V_i en los apoyos situados en los vértices del polígono exterior.

3.3.1 Deformación homotética en el plano

A partir del esfuerzo axial N de compresión uniforme en el polígono exterior, estimado en el apartado 3.2.4, podemos calcular las coordenadas (x^* , y^*) de los nudos de la RTRT deformada homotéticamente en planta (42). Podemos calcular las coordenadas (a^* , b^*) mediante la misma ecuación sustituyendo x_i^* por a_i^* e y_i^* por b_i^* .

$$\begin{cases} x_i^* = x_i \left(1 - \frac{N}{EA_c} \right) \\ y_i^* = y_i \left(1 - \frac{N}{EA_c} \right) \end{cases} \quad (42)$$

3.3.2 Cálculo de las reacciones y desplazamientos verticales

Debido a la acción de las fuerzas G , los nudos de la rueda también se desplazan en el eje Z . Para encontrar las coordenadas z^* consideraremos, ahora sí, la deformación axial de las barras de la estructura, a excepción de la que se produciría en los mástiles, que consideraremos despreciable.

Entonces, planteamos un sistema de $12nm+3n+1$ ecuaciones (43 a 56). Las ecuaciones 43 a 49 definen la longitud deformada de cada barra en función de los desplazamientos verticales. Las ecuaciones 50 y 51 definen los esfuerzos de tracción de las cuerdas de los radios y de los polígonos interiores, teniendo en cuenta que la relación entre la longitud de la barra deformada y su proyección en planta es la misma que hay entre el esfuerzo de la barra el esfuerzo de la barra proyectada en el diseño en planta. Los parámetros de entrada $H_{1,1}$, $H_{1,2}$, $H_{n,1}$, $H_{n,2}$, son las fuerzas de reacción horizontales en los extremos del primer cuadrante de los polígonos interiores. Estos parámetros provienen de una relación $H_{1,1}/H_1$, que es idéntica a $H_{n,1}/H_n$, fijada previamente de forma arbitraria. En general $0.5 \leq H_{1,1}/H_1 \leq 0.75$ y los desplazamientos verticales resultarán mayores cuanto más pequeña sea esta relación. Las ecuaciones 52 a 56 definen el equilibrio de fuerzas verticales en los mástiles y en los apoyos de la rueda teniendo en cuenta las fuerzas gravitatorias que actúan en estos puntos y la componente vertical de las fuerzas de las barras traccionadas que inciden en cada nudo.

$$z_{i,2j}^* = z_{i,1j}^* + s_{i,j}, i = 1 \div 2n, j = 2 \div m \quad (43)$$

$$z_{i,2}^* = z_{i,1}^* + s_i, i = 1 \div n \quad (44)$$

$$t_{i,j}^* = \sqrt{t_i^{*2} + (z_{i,j}^* - z_{i-1,j}^*)^2}, i = 2 \div n, j = 1 \div 2 \quad (45)$$

$$r_{i,j,k}^* = \sqrt{\left(\frac{r_i^*}{m}\right)^2 + (z_{i,j,k+1}^* - z_{i,j,k}^*)^2}, i = 1 \div 2n, j = 1 \div 2, k = 2 \div m-1 \quad (46)$$

$$r_{i,j,m}^* = \sqrt{\left(\frac{r_i^*}{m}\right)^2 + z_{i,j,m}^{*2}}, i = 1 \div 2n, j = 1 \div 2 \quad (47)$$

$$r_{2i-1,j,m}^* = \sqrt{\left(\frac{r_{2i-1}^*}{m}\right)^2 + (z_{i,j}^* - z_{2i-1,j,2}^*)^2}, i = 1 \div n, j = 1 \div 2 \quad (48)$$

$$r_{2i,j}^* = \sqrt{\left(\frac{r_{2i}^*}{m}\right)^2 + (z_{i,j}^* - z_{2i,j,2}^*)^2}, i=1 \div n, j=1 \div 2 \quad (49)$$

$$N_{i,j} = \frac{N_i H_{1,j} t_{i,j}^*}{-H_1 t_i^*}, i=1 \div n+1, j=1 \div 2 \quad (50)$$

$$P_{i,j,k} = \frac{P_i H_{1,j} m r_{i,j,k}^*}{-H_1 r_i^*}, i=1 \div 2n, j=1 \div 2, k=1 \div m \quad (51)$$

$$G_{i,j} - \sqrt{P_{i,1,j-1}^2 - \left(\frac{P_i H_{1,j-1}}{-H_1}\right)^2} + \sqrt{P_{i,1,j}^2 - \left(\frac{P_i H_{1,j}}{-H_1}\right)^2} + \sqrt{P_{i,2,j-1}^2 - \left(\frac{P_i H_{1,j-2}}{-H_1}\right)^2} + \sqrt{P_{i,2,j}^2 - \left(\frac{P_i H_{1,j-2}}{-H_1}\right)^2} = 0 \quad (52)$$

$$i=1 \div 2n, j=2 \div m$$

$$G_{T,i} + \sqrt{P_{2i-1,1,1}^2 - \left(\frac{P_{2i-1} H_{1,1}}{-H_1}\right)^2} - \sqrt{P_{2i-1,2,1}^2 - \left(\frac{P_{2i-1} H_{1,2}}{-H_1}\right)^2} + \sqrt{P_{2i,1,1}^2 - \left(\frac{P_{2i} H_{1,1}}{-H_1}\right)^2} - \sqrt{P_{2i,2,1}^2 - \left(\frac{P_{2i} H_{1,2}}{-H_1}\right)^2} + \sqrt{N_{i,1}^2 - \left(\frac{N_i H_{1,1}}{-H_1}\right)^2} - \sqrt{N_{i,2}^2 - \left(\frac{N_i H_{1,2}}{-H_1}\right)^2} - \sqrt{N_{i+1,1}^2 - \left(\frac{N_{i+1} H_{1,1}}{-H_1}\right)^2} + \sqrt{N_{i+1,2}^2 - \left(\frac{N_{i+1} H_{1,2}}{-H_1}\right)^2} = 0 \quad (53)$$

$$i=2 \div n-1$$

$$(G_{C,i} + V_i) - \sqrt{P_{2i-2,1,m}^2 - \left(\frac{P_{2i-2} H_{1,1}}{-H_1}\right)^2} + \sqrt{P_{2i-2,2,m}^2 - \left(\frac{P_{2i-2} H_{1,2}}{-H_1}\right)^2} - \sqrt{P_{2i-1,1,m}^2 - \left(\frac{P_{2i-1} H_{1,1}}{-H_1}\right)^2} + \sqrt{P_{2i-1,2,m}^2 - \left(\frac{P_{2i-1} H_{1,2}}{-H_1}\right)^2} = 0 \quad (54)$$

$$i=2 \div n$$

$$(G_{C,1} + V_1) - \sqrt{P_{1,1,m}^2 - \left(\frac{P_1 H_{1,1}}{-H_1}\right)^2} + \sqrt{P_{1,2,m}^2 - \left(\frac{P_1 H_{1,2}}{-H_1}\right)^2} = 0 \quad (55)$$

$$(G_{C,n+1} + V_{C,n+1}) - \sqrt{P_{2n,1,m}^2 - \left(\frac{P_{2n} H_{1,1}}{-H_1}\right)^2} + \sqrt{P_{2n,2,m}^2 - \left(\frac{P_{2n} H_{1,2}}{-H_1}\right)^2} = 0 \quad (56)$$

Los parámetros de entrada son: m, n, N, N_i con $i=1 \div n+1, P_i$ con $i=1 \div 2n, H_1, H_{n+1}, H_{1,1}, H_{1,2}, H_{n,1}, H_{n,2}, G_{C,i}$ con $i=1 \div n+1, G_{T,i}$ con $i=1 \div n, G_{i,j}$ con $i=1 \div 2n$ y $j=2 \div m, s_i$ con $i=1 \div n, s_{i,j}$ con $i=1 \div 2n$ y $j=2 \div m, t_i^*$ con $i=1 \div n+1, t_{1,j}^*$ y $t_{n+1,j}^*$ con $j=1 \div 2, r_i^*$ con $i=1 \div 2n$. Las incógnitas son: $z_{i,j}^*$ con $i=1 \div n$ y $j=1 \div 2, z_{i,j,k}^*$ con $i=1 \div 2n, j=1 \div 2$ y $k=2 \div m, V_i$ con $i=1 \div n+1, r_{i,j,k}^*$ con $i=1 \div 2n, j=1 \div 2$ y $k=1 \div m, t_{i,j}^*$ con $i=2 \div n$ y $j=1 \div 2, P_{i,j,k}$ con $i=1 \div 2n, j=1 \div 2$ y $k=1 \div m, N_{i,j}$ con $i=1 \div n+1$ y $j=1 \div 2$.

Para resolver este sistema, procedemos con un método iterativo. Primero renombramos todas las incógnitas del sistema como u_i con $i=1 \div 12nm+3n+1$. Entonces, inicialmente generamos un punto de arranque $P_\alpha = (u_1, u_2, \dots, u_{12nm+3n+1})_\alpha \in \mathbb{R}^{12nm+3n+1}$ del méto-

do a partir de las coordenadas (x^*, y^*, z) correspondientes a la estructura deformada solamente en planta, y con las fuerzas obtenidas en el diseño en planta y el diseño del perfil de los radios. Entonces, realizaremos un cálculo iterativo para encontrar el punto P_μ . Este punto será la resolución del sistema con una tolerancia $\tau = \sum_{i=1}^{12nm+3n+1} |f_i(P_\mu)| < 10^{-3}$. Para encontrar P_μ consideramos una función $H: \mathbb{R}^{12nm+3n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $H(u) = \sum_{i=1}^{12nm+3n+1} (f_i(u))^2$ donde $u = (u_1, u_2, \dots, u_{12nm+3n+1})$.

Aplicamos entonces el método de las variedades de nivel [29]. Al igual que el bien conocido Newton-Raphson, este método también es iterativo, pero, a diferencia de lo que suele ser habitual en los algoritmos utilizados en programas de análisis no-lineal de estructuras, se alcanza la convergencia sin necesidad de aplicar pasos de carga de manera incremental. A continuación pasamos a describirlo de forma detallada.

Consideramos la variedad de nivel $V^{(0)} \subset \mathbb{R}^{12nm+3n+1}$ de la función $H(u)$ por el punto de arranque $u^{(0)} = P_\alpha$. Podría visualizarse en el hipotético caso de H en \mathbb{R}^2 las variedades de nivel como curvas planas que encierran a ω , la gráfica de H estaría en \mathbb{R}^3 con la imagen de una hipersuperficie parecida a un de pozo cóncavo con fondo en el punto $(\omega, H(\omega)) = (\omega, 0) \in \mathbb{R}^3$. Usando la dirección de la recta normal a la variedad de nivel $V^{(0)}$, la cual es de codimensión 1, desde el punto inicial de arranque $u^{(0)} = P_\alpha$ nos movemos hasta llegar a otra variedad de nivel $V^{(1)}$ en otro punto $u^{(1)}$, de tal manera que el contacto de la recta normal a la variedad de nivel $V^{(0)}$ sea tangencial a la de nivel $V^{(1)}$. Repetimos el proceso empezando por el punto $u^{(1)}$ y nos movemos sobre la normal a la variedad $V^{(1)}$ hasta llegar al contacto tangencial $u^{(2)}$ con otra variedad de nivel $V^{(2)}$ con nivel inferior. Y así sucesivamente. Como $H(u^{(0)}) > H(u^{(1)}) > H(u^{(2)}) > \dots$ entonces, siguiendo este proceso nos aproximamos al punto de nivel más pequeño de $H(u)$ que es ω . Este proceso iterativo geométrico se expresa analíticamente con la siguiente ecuación recurrente (57):

$$u^{(k+1)} = u^{(k)} - \lambda_k \nabla H(u^{(k)}) \quad (57)$$

donde ∇H es el gradiente de H y donde $\lambda_k > 0$ con $k=0, 1, 2, \dots$ la cual debe ser determinada a cada paso.

Para determinar λ_k , consideramos la función $\psi(\lambda): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con $\psi(\lambda) = H(u^{(k)})$, que es la variación de nivel H , sobre la normal a en $V^{(k)}$. Y deberíamos tomar $\lambda_k = \lambda$ tal que $\psi(\lambda_k)$ sea mínimo. En vez de encontrar el verdadero $\lambda_k = \lambda$ que minimice $\psi(\lambda)$, mediante aproximaciones lineales de desarrollos de Taylor, encontramos la siguiente ecuación (58):

$$\lambda_k = \frac{1}{2} \frac{f(u^{(k)}) Jf(u^{(k)}) Jf(u^{(k)})^t f(u^{(k)})^t}{f(u^{(k)}) Jf(u^{(k)}) Jf(u^{(k)})^t Jf(u^{(k)}) Jf(u^{(k)})^t f(u^{(k)})^t} \quad (58)$$

donde $f(u^{(k)}) = (f_1(u^{(k)}), \dots, f_{12nm+3n+1}(u^{(k)}))$ y donde $Jf(u^{(k)})$ es la matriz jacobiana de $f(u)$ calculada en $u^{(k)}$.

$$Jf(u^{(k)}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u_{12nm+3n+1}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial u_{12nm+3n+1}} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_{12nm+3n+1}}{\partial u_1} & \frac{\partial f_{12nm+3n+1}}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_{12nm+3n+1}}{\partial u_{12nm+3n+1}} \end{pmatrix} (u^{(k)})$$

Se puede demostrar que $\nabla H(u^{(k)}) = 2f(u^{(k)})Jf(u^{(k)})$, así que el proceso iterativo está definido en la siguiente ecuación (59):

$$u^{(k+1)} = u^{(k)} - \lambda_k 2f(u^{(k)})Jf(u^{(k)}) \quad (59)$$

con $u^{(0)} = P$ hasta encontrar $P_\mu = (u_1, u_2, \dots, u_{12nm+3n+1}) \in \mathbb{R}^{12nm+3n+1}$ tal que $\sum_{i=1}^{12nm+3n+1} |f_i(P_\mu)| < 10^{-3}$.

3.3.3 Definición del pretensado

Introducimos el pretensado por medio de un acortamiento impuesto ($\Delta r_{0,i,j,k}$ y $\Delta t_{0,i,j}$) en estas barras. Estos acortamientos impuestos permiten una deformación homotética en el plano de la RTRT cuando actúan las fuerzas G . Para calcularlos utilizamos las siguientes ecuaciones (60a y 60b):

$$\Delta r_{0,i,j,k} = \frac{P_{i,j,k} r_{i,j,k}}{EA_{i,j,k}} + (r_{i,j,k}^* - r_{i,j,k}), \quad i=1 \div 2n, j=1 \div 2, k=1 \div m \quad (60a \text{ y } 60b)$$

$$\Delta t_{0,i,j} = \frac{N_{i,j} r_{i,j}}{EA_{i,j}} + (t_{i,j}^* - t_{i,j}), \quad i=1 \div 2n, j=1 \div 2$$

3.3.4 Estabilidad lateral y arriostramiento de los radios

Una inestabilidad lateral de los radios se produce cuando, después de superar el valor de carga crítica, los mástiles pierden la verticalidad y desplazan las cuerdas superior e inferior hacia lados opuestos, fuera del plano vertical del radio (figura 11a). El desplazamiento lateral suele estar impedido en el extremo superior de los mástiles por la membrana de cubierta (figura 11b). El arriostramiento del extremo inferior obliga a disponer barras tensoras formando triangulaciones en el plano vertical perpendicular al plano del radio (figura 11c). Un mástil arriostrado de este modo no puede desviarse libremente fuera del plano del radio sin que actúen las triangulaciones. Sin embargo, si no se desea disponer arriostramientos de este tipo en todos los mástiles, es posible comprobar la estabilidad lateral considerando una longitud libre del radio igual a la distancia entre mástiles arriostrados. Esta comprobación se realiza comparando el valor de carga crítica con la carga real del radio. El valor de carga crítica depende principalmente de la distancia entre arriostramientos, de la longitud de los mástiles y de la fuerza de pretensado de las cuerdas. Existe diversa formulación para poder realizar esta comprobación de forma analítica [30-33]. Cabe analizar esta cuestión detenidamente ya que ha sido causa de colapso de estructuras similares en el pasado [34].

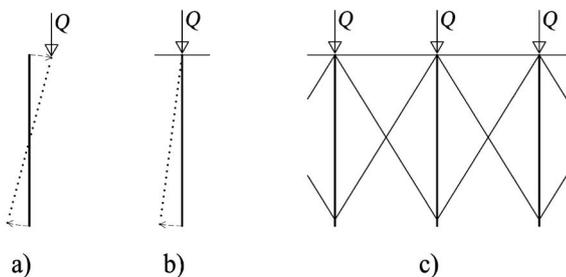


Figura 11. Situaciones de inestabilidad lateral de un radio considerando: a) desplazamiento libre de los extremos de un mástil fuera del plano del radio, b) desplazamiento libre del extremo inferior y arriostrado en el extremo superior mediante la membrana de cubierta, y c) arriostramiento de ambos extremos mediante barras tensoras formando triangulaciones.

3.3.5 Modelo de análisis para la validación del diseño resultante

A través de los procesos descritos en la sección 3.3 hemos calculado las coordenadas (x^*, y^*, z^*) y los acortamientos $\Delta r_{0,i,j,k}$ y $\Delta t_{0,i,j}$ para introducir el pretensado en la RTRT sobre el Coliseo, cuyo diseño geométrico en planta y perfil está definido en las figuras 6c, 9 y 10. Después hemos analizado un modelo de la RTRT mediante el software *Autodesk Robot Structural Analysis*. Este software realiza un cálculo considerando la no-linealidad geométrica con grandes desplazamientos. Para ello utiliza un algoritmo Newton-Raphson con pasos de carga de manera incremental. Así, hemos comprobado que, efectivamente, la RTRT se comporta idealmente. Es decir, en situación de cargas permanentes, el esfuerzo de compresión es sensiblemente uniforme en todos los lados del polígono exterior (figura 12a), la deformación en planta se produce de manera homotética (figura 12c), por lo cual los mástiles mantienen su verticalidad después de deformarse (figura 12b).

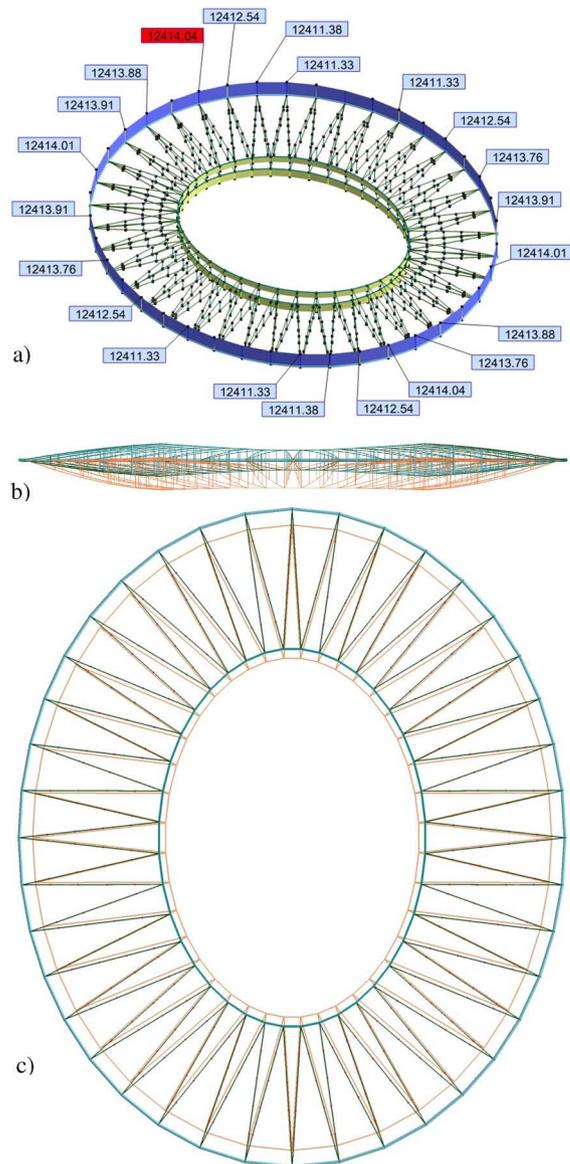


Figura 12. Resultados del modelo de validación con *Autodesk Robot Structural Analysis*: a) Diagrama de esfuerzos axiales con valores de compresión en el polígono exterior, b) y c) perfil y planta de la estructura deformada (en color gris se muestra la forma original y en color naranja la deformada).

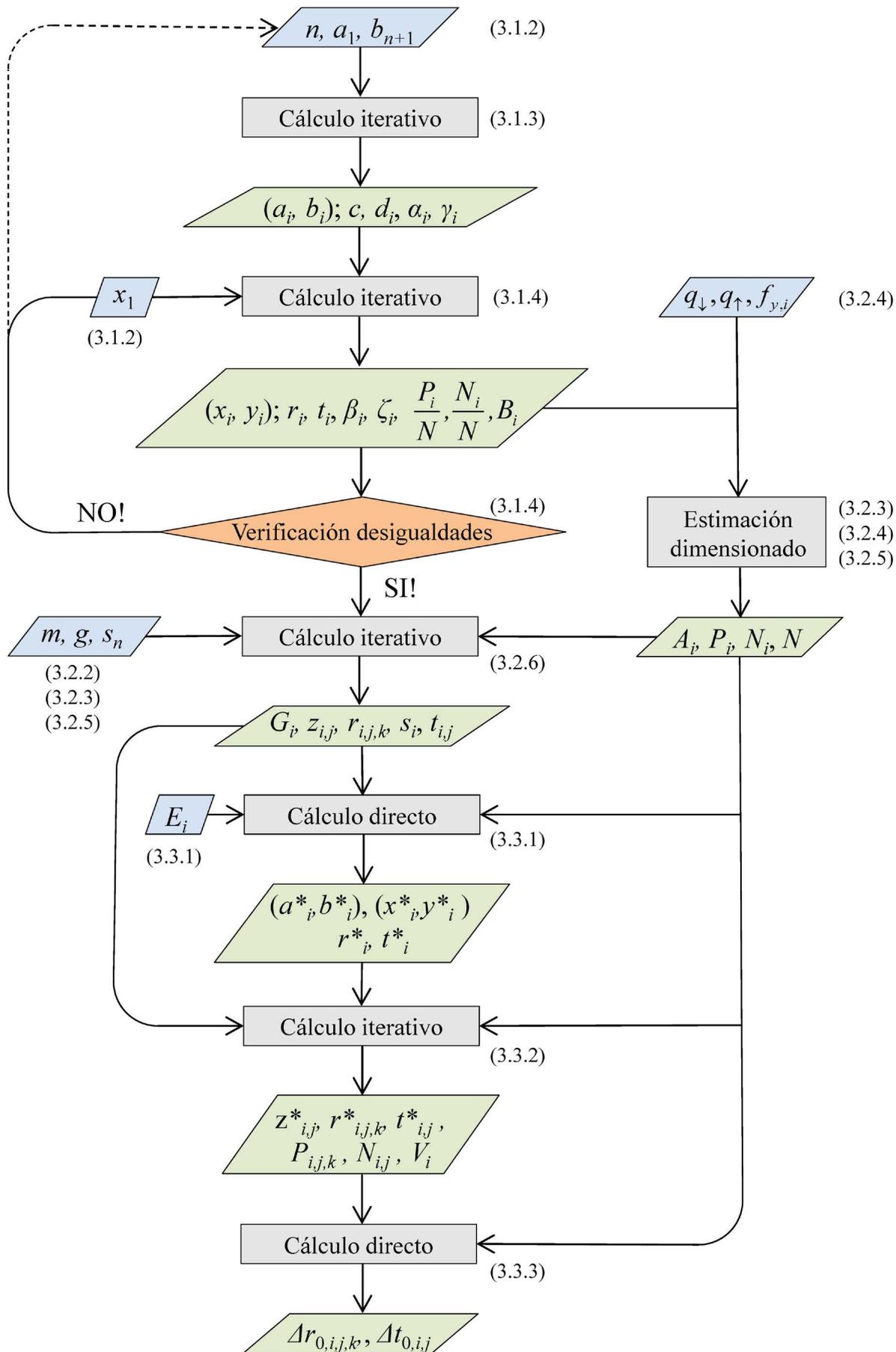


Figura 13. Diagrama de flujos del procedimiento de diseño paramétrico de una RTRT con perfil biconvexo y planta elíptica.

4.

RESUMEN DEL PROCEDIMIENTO DE DISEÑO PARAMÉTRICO

En la [figura 13](#) hemos representado un resumen del procedimiento de diseño paramétrico para una RTRT con un diagrama donde se muestran los parámetros de entrada (en azul), los procesos de cálculo (en gris) y los parámetros resultantes (en verde). Entre paréntesis hemos indicado el apartado del artículo en el cual se definen cada uno ellos.

En la primera fase del procedimiento, a partir del número (n) de lados de un cuadrante, de los semiejes de la elipse (a_1 , b_{n+1}) y la coordenada (x_1) que define la profundidad de la rueda en el eje X, mediante dos cálculos iterativos obtenemos el diseño en planta y la distribución relativa ideal de fuerzas en el plano del polígono exterior. En la segunda fase, primero, a partir de los valores de carga máxima ascendente (q_1), carga máxima descendente (q_1) y de la resistencia (f_t) del acero en el límite elástico, estimamos los esfuerzos máximos de las barras y el dimensionado sus secciones transversales; después, a partir del número (m) de mástiles en cada radio, del valor de carga permanente (g) de la cubierta y de la longitud (S_n) de los mástiles más altos de cada radio, a través de un cálculo iterativo, obtenemos el perfil de los radios. En la tercera fase, primero, a partir del módulo de elasticidad (E_i), mediante un cálculo directo obtenemos las coordenadas (x^* , y^*) de la deformación en planta de la RTRT; después, mediante un cálculo iterativo, obtenemos las coordenadas (z^*) de la estructura deformada, y el alargamiento de todas las barras; por último, mediante un cálculo directo obtenemos los acortamientos iniciales ($\Delta r_{0i,j,k}$) y ($\Delta t_{0i,j}$) de las barras traccionadas, necesarios para introducir las fuerzas de pretensado.

5.

CONCLUSIONES

Hemos presentado un procedimiento de diseño paramétrico de ruedas trianguladas de radios traccionados (RTRT) con perfil biconvexo e inscritas en una planta elíptica. Estas RTRT podrían ser utilizadas para cubrir graderíos con la misma forma en planta, como los ejemplos de los anfiteatros romanos que mostramos. A partir de unos pocos parámetros de entrada, este procedimiento permite definir la geometría de la RTRT y las fuerzas de pretensado necesarias para que, en situación de cargas gravitatorias permanentes, la deformada sea una homotecia en planta de la forma original. Así, en tal situación, el único esfuerzo en el polígono exterior es una compresión uniforme. Esto iguala sus condiciones de dimensionado con las que tendría el polígono exterior de una RTRT inscrita en una circunferencia.

Todos los procesos descritos en este artículo podrían automatizarse mediante la programación de algoritmos compilados en una herramienta de diseño paramétrico asistido por ordenador. Por este motivo creemos que el procedimiento presentado en este artículo podría ser útil para conseguir diseños optimizados de este tipo de estructuras de cubierta.

Referencias

- [1] Carfrae, T. (2006) The structure of stadia: From exoskeletons to haute couture. *Australian Journal of Structural Engineering* 6 (3): 169-180. <https://doi.org/10.1080/13287982.2006.11464953>.
- [2] Göppert, K. (2013) New stadium projects. Proceedings of the VI International Conference on Textile Composites and Inflatable Structures. High tension-tensile architecture new stadium projects, ed. K. U. Bletzinger, B. Kröplin y E. Oñate, 21-26. Barcelona: CIMNE.
- [3] Kim, H. (2017) Structural performance of spoke wheel systems. Tesis de Master, Massachusetts Institute of Technology.
- [4] Göppert, K. (2012) Interdisziplinäres Entwerfen von Stadien: Unter großen Dächern. *Bautechnik* 89 (10): 694-700. <https://doi.org/10.1002/bate.201200049>.
- [5] Masubuchi, M. (2012) Conceptual and structural design of adaptive membrane structures with spoke wheel principle: Folding to the perimeter, Tesis de Master, University of Berlin.
- [6] Zanelli, A. (2015) Architectural fabric structures in the refurbishment of archaeological and cultural heritage areas, en: Llorens, J. I. (Ed.), *Fabric Structures in Architecture*, pp. 481-527, Cambridge, Woodhead Publishing-Elsevier. <https://doi.org/10.1016/B978-1-78242-233-4.00015-2>.
- [7] Sdino, L., Rosasco, P., Novi, F., Porcile, G. (2018) The evaluation of actions aimed at enhancing the cultural heritage: the case study of the Colosseum roofing. *Valori e Valutazioni* 20: 97-107.
- [8] Bergermann, R., Göppert, K. (2000) Das Speichenrad: Ein Konstruktionsprinzip für weitgespannte Dachkonstruktionen. *Stahlbau* 69 (8): 595-604. <https://doi.org/10.1002/stab.200002200>.
- [9] Liu, R., Xue, S., Sun, G., Li, X. (2014) Formulas for the derivation of node coordinates of annular crossed cable-truss structure in a pre-stressed state. *Journal of the International Association of Shell and Spatial Structures* 55 (4): 223-228.
- [10] Liu, R., Xue, S., Cao, J., Li, X. (2022) Analysis on single-layer hyperbolic cable net structure schemes of stadium roof. *Journal of Building Structures* 43 (9): 269-276. <https://doi.org/10.14006/j.jzjgxb.2021.0247>.
- [11] Fuller, R. B., Applewhite, E. J. (1975) Synergetics. Explorations in the geometry of thinking. New York, Macmillan Publishing Co.
- [12] Geiger, D. (1988) *Roof Structure*. U. S. Patent n° 4,736,553.
- [13] Yao, Y. L., Dong, S. L., Ma, G. Y. (2011) Configuration, classification and development of large-span tensile cable-truss structures. *Advanced Materials Research* 255-260: 225-229. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMR.255-260.225>.
- [14] Holzer, D., Hough, R., Burry, M. (2007) Parametric design and structural optimization for early design exploration. *International Journal of Architectural Computing* 5 (4): 625-643. <https://doi.org/10.1260/147807707783600780>.
- [15] Hladik, P., Lewis, C. J. (2010) Singapore National Stadium Roof. *International Journal of Architectural Computing* 3 (8): 257-277. <https://doi.org/10.1260/1478-0771.8.3.257>.
- [16] Lachauer, L., Jungjohann, H., Kotnik, T. (2011) Interactive parametric tools for structural design. *Proceedings of the IABSE-IASS Symposium*, London.
- [17] Preisinger, C., Heimrath, M. (2014) Karamba-a toolkit for parametric structural design. *Structural Engineering International* 24 (2): 217-221. <https://doi.org/10.2749/101686614X13830790993483>.
- [18] Danhaive, R. A., Mueller, C. (2015) Combining parametric modeling and interactive optimization for high-performance and creative structural design. *Proceedings of the IASS Symposium*, 17-20 Agosto 2015, Amsterdam.
- [19] Brown, N., De Oliveiria, J., Ochsendorf, J., Mueller, C. (2016) Early-stage integration of architectural and structural performance in a parametric multi-objective design tool. *International conference on structures and architecture*. Guimarães, Portugal.
- [20] Pan, W., Turrin, M., Louter, C., Sariyildiz, S., Sun, Y. (2019) Integrating multi-functional space and long-span structure in the early design stage of indoor sports arenas by using parametric modeling and multi-objective optimization. *Journal of Building Engineering* 22: 464-485. <https://doi.org/10.1016/j.jobbe.2019.01.006>.
- [21] Formigé, J. (1964) L'Amphithéâtre d'Arles. *Revue Archéologique* 2: 113-163.
- [22] Benario, H. W. (1981) Amphitheatres of the Roman World. *The Classical Journal* 76 (3): 255-258.

- [23] Tamai, H. (2019) Geometric approach to form finding of a spoke wheel system: Mathematical explanations. *Proceedings of the IASS Symposium*, 7-10 October 2019, Barcelona.
- [24] Tellier, X., Douthe, C., Hauswirth, L., Baverel, O. (2021) Funicularity of conics. *Acta Mechanica* 232 (8): 3179-3191. <https://doi.org/10.1007/s00707-021-02987-6>.
- [25] Schlaich Bergermann Partner web. <http://www.sbp.de/en/>, (consultada en 05.23).
- [26] Gabrielle G. A., Ragsdell, K. M. (1977) Reduced Gradient Method: A reliable tool for optimal design. *Journal of Manufacturing Science and Engineering* 99 (2): 394-400. <https://doi.org/10.1115/1.3439249>.
- [27] Cabello, A. (2018) Predimensioning sub-space for spoke-wheel roofs. *Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures* 59 (2): 119-130. <https://doi.org/10.20898/j.iaass.2018.196.875>.
- [28] Saliklis, E. (2019) The funicular and moments, en: Saliklis, E (Ed.), *Structures: A Geometric Approach. Graphical Statics and Analysis*, pp. 57-94, Cham/Switzerland, Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-98746-0>.
- [29] Demidovich, B. P., Maron, I. A. (1963) Fundamentals of computational mathematics, Fizmatgiz, Moscú.
- [30] Irvine, H. M., Jennings, P. C. (1975) Lateral stability of cable truss. *Journal of the Engineering Mechanics Division* 101 (4): 403-416. <https://doi.org/10.1061/JMCEA3.0002030>.
- [31] Irvine, H. M. (1978) Effect of tension changes on cable truss stability. *Journal of the Engineering Mechanics Division* 104 (2): 491-497. <https://doi.org/10.1061/JMCEA3.0002346>.
- [32] Tomka, P. (1997) Lateral stability of cable structures. *International Journal of Space Structures* 12 (1): 19-27. <https://doi.org/10.1177/026635119701200103>.
- [33] Wu, M. (2008) Analytical method for the lateral buckling of the struts in beam string structures. *Engineering Structures* 30 (9): 2301-2310. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2008.01.008>.
- [34] Peiró, P. (2013) La cubierta de las Ventas se hundió por un error de diseño que la hizo inestable. *El País*, 20 de Marzo.