

Análisis en servicio de elementos compuestos de hormigón con pretensado interior no adherente bajo cargas de corta y larga duración

Analysis in service of prestressed composite concrete members with unbonded internal tendons under short and long-term loads

Pablo Martín Páez Gus^a, Berardi Sensale^b

^a Facultad de Ingeniería, Universidad de la República (Uruguay).

^b Instituto de Estructuras y Transporte, Facultad de Ingeniería, Universidad de la República (Uruguay).

Recibido el 12 de diciembre de 2019; aceptado el 27 de mayo de 2020

RESUMEN

Basado en el método de paso-a-paso para el análisis en el tiempo de las deformaciones diferidas en el hormigón, en este trabajo se desarrolla una formulación para el análisis de vigas compuestas de hormigón pretensado con tendones internos no adherentes sin utilizar el método de los elementos finitos. Dicha formulación contempla tanto el análisis en el corto como en el largo plazo, el estado no fisurado y fisurado del elemento, la fluencia y la retracción del hormigón, la relajación del acero de pretensado y la presencia de armadura pasiva. Además, el trazado de la armadura de pretensado puede ser genérico. A partir de la formulación desarrollada se propone un algoritmo computacional para el análisis de este tipo de vigas. Dicha implementación computacional permite el análisis tanto de vigas estáticamente determinadas como el de vigas continuas. La eficacia del algoritmo computacional propuesto es evaluada a partir de la comparación con estudios experimentales, obteniendo como principales conclusiones que el modelo computacional propuesto predice satisfactoriamente la pérdida de pretensado y las deformaciones de la viga a lo largo del tiempo.

© 2021 Asociación Española de Ingeniería Estructural (ACHE). Publicado por Cinter Divulgación Técnica S.L. Todos los derechos reservados.

PALABRAS CLAVE: Pretensado no adherente, elementos compuestos, análisis de largo plazo, pérdida de pretensado.

ABSTRACT

Based on the step-by-step method for the analysis over time of the strain in the concrete, in this work a formulation for the analysis of prestressed composed concrete beam with unbonded internal tendons without using the finite element method is developed. This formulation takes into account both the short and long-term analysis, the uncracked and cracked state of the member, the creep and the shrinkage of the concrete, the relaxation of the prestressing steel and the presence of non-prestressed steel reinforcement. In addition, the profile of the prestressing tendons can be generic. From the developed formulation, a computational algorithm for the analysis of this kind of beams is proposed. This computational implementation allows the analysis of both statically determinate beams and continuous beams. The effectiveness of the proposed computational algorithm is evaluated from the comparison with experimental studies, obtaining as main conclusions that the proposed computational model predict satisfactorily the loss of prestress and the deformations of the member over time.

© 2021 Asociación Española de Ingeniería Estructural (ACHE). Published by Cinter Divulgación Técnica S.L. All rights reserved.

KEYWORDS: Unbonded prestressing, composite concrete members, long-term analysis, prestress loss.

1. INTRODUCCIÓN

Existen muchas situaciones en la práctica de la ingeniería estructural donde es necesario estimar la pérdida de pretensado en vigas de hormigón pretensadas de sección compuesta, como

por ejemplo en las vigas de puentes [1-9]. La estimación exacta de la pérdida de pretensado en este tipo de elementos estructurales es muy difícil, incluso mediante análisis complejos como puede ser el método paso-a-paso, no solo por la precisión en la estimación de los parámetros envueltos en el fenómeno

* Persona de contacto / Corresponding author.
Correo-e / email: ppaez@fing.edu.uy (Pablo Martín Páez Gus).

sino también porque la acción compuesta comienza a desarrollarse gradualmente a lo largo del tiempo.

El análisis se vuelve aún más complejo si las vigas son elementos pretensados con pretensado interior no adherente. El pretensado interior no adherente está caracterizado por no existir compatibilidad de deformaciones entre el acero de pretensado y el hormigón, lo que significa que el acero de pretensado y el hormigón que lo rodea pueden moverse uno con respecto al otro.

Existen relativamente pocos trabajos de investigación enfocados en predecir el comportamiento en servicio de vigas pretensadas con pretensado interior no adherente sometidas a cargas de larga duración [10-16]. Sin embargo no existen trabajos de investigación enfocados en predecir el comportamiento bajo cargas de larga duración de elementos compuestos con pretensado interior no adherente. Este trabajo se enfoca en el análisis en servicio bajo cargas de larga duración de elementos compuestos de hormigón pretensado con pretensado interior no adherente. Basado en el método de paso-a-paso para el análisis en el tiempo de las deformaciones diferidas en el hormigón, en este trabajo se propone un algoritmo computacional para el análisis de vigas compuestas de hormigón pretensado con tendones internos no adherentes sin utilizar el método de los elementos finitos. El algoritmo computacional propuesto puede aplicarse tanto a vigas estáticamente determinadas como a vigas continuas. La originalidad de este trabajo se encuentra en la formulación propuesta. Esta formulación tiene en cuenta el estado no fisurado y fisurado del elemento, la fluencia y retracción del hormigón, la relajación del acero de pretensado y la presencia de armadura pasiva. Además, el trazado de los tendones puede ser genérico.

Una de las principales ventajas del método propuesto es que se basa en los principios básicos de la resistencia de los materiales, sin recurrir a formulaciones matemáticas altamente complejas como pueden ser las formulaciones de elementos finitos del tipo híbrido [14, 15]. Otra ventaja del método propuesto radica en la utilización de la función de fluencia dada por los diferentes códigos a nivel internacional, a diferencia de otras investigaciones, en donde se utiliza una función de fluencia diferente a las que aparecen en los códigos para el cálculo de estructuras de hormigón [16].

La eficacia del algoritmo computacional propuesto es evaluada a partir de la comparación con estudios experimentales, obteniendo como principales conclusiones que el modelo computacional propuesto predice satisfactoriamente la pérdida de pretensado y las deformaciones de la viga a lo largo del tiempo.

2. RELACIONES CONSTITUTIVAS DE LOS MATERIALES

2.1. Hormigón

La deformación unitaria total en el tiempo de una fibra de hormigón puede escribirse como la ecuación (1) [17]:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_e(t) + \varepsilon_{cr}(t, t_0) + \varepsilon_{sh}(t, t_s) + \varepsilon_T \quad (1)$$

donde $\varepsilon_e(t)$ es la deformación unitaria elástica, $\varepsilon_{cr}(t, t_0)$ es la deformación unitaria por fluencia entre los tiempos t_0 y t , ε_{sh}

(t, t_s) es la deformación unitaria debida a la retracción entre los tiempos t_s y t , y ε_T es la deformación unitaria de origen térmico. t_0 y t_s corresponden a la edad del hormigón al momento de carga y al inicio de la retracción, respectivamente.

La relación tensión-deformación del hormigón para cargas instantáneas puede expresarse de acuerdo a la ecuación (2) [18, 19]:

$$\varepsilon_e = \frac{\sigma_c}{E_c} \quad \text{para} \quad -0.40 f_{cm} \leq \sigma_c \leq f_{cm} \quad (2)$$

siendo σ_c la tensión, f_{cm} y f_{ctm} son la resistencia media a compresión y la resistencia media a tracción, respectivamente, y E_c el módulo de elasticidad secante.

Cuando el hormigón es sometido a cargas de larga duración cuya magnitud varía en el tiempo, la deformación unitaria total puede obtenerse a partir del principio de superposición [20]. La aplicación de este principio requiere del cumplimiento de las hipótesis de linealidad [21]. La deformación unitaria total a temperatura constante puede escribirse como la ecuación (3):

$$\varepsilon(t) = J(t, t_0) \sigma_c(t_0) + \int_{\tau=t_0}^{\tau=t} J(t, \tau) d\sigma_c(\tau) + \varepsilon_{sh}(t, t_s) \quad (3)$$

donde $\sigma_c(t_0)$ es la tensión en el hormigón en el instante t_0 , $J(t, \tau)$ es la función de fluencia del hormigón entre los tiempos τ y t , su expresión viene dada por la ecuación (4):

$$J(t, \tau) = \frac{1 + \phi(t, \tau)}{E_c(\tau)} \quad (4)$$

siendo $\phi(t, \tau)$ el coeficiente de fluencia entre los tiempos τ y t , y $E_c(\tau)$ el módulo de elasticidad del hormigón en el tiempo τ .

2.2. Acero activo y pasivo

La relación tensión-deformación para los aceros pasivo y activo puede considerarse lineal hasta la tensión de fluencia mediante la utilización de diagramadas idealizados [19]. La ecuación (5) establece la relación constitutiva para el acero pasivo y activo:

$$\begin{aligned} \sigma_s &= E_s \varepsilon_s \\ \sigma_p &= E_p \varepsilon_p \end{aligned} \quad (5)$$

donde σ_s , E_s y ε_s representan la tensión, el módulo de elasticidad y la deformación unitaria del acero pasivo, respectivamente, y σ_p , E_p y ε_p representan la tensión, el módulo de elasticidad y la deformación unitaria del acero activo, respectivamente.

Bajo la hipótesis de adherencia perfecta entre el acero pasivo y el hormigón, la deformación unitaria del acero pasivo será igual a la deformación unitaria de una fibra del hormigón ubicada en la misma posición que dicho acero. Sin embargo, al no existir compatibilidad de deformaciones entre el acero de pretensado no adherente y el hormigón, la condición de compatibilidad entre este acero y el hormigón puede escribirse bajo la hipótesis de perfecta no adherencia como la ecuación (6) [11]:

$$\varepsilon_p = \varepsilon_{p,0} + 1/l_{p,0} \int_{\tau=0}^{\tau=t} \Delta \varepsilon_{c,p}(x) dx \quad (6)$$

siendo $\varepsilon_{p,0}$ la deformación unitaria inicial del acero activo, $l_{p,0}$ la longitud inicial del acero activo, l la longitud de la viga, y $\Delta\varepsilon_{c,p}(x)$ el cambio en la deformación unitaria del hormigón en una fibra que coincide con la ubicación del acero de pretensado en una sección ubicada a una distancia x del extremo de la viga.

Debido al proceso de relajación que experimenta el acero cuando es sometido a tensiones superiores al 40% de su resistencia máxima característica $f_{p,max,k}$, la relación tensión-deformación para el acero de pretensado puede obtenerse a partir del modelo del coeficiente de relajación χ_r [22].

3. CONTRIBUCIÓN DEL HORMIGÓN ENTRE FISURAS

Cuando en una sección de un elemento sometido a flexión compuesta la tensión de tracción en el hormigón sobrepasa f_{ctm} , la sección se fisura. Si bien el hormigón no es capaz de llevar tensión en la sección fisurada, continúa llevando tensión entre las fisuras, colaborando así con la rigidez del elemento. Esta contribución del hormigón entre fisuras se denomina *tension stiffening* [23].

Cuando la sección del elemento es sometida a flexo-compresión, como es el caso de elementos de hormigón pretensado, la contribución del hormigón entre fisuras es menos significativa que en el caso de elementos sometidos a flexión pura o a flexo-tracción. De acuerdo con Torres *et al.* [24] si la relación entre el momento de fisuración y el momento de descompresión es menor o igual a dos, la contribución del hormigón entre fisuras puede ser despreciada. Dicha relación puede expresarse de otra manera como en la ecuación (7) [24]:

$$\frac{f_{ctm} A_c}{|F_N|} \leq 1 \quad (7)$$

siendo A_c el área bruta de la sección de hormigón y $|F_N|$ el valor absoluto de la fuerza axial (compresiones negativas).

En un elemento pretensado, no sometido a fuerzas axiales externas, la relación $|F_N|/A_c$ corresponde a la tensión media de pretensado en la sección. En términos generales, debido a las condiciones de servicio de una pieza pretensada (por ejemplo la limitación del ancho de fisura) la tensión media de pretensado suele ser bastante superior que f_{ctm} . No obstante, de no cumplirse la condición dada por la ecuación (7) la contribución del hormigón entre fisuras puede estimarse de acuerdo a los criterios expuestos en [23].

4. APLICACIÓN DEL MÉTODO PASO-A-PASO A VIGAS COMPUESTAS CON PRETENSADO INTERIOR NO ADHERENTE

4.1. Vigas estáticamente determinadas

La figura 1 muestra un procedimiento general de construcción de una viga compuesta de hormigón de un tablero de un puente en el cual la losa del tablero se hormigona in situ.

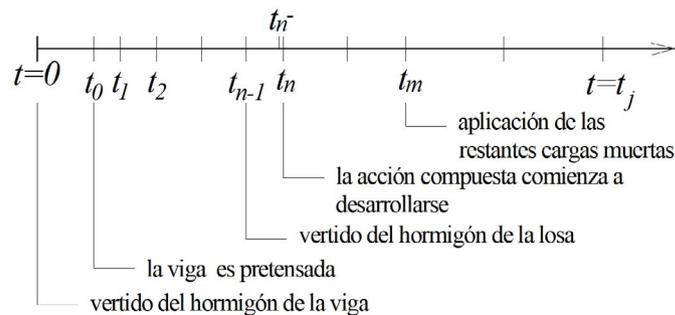


Figura 1. Escala temporal de un procedimiento general de construcción del tablero de un puente con vigas pretensadas.

Consideremos en primera instancia una viga estáticamente determinada de hormigón, pretensada con pretensado interior no adherente. Consideremos que la sección transversal de la viga es simétrica con respecto al eje z y que el origen O del eje coordenado se elige arbitrariamente sobre el eje de simetría. Supongamos que una sección de la viga ubicada a una distancia x medida desde el extremo, tiene $m_s(x)$ capas de acero pasivo y $m_p(x)$ capas de acero activo. Denominemos $A_{s(i)}(x)$ el área de la sección de la i -ésima capa de acero pasivo ($1 \leq i \leq m_s(x)$) y $A_{p(i)}(x)$ el área de la sección de la i -ésima capa de acero activo ($1 \leq i \leq m_p(x)$). Como caso más general, consideremos que bajo la acción del pretensado y las cargas de larga duración, la viga puede estar fisurada (figura 2).

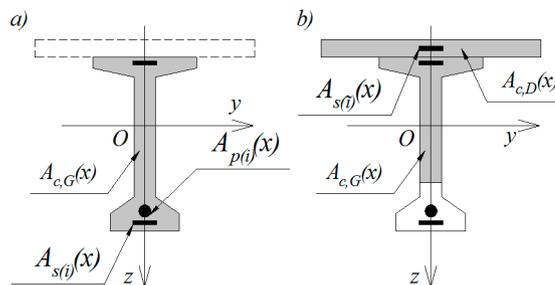


Figura 2. a) Sección de la viga, secciones de acero pasivo y activo no adherente. Ejes de referencia. b) Sección de la viga compuesta. Áreas de hormigón no fisuradas.

Teniendo en cuenta las hipótesis de Euler-Bernoulli la deformación unitaria en una fibra ubicada a una distancia z del punto de referencia O , en una sección ubicada a una distancia x del extremo de la viga y en un tiempo t_j , puede escribirse como la ecuación (8):

$$\varepsilon(t_j, x, z) = \varepsilon_r(t_j, x) + z\kappa(t_j, x) \quad (8)$$

donde $\varepsilon_r(t_j, x)$ y $\kappa(t_j, x)$ son la deformación unitaria en O y la curvatura, respectivamente.

Las relaciones constitutivas para el hormigón de la viga en todo tiempo $t_j > t_0$ y para el hormigón de la losa en todo tiempo $t_j > t_{(n-1)}$ pueden escribirse como en las ecuaciones (9) y (10), respectivamente:

$$\sigma_{c,G}(t_j, x, z) = E_{c,G}(t_j) (\varepsilon(t_j, x, z) - \varepsilon_{sh,G}(t_j, t_0)) + \sum_{i=0}^{i=j-1} F_{e,G}(t_j, t_i) \sigma_{c,G}(t_i, x, z) \quad (9)$$

$$\sigma_{c,D}(t_j, x, z) = E_{c,D}(t_j) (\varepsilon(t_j, x, z) - \varepsilon_{sh,D}(t_j - t_{n-1}, t_n - t_{n-1}) - \varepsilon(t_{n-}, x, z)) + \sum_{i=n}^{i=j-1} F_{e,D}(t_j - t_{n-1}, t_i - t_{n-1}) \sigma_{c,D}(t_i, x, z) \quad (10)$$

donde los subíndices G y D corresponden a la viga y a la losa respectivamente, t_{n-1} es el tiempo cuando es colocado el hormigón de la losa, t_n es el tiempo cuando la acción compuesta comienza a desarrollarse, t_{n-} representa un instante de tiempo justo antes de que la acción compuesta se desarrolle, el término $\varepsilon(t_{n-}, x, z)$ representa la deformación unitaria que habría en una fibra de la losa en el instante t_{n-} , justo antes que la acción compuesta se desarrolle (deformación "ficticia"). La inclusión del término $\varepsilon(t_{n-}, x, z)$ garantiza que la losa de hormigón esté descargada en el instante t_n . $F_{e,G}(t_j, t_i)$ y $F_{e,D}(t_j - t_{n-1}, t_i - t_{n-1})$ vienen dados por las ecuaciones (11) y (12), respectivamente [25]:

$$F_{e,G}(t_j, t_i) = (J_G(t_j, t_{i+1}) - J_G(t_j, t_i)) / J_G(t_j, t_j) \quad (11)$$

$$F_{e,G}(t_j - t_{n-1}, t_i - t_{n-1}) = (J_D(t_j - t_{n-1}, t_{i+1} - t_{n-1}) - J_D(t_j - t_{n-1}, t_i - t_{n-1})) / J_D(t_j - t_{n-1}, t_j - t_{n-1}) \quad (12)$$

La relación constitutiva para el acero pasivo de la i -ésima capa ($1 \leq i \leq m_s(x)$) para todo tiempo $t_j \geq t_0$ vienen dada por la ecuación (13):

$$\sigma_{s(i)}(t_j, x) = E_{s(i)} \varepsilon(t_j, x, z_{s(i)}) \quad (13)$$

Si a la losa se le adicionan $\hat{m}_s(x)$ capas de acero pasivo en cualquier sección ($t_j \geq t_n$), la relación constitutiva para el acero pasivo adicionado ($1 \leq \hat{i} \leq \hat{m}_s(x)$) viene dado por la ecuación (14):

$$\sigma_{s(\hat{i})}(t_j, x) = E_{s(\hat{i})} (\varepsilon(t_j, x, z_{s(\hat{i})}) - \varepsilon(t_{n-}, x, z_{s(\hat{i})})) \quad (14)$$

donde $\varepsilon(t_{n-}, x, z_{s(\hat{i})})$ es la deformación unitaria que habría en una fibra de la losa localizada en $z_{s(\hat{i})}$ y en el tiempo t_{n-} y $z_{s(\hat{i})}$ es la distancia desde el punto de referencia O hasta el centro de gravedad de la \hat{i} -ésima capa de acero pasivo localizado en la losa. La inclusión del término $\varepsilon(t_{n-}, x, z_{s(\hat{i})})$ garantiza que el acero de la losa esté descargado en el instante t_n .

La relación constitutiva para el acero activo no adherente de la i -ésima capa ($1 \leq i \leq m_p(x)$) para todo tiempo $t_j \geq t_0$ viene dada por la ecuación (15):

$$\sigma_{p(i)}(t_j, x) = E_{p(i)} \left(\frac{\Delta l_{p(i)}(t_j)}{l_{p,0(i)}} + \varepsilon_{p(i),0} - \varepsilon_{p,rel(i)}(t_j) \right) \quad (15)$$

donde $l_{p,0(i)}$, $\varepsilon_{p(i),0}$ y $\Delta l_{p(i)}(t_j)$ son la longitud inicial del acero activo no adherente de la i -ésima capa, su deformación unitaria inicial y su cambio de longitud en el instante t_j , respectivamente. $\varepsilon_{p,rel(i)}(t_j) = \Delta \bar{\sigma}_{pr(i)}(t_j - t_0) / E_p$ es la deformación unitaria debida a la relajación del acero activo no adherente de la i -ésima capa y $\Delta \bar{\sigma}_{pr(i)}(t_j - t_0)$ su relajación reducida. Si bien $\Delta \bar{\sigma}_{pr(i)}(t_j - t_0)$ representa una pérdida se ha considerado de valor positivo.

La fuerza axial y el momento flector resistido por el hormigón de la viga y la losa en una sección localizada a una distancia

x y en un instante $t_j \geq t_n$ vienen dados por las ecuaciones (16) y (17), respectivamente:

$$N_c(t_j, x) = \int_{A_{c,G}} \sigma_{c,G}(t_j, x, z) dA + \int_{A_{c,D}} \sigma_{c,D}(t_j, x, z) dA = (A_{c,G}(x) E_{c,G}(t_j) + A_{c,D}(x) E_{c,D}(t_j)) \varepsilon_r(t_j, x) = (\hat{B}_{c,G}(x) E_{c,G}(t_j) + \hat{B}_{c,D}(x) E_{c,D}(t_j)) \kappa(t_j, x) - A_{c,D}(x) E_{c,D}(t_j) \varepsilon_r(t_{n-}, x) - \hat{B}_{c,D}(x) E_{c,D}(t_j) \kappa(t_{n-}, x) - A_{c,G}(x) E_{c,G}(t_j) \varepsilon_{sh,G}(t_j, t_0) - A_{c,D}(x) E_{c,D}(t_j) \varepsilon_{sh,D}(t_j - t_0, t_n - t_0) + \sum_{i=j-1}^{i=n} F_{e,G}(t_j, t_i) N_{c,G}(t_j, x) + \sum_{i=n} F_{e,D}(t_j - t_{n-1}, t_i - t_{n-1}) N_{c,D}(t_j, x) \quad (16)$$

$$M_c(t_j, x) = \int_{A_{c,G}} \sigma_{c,G}(t_j, x, z) dA + \int_{A_{c,D}} \sigma_{c,D}(t_j, x, z) dA = (\hat{B}_{c,G}(x) E_{c,G}(t_j) + \hat{B}_{c,D}(x) E_{c,D}(t_j)) \varepsilon_r(t_j, x) + (\hat{I}_{c,G}(x) E_{c,G}(t_j) + \hat{I}_{c,D}(x) E_{c,D}(t_j)) \kappa(t_j, x) - \hat{B}_{c,D}(x) E_{c,D}(t_j) \varepsilon_r(t_{n-}, x) - \hat{I}_{c,D}(x) E_{c,D}(t_j) \kappa(t_{n-}, x) - \hat{B}_{c,G}(x) E_{c,G}(t_j) \varepsilon_{sh,G}(t_j, t_0) - \hat{B}_{c,D}(x) E_{c,D}(t_j) \varepsilon_{sh,D}(t_j - t_0, t_n - t_0) + \sum_{i=j-1}^{i=n} F_{e,G}(t_j, t_i) M_{c,G}(t_j, x) + \sum_{i=n} F_{e,D}(t_j - t_{n-1}, t_i - t_{n-1}) M_{c,D}(t_j, x) \quad (17)$$

siendo $A_{c,G}(x)$ y $A_{c,D}(x)$ son el área no fisurada del hormigón de la viga y de la losa, respectivamente, $\hat{B}_{c,G}(x)$ y $\hat{B}_{c,D}(x)$ son el momento estático respecto al eje de referencia del área no fisurada de la viga y de la losa, respectivamente, y $\hat{I}_{c,G}(x)$ y $\hat{I}_{c,D}(x)$ son el momento de inercia del área no fisurada de la viga y de la losa respecto al eje de referencia, respectivamente.

La fuerza axial y el momento flector resistido por el acero activo no adherente y el acero pasivo en una sección localizada a una distancia x y en un instante $t_j \geq t_n$ vienen dados por las ecuaciones (18), (19), (20) y (21), respectivamente:

$$N_p(t_j, x) = \sum_{i=1}^{i=m_p(x)} A_{p(i)}(x) E_{p(i)} \left(\frac{\Delta l_{p(i)}(t_j)}{l_{p,0(i)}} + \varepsilon_{p(i),0} - \varepsilon_{p,rel(i)}(t_j) \right) \quad (18)$$

$$M_p(t_j, x) = \sum_{i=1}^{i=m_p(x)} z_{p(i)}(x) A_{p(i)}(x) E_{p(i)} \left(\frac{\Delta l_{p(i)}(t_j)}{l_{p,0(i)}} + \varepsilon_{p(i),0} - \varepsilon_{p,rel(i)}(t_j) \right) \quad (19)$$

$$N_s(t_j, x) = \sum_{i=1}^{i=m_s(x)} A_{s(i)}(x) E_{s(i)} \varepsilon_r(t_j, x) + \sum_{i=1}^{i=m_s(x)} z_{s(i)} A_{s(i)}(x) E_{s(i)} \kappa(t_j, x) + \sum_{i=1}^{i=\hat{m}_s(x)} A_{s(\hat{i})}(x) E_{s(\hat{i})} \varepsilon_r(t_j, x) + \sum_{i=1}^{i=\hat{m}_s(x)} z_{s(\hat{i})} A_{s(\hat{i})}(x) E_{s(\hat{i})} \kappa(t_j, x) - \sum_{i=1}^{i=m_s(x)} A_{s(i)}(x) E_{s(i)} \varepsilon_r(t_{n-}, x) - \sum_{i=1}^{i=m_s(x)} z_{s(i)} A_{s(i)}(x) E_{s(i)} \kappa(t_{n-}, x) \quad (20)$$

$$M_s(t_j, x) = \sum_{i=1}^{i=m_s(x)} z_{s(i)} A_{s(i)}(x) E_{s(i)} \varepsilon_r(t_j, x) + \sum_{i=1}^{i=m_s(x)} z_{s(i)}^2 A_{s(i)}(x) E_{s(i)} \kappa(t_j, x) + \sum_{i=1}^{i=\hat{m}_s(x)} z_{s(\hat{i})} A_{s(\hat{i})}(x) E_{s(\hat{i})} \varepsilon_r(t_j, x) + \sum_{i=1}^{i=\hat{m}_s(x)} z_{s(\hat{i})}^2 A_{s(\hat{i})}(x) E_{s(\hat{i})} \kappa(t_j, x) - \sum_{i=1}^{i=m_s(x)} z_{s(i)} A_{s(i)}(x) E_{s(i)} \varepsilon_r(t_{n-}, x) - \sum_{i=1}^{i=m_s(x)} z_{s(i)}^2 A_{s(i)}(x) E_{s(i)} \kappa(t_{n-}, x) \quad (21)$$

Dado que la resultante de las fuerzas internas (fuerza axial y momento flector) debe ser igual a las fuerzas externas en cada sección x y para todo tiempo t_j [30], teniendo en cuenta las ecuaciones (16) a (21), obtenemos la ecuación (22):

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} N_{ext}(t_j, x) \\ M_{ext}(t_j, x) \end{bmatrix} - \sum_{i=1}^{i=m_j(x)} \begin{bmatrix} N_{p(i),0}(x) \\ M_{p(i),0}(x) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} R_A(t_j, x) & R_B(t_j, x) \\ R_B(t_j, x) & R_I(t_j, x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon(t_j, x) \\ \kappa(t_j, x) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{R}_A(t_j, x) & \hat{R}_B(t_j, x) \\ \hat{R}_B(t_j, x) & \hat{R}_I(t_j, x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_r(t_n^-, x) \\ \kappa(t_n^-, x) \end{bmatrix} \\
&+ \sum_{i=0}^{i=j-1} F_{e,G}(t_j, t_i) \begin{bmatrix} N_{c,G}(t_j, x) \\ M_{c,G}(t_j, x) \end{bmatrix} \\
&+ \sum_{i=n}^{i=j-1} F_{e,G}(t_j, t_i) \begin{bmatrix} N_{c,G}(t_j, x) \\ M_{c,G}(t_j, x) \end{bmatrix} + \sum_{i=n}^{i=j-1} F_{e,D}(t_j - t_{n-1}, t_i - t_{n-1}) \begin{bmatrix} N_{c,D}(t_j, x) \\ M_{c,D}(t_j, x) \end{bmatrix} \\
&- E_{c,G}(t_j) \varepsilon_{sh,G}(t_j, t_0) \begin{bmatrix} A_{c,G}(x) \\ \hat{B}_{c,G}(x) \end{bmatrix} - E_{c,D}(t_j) \varepsilon_{sh,D}(t_j - t_0, t_n - t_0) \begin{bmatrix} A_{c,D}(x) \\ \hat{B}_{c,D}(x) \end{bmatrix} \\
&- \sum_{i=1}^{i=m_j(x)} A_{p(i)}(x) E_{p(i)} \varepsilon_{p,rel(i)}(t_j) \begin{bmatrix} 1 \\ Z_{p(i)} \end{bmatrix} \\
&+ \sum_{i=1}^{i=m_j(x)} A_{p(i)}(x) E_{p(i)} \frac{\Delta l_{p(i)}(t_j)}{l_{p,0(i)}} \begin{bmatrix} 1 \\ Z_{p(i)} \end{bmatrix} \quad (22)
\end{aligned}$$

donde $R_A(t_j, x)$, $R_B(t_j, x)$ y $R_I(t_j, x)$ representan la rigidez axial, la rigidez relativa al momento de primer orden y la rigidez flexional, respectivamente, de la sección compuesta respecto a los ejes de referencia. Sus expresiones vienen dadas por la ecuación (23):

$$\begin{aligned}
R_A(t_j, x) &= A_{c,G}(x) E_{c,G}(t_j) + A_{c,D}(x) E_{c,D}(t_j) + \sum_{i=1}^{i=m_s(x)} A_{S(i)}(x) E_{S(i)} + \sum_{i=1}^{i=\hat{m}_s(x)} A_{S(i)}(x) E_{S(i)} \\
R_B(t_j, x) &= \hat{B}_{c,G}(x) E_{c,G}(t_j) + \hat{B}_{c,D}(x) E_{c,D}(t_j) + \sum_{i=1}^{i=m_s(x)} z_{S(i)} A_{S(i)}(x) E_{S(i)} + \sum_{i=1}^{i=\hat{m}_s(x)} z_{S(i)} A_{S(i)}(x) E_{S(i)} \\
R_I(t_j, x) &= \hat{I}_{c,G}(x) E_{c,G}(t_j) + \hat{I}_{c,D}(x) E_{c,D}(t_j) + \sum_{i=1}^{i=m_s(x)} z_{S(i)}^2 A_{S(i)}(x) E_{S(i)} + \sum_{i=1}^{i=\hat{m}_s(x)} z_{S(i)}^2 A_{S(i)}(x) E_{S(i)} \quad (23)
\end{aligned}$$

mientras que $\hat{R}_A(t_j, x)$, $\hat{R}_B(t_j, x)$ y $\hat{R}_I(t_j, x)$ representan la rigidez axial, la rigidez relativa al momento estático y la rigidez flexional, respectivamente, de la losa y del acero pasivo contenido en ella. Sus expresiones vienen dada por la ecuación (24):

$$\begin{aligned}
\hat{R}_A(t_j, x) &= A_{c,D}(x) E_{c,D}(t_j) + \sum_{i=1}^{i=\hat{m}_s(x)} A_{S(i)}(x) E_{S(i)} \\
\hat{R}_B(t_j, x) &= \hat{B}_{c,D}(x) E_{c,D}(t_j) + \sum_{i=1}^{i=\hat{m}_s(x)} z_{S(i)} A_{S(i)}(x) E_{S(i)} \\
\hat{R}_I(t_j, x) &= \hat{I}_{c,D}(x) E_{c,D}(t_j) + \sum_{i=1}^{i=\hat{m}_s(x)} z_{S(i)}^2 A_{S(i)}(x) E_{S(i)} \quad (24)
\end{aligned}$$

La deformación del tendón no adherente localizado en la i -ésima capa y en el instante t_j viene dado la ecuación (25):

$$\begin{aligned}
\Delta l_{p(i)}(t_j) &= \int_{x=0}^{x=1} \left(\varepsilon_r - (t_j, x) + z_{p(i)} \kappa(t_j, x) \right) dx - \\
&- \int_{x=0}^{x=1} \left(\varepsilon_{r,0,ref}(x) + z_{p(i)} \kappa_{0,ref}(x) \right) dx \quad (25)
\end{aligned}$$

Luego, la deformación unitaria en el punto de referencia O y la curvatura en una sección localizada a una distancia x desde el extremo y en el instante t_j viene dado la ecuación (26):

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \varepsilon_r(t_n^-, x) \\ \kappa(t_n^-, x) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 \\ \left(R_A(t_j, x) R_I(t_j, x) - R_B(t_j, x)^2 \right) \end{bmatrix} \\
& \begin{bmatrix} R_1(t_j, x) & -R_B(t_j, x) \\ -R_B(t_j, x) & R_A(t_j, x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left[N_{ext}(t_j, x) \right] - \sum_{i=1}^{i=m_j(x)} \left[N_{p(i),0}(x) \right] \\ \left[M_{ext}(t_j, x) \right] - \sum_{i=1}^{i=m_j(x)} \left[M_{p(i),0}(x) \right] \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} \hat{R}_A(t_j, x) & \hat{R}_B(t_j, x) \\ \hat{R}_B(t_j, x) & \hat{R}_I(t_j, x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_r(t_n^-, x) \\ \kappa(t_n^-, x) \end{bmatrix} - \sum_{i=0}^{i=j-1} F_{e,G}(t_j, t_i) \begin{bmatrix} N_{c,G}(t_j, x) \\ M_{c,G}(t_j, x) \end{bmatrix} \\
&- \sum_{i=n}^{i=j-1} F_{e,D}(t_j - t_{n-1}, t_i - t_{n-1}) \begin{bmatrix} N_{c,D}(t_j, x) \\ M_{c,D}(t_j, x) \end{bmatrix} + E_{c,G}(t_j) \varepsilon_{sh,G}(t_j, t_0) \begin{bmatrix} A_{c,G}(x) \\ \hat{B}_{c,G}(x) \end{bmatrix} \\
&+ E_{c,D}(t_j) \varepsilon_{sh,D}(t_j - t_0, t_n - t_0) \begin{bmatrix} A_{c,D}(x) \\ \hat{B}_{c,D}(x) \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^{i=m_j(x)} A_{p(i)}(x) E_{p(i)} \varepsilon_{p,rel(i)}(t_j) \begin{bmatrix} 1 \\ Z_{p(i)} \end{bmatrix} \\
&+ \sum_{i=1}^{i=m_j(x)} A_{p(i)}(x) E_{p(i)} \frac{\Delta l_{p(i)}(t_j)}{l_{p,0(i)}} \begin{bmatrix} 1 \\ Z_{p(i)} \end{bmatrix} \quad (26)
\end{aligned}$$

4.2. Vigas continuas

En el caso de vigas continuas, la principal diferencia radica en que se originan momentos hiperestáticos debidos al pretensado [27]. Por lo que en este caso a la resultante de las acciones externas se le deberá adicionar la componente del momento flector secundario, que depende de la fuerza de pretensado y de la rigidez de la viga.

El CEB-FIP [10] propone una metodología para la resolución numérica de vigas continuas de hormigón armado. Si bien esta metodología considera el problema de la fisuración, está basada en consideraciones de linealidad, lo que puede no ser muy eficiente ya que la resolución del sistema de ecuaciones planteado tiene una convergencia más rápida para aquellos casos en los que se parta de valores que sean más próximos a los valores solución.

Dado que el problema que se analiza es altamente no-lineal, basados en el procedimiento descrito en [27], el cual está basado en el método de las fuerzas, se ha propuesto una metodología alternativa de análisis. Según dicho método las reacciones hiperestáticas se reemplazan por fuerzas externas y se agregan las condiciones de contorno. El momento secundario de pretensado para una sección de la viga y para un instante de tiempo, puede escribirse como en la ecuación (27):

$$M_S(t_j, x) = \sum_{n=1}^{n=r} W_n(N_p) M_{s(n)}(x) \quad (27)$$

siendo r el número de vínculos hiperestáticos, $W_n(N_p)$ es el valor de la n -ésima reacción hiperestática, que dependen de la fuerza de pretensado y $M_{s(n)}(x)$ el momento flector que origina la n -ésima reacción hiperestática si la misma fuese de valor unitario, manteniendo las restantes reacciones hiperestáticas nulas. Además deberá cumplirse que la deformación vertical de la viga en los puntos de aplicación de las reacciones hiperestáticas sea nula.

En el caso de vigas continuas, teniendo en cuenta la ecuación (27), la ecuación (26) se reescribe como la ecuación (28):

$$\begin{aligned}
\left[\varepsilon_r(t_j, x) \right] &= \left(\frac{1}{\left(R_A(t_j, x) R_I(t_j, x) - R_B(t_j, x)^2 \right)} \right) \\
&\begin{bmatrix} R_I(t_j, x) & -R_B(t_j, x) \\ -R_B(t_j, x) & R_A(t_j, x) \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} M_{ext}(t_j, x) + \sum_{n=1}^{N_{ext}(t_j, x)} W_n(N_p) M_{s(n)}(x) \end{bmatrix} \right) \\
&- \sum_{i=1}^{i=m_f(x)} \begin{bmatrix} N_{p(i),0}(x) \\ M_{p(i),0}(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{R}_A(t_j, x) & \hat{R}_B(t_j, x) \\ \hat{R}_B(t_j, x) & \hat{R}_I(t_j, x) \end{bmatrix} \left[\varepsilon_r(t_{n-1}, x) \right] \\
&- \sum_{i=0}^{i=j-1} F_{e,G}(t_j, t_i) \begin{bmatrix} N_{c,G}(t_j, x) \\ M_{c,G}(t_j, x) \end{bmatrix} - \sum_{n=1}^{i=j-1} F_{e,D}(t_j - t_{n-1}, t_i - t_{n-1}) \begin{bmatrix} N_{c,D}(t_j, x) \\ M_{c,D}(t_j, x) \end{bmatrix} \\
&+ E_{c,G}(t_j) \varepsilon_{sh,G}(t_j, t_0) \begin{bmatrix} A_{c,G}(x) \\ \hat{B}_{c,G}(x) \end{bmatrix} + E_{c,D}(t_j) \varepsilon_{sh,D}(t_j - t_0, t_n - t_0) \begin{bmatrix} A_{c,D}(x) \\ \hat{B}_{c,D}(x) \end{bmatrix} \\
&+ \sum_{i=1}^{i=m_f(x)} A_{p(i)}(x) E_{p(i)} \varepsilon_{p,rel(i)}(t_j) \begin{bmatrix} 1 \\ Z_{p(i)} \end{bmatrix} - \sum_{i=1}^{i=m_f(x)} A_{p(i)}(x) E_{p(i)} \frac{\Delta l_{p(i)}(t_j)}{l_{p,0(i)}} \begin{bmatrix} 1 \\ Z_{p(i)} \end{bmatrix} \Big) \quad (28)
\end{aligned}$$

5. IMPLEMENTACIÓN COMPUTACIONAL

Debido a la no linealidad que presentan las ecuaciones que gobiernan el problema en el análisis de este tipo de estructuras, para cada intervalo de tiempo, es necesario realizar un procedimiento iterativo. En el caso más general de vigas hiperestáticas este procedimiento iterativo incluye la ejecución de dos procedimientos (relacionados entre sí): el primero para la obtención de las reacciones hiperestáticas de pretensado y el segundo para la obtención de la fuerza de pretensado.

Para la obtención de las reacciones hiperestáticas se ha optado por un procedimiento basado en el método de falsa posición (*regula falsi*) [28]. Se parte de un instante de tiempo en el cual es conocido el estado tenso - deformacional de la estructura, en el instante siguiente los valores de las reacciones hiperestáticas se mantienen constantes, es decir, se inicia la iteración con los valores obtenidos en el instante previo y se calculan las deformaciones en los puntos de aplicación de las reacciones hiperestáticas. El sentido de la deformación resultante en los puntos de aplicación de las reacciones hiperestáticas va a ser de sentido contrario al del incremento de fuerza necesario para anular dicha deformación, en otras palabras, la primera iteración establece la dirección de búsqueda. Para el valor de la fuerza incrementada se obtiene un nuevo valor de deformación en los puntos de aplicación de las reacciones hiperestáticas, el que debe ser de signo contrario del primero para garantizar la existencia de la solución en dicho intervalo.

Para cada incremento de las fuerzas hiperestáticas debe obtenerse el incremento de tensión en el acero de pretensado, es decir, debe calcularse la elongación del cable. A los efectos de obtener el alargamiento del acero de pretensado, y por lo tanto la fuerza ejercida por este, la integración de las deformaciones unitarias y las curvaturas se realiza mediante una integración numérica. Para ello la viga se divide en un número discreto de secciones. Por otra parte, para cada sección, las propiedades geométricas dependen de la deformación unitaria y de la curvatura en dicha sección. Para efectuar el análisis seccional, la sección de la viga (viga-losa) se divide en un número discreto de capas. Mediante un procedi-

miento de análisis iterativo-incremental basado en los algoritmos de Newton-Raphson se resuelve la ecuación (28). Para cada capa se define una variable de estado que indica si la capa aún no se ha fisurado, si está fisurada o, si estuvo fisurada y ahora está comprimida, debe indicar en que instante de tiempo se ha comprimido. Como se ha mencionado, se considera que la capa está fisurada cuando la tensión en dicha capa supera la resistencia a tracción del hormigón de acuerdo con la ecuación (2). Si la capa se fisura en determinado instante, tanto la retracción como la historia de tensiones dejan de considerarse en los tiempos posteriores. Si la capa está fisurada pero se comprime en determinado instante (ya que en estas condiciones el hormigón no es capaz de tomar tracciones) se considera la historia de tensiones a partir de dicho instante pero ya no se considera la retracción. Obtenidas las nuevas deformaciones unitarias y las curvaturas en todas las secciones se obtiene una nueva fuerza en los cables, nuevos valores de las deformaciones en los puntos de aplicación de las fuerzas hiperestáticas y por lo tanto nuevos valores de estas. En resumen, es necesaria la aplicación de un algoritmo de bucles anidados hasta la convergencia del problema.

6. BREVE DESCRIPCIÓN DE LAS PÉRDIDAS INSTANTÁNEAS

Las pérdidas instantáneas de la fuerza de pretensado son aquellas pueden ocurrir durante el tesado de las armaduras activas y durante el proceso de anclaje de las mismas. Salvo casos especiales donde pueden producirse otros tipos de pérdidas instantáneas, la pérdida instantánea total de la fuerza de pretensado en cada sección de la pieza se compone de: a) la pérdida por rozamiento a lo largo de la vaina o conducto; b) la pérdida por penetración de las cuñas y; c) las pérdidas por acortamiento elástico del hormigón [19].

En los ejemplos de validación de la formulación propuesta se utiliza el concepto de tensión efectiva de pretensado, es decir, el valor de la fuerza de pretensado luego de producidas las pérdidas instantáneas [11, 16, 20, 21]. Por otra parte, la formulación propuesta está basada en la hipótesis de perfecta no adherencia para el acero de pretensado [11]. En este sentido en los ejemplos de validación se realizará una estimación de la pérdida debida al rozamiento a lo largo del conducto utilizando para ello los parámetros de cálculo dados por los fabricantes y se mostrará que para los casos analizados es razonable utilizar la hipótesis de perfecta no adherencia.

7. VALIDACIÓN

La expresión de la función de fluencia de acuerdo con la ecuación (4) es la comúnmente utilizada en la bibliografía técnica en la descripción del comportamiento visco-elástico del hormigón [17]. En este sentido la formulación propuesta (ecuación (28)) no depende de la normativa utilizada para la estimación de los parámetros de cálculo.

En el presente trabajo se han utilizado las formulaciones del CEB-FIP [19] para la estimación de los valores del coefi-

ciente de fluencia y de la retracción. La ecuación de la función de fluencia dada por el CEB-FIP [19] difiere ligeramente de la ecuación (4); su expresión viene dado por la ecuación (29):

$$J(t, \tau) = \frac{1}{E_c(\tau)} + \frac{\varphi(t, \tau)}{E_c(28)} \quad (29)$$

donde $E_c(28)$ el módulo de elasticidad del hormigón a los 28 días de edad y $\varphi(t, \tau)$ el coeficiente de fluencia calculado de acuerdo a dicha formulación. La ecuación (29) puede reescribirse de acuerdo con la ecuación (30):

$$J(t, \tau) = \frac{1}{E_c(\tau)} \left(1 + \frac{E_c(\tau)}{E_c(28)} \varphi(t, \tau) \right) = \frac{1 + \varphi(t, \tau)}{E_c(\tau)} \quad (30)$$

7.1. Ejemplo 1

La figura 3 muestra la sección transversal de las vigas I ensayadas por Breckenridge y Bugg en el U.S. Civil Engineering Naval Laboratory en el año 1964 [29]. Las vigas simplemente apoyadas y de longitud de vano 12192 mm fueron curadas durante ocho días y luego pretensadas. Seis de ellas fueron postensadas con dos barras no adherentes de alta resistencia del sistema Stressteel. Cada barra de pretensado tenía un diámetro de 28.5 mm ($A_p=641.29 \text{ mm}^2$), una resistencia a tracción nominal de 1007 MPa, un módulo de elasticidad de 200 GPa y la tensión efectiva de pretensado luego del anclaje de las barras fue de 683.23 MPa. El área bruta de la sección de la viga fue de $A_c=11.645 \times 10^4 \text{ mm}^2$ y el momento de inercia de $I_c=51.476 \times 10^8 \text{ mm}^4$. El trazado de las barras de pretensado está dado por las ecuaciones (31) y (32). La figura 4 muestra el trazado de manera esquemática. El acero pasivo consistió en ocho barras de 9.50 mm de diámetro ($A_s=70.79 \text{ mm}^2$), tensión de fluencia 335 MPa y módulo de elasticidad 168.9 MPa. Se utilizó cemento de resistencia normal y la resistencia característica del hormigón fue de 36.27 MPa.

Cada par de vigas fue sometido cargas de diferente magnitud y mantenida constante por un periodo de tiempo de aproximadamente 6.5 años. Durante ese tiempo la temperatura promedio fue de 15.6°C y la humedad relativa promedio de 72.8%. El primer par de vigas fue sometido a su peso propio, el segundo par a su peso propio y a una sobrecarga de diseño, y el tercer par a su peso propio y a 1.5 veces la sobrecarga de diseño, denominemos casos N°1, N°2 y N°3, respectivamente. La sobrecarga de diseño consistió en dos cargas concentradas de 67613 N aplicadas a un cuarto de la longitud de vano desde cada extremo y aplicada a los 22 días luego de vertido el hormigón.

$$d_{p(1)}(x) = -3.5334 \times 10^{-5} x^2 + 20.4605 \times 10^{-2} x + 192.79 \text{ para } 0 \leq x < 2895.6 \text{ mm} \quad (31)$$

$$d_{p(1)}(x) = 488.95 \text{ para } 2895.6 \leq x < 9296.4 \text{ mm}$$

$$d_{p(1)}(x) = -3.5334 \times 10^{-5} x^2 + 65.7029 \times 10^{-2} x + 2564.89 \text{ para } 9296.4 \leq x < 12192 \text{ mm}$$

$$d_{p(2)}(x) = -1.6119 \times 10^{-5} x^2 + 9.3341 \times 10^{-2} x + 417.32 \text{ para } 0 \leq x < 2895.6 \text{ mm}$$

$$d_{p(2)}(x) = 522.45 \text{ para } 2895.6 \leq x < 9206.4 \text{ mm}$$

$$d_{p(2)}(x) = -1.6119 \times 10^{-5} x^2 + 29.9698 \times 10^{-2} x - 840.49 \text{ para } 9296.4 \leq x < 12192 \text{ mm} \quad (32)$$

Los parámetros del hormigón se calcularon de acuerdo con el CEB-FIB [19], teniendo en cuenta las correcciones debidas a temperatura. Los módulos de elasticidad del hormigón a los 8 días y a los 22 días son $E_c(8)=26.44 \text{ GPa}$ y $E_c(22)=29.31 \text{ GPa}$, respectivamente. Los coeficientes de fluencia son $\varphi(22, 8)=0.913$, $\varphi(2373, 8)=1.915$ y $\varphi(2373, 22)=1.564$, la retracción es $\varepsilon_{sh}(2373, 8)=-385.84 \times 10^{-6}$ y $\varepsilon_{sh}(2373, 8)=-72.97 \times 10^{-6}$. Las pérdidas de tensión del acero de pretensado debida a relajación entre los 8 días y los 2373 días y entre los 8 días y los 22 días son de $\sigma_{pr}(2365)=28.5 \text{ MPa}$ and $\Delta\sigma_{pr}(14)=12.9 \text{ MPa}$, respectivamente. La tabla 1 muestra, para cada uno de los casos, la comparación de los valores de la pérdida de pretensado medida y la pronosticada, mientras que la tabla 2 muestra el comparativo de los valores de deformación máxima. Se observan diferencias poco significativas. En la figura 5 se muestra la tensión en el hormigón en la sección central de la viga a los 8, 22 y 2373 días para el caso N°3.

TABLA 1. Comparativo de los valores de la pérdida de pretensado entre lo medido y lo pronosticado. Pérdida de pretensado a 2373 días en [MPa]

Caso N°	Medido	Modelo computacional	Error relativo [%]
1	150.3	154.9	6.1
2	94.9	98.2	3.5
3	34.2	43.5	27.2

TABLA 2. Comparativo de los valores de deformación en el centro del vano (flecha). Deformación a 2373 días en [mm] (*)

Caso N°	Medido	Modelo computacional	Error relativo [%]
1	-30.1	-30.4	1.0
2	35.6	26.9	24.4
3	87.6	71.7	18.2

(*) Valores positivos hacia abajo.

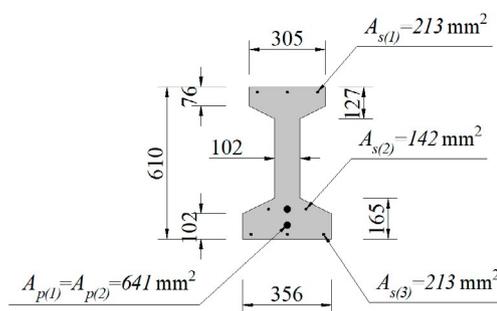


Figura 3. Sección de las vigas ensayadas por Breckenridge y Bugg [29].

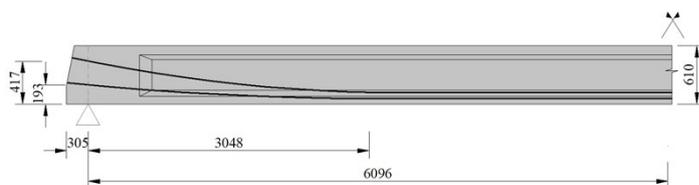


Figura 4. Esquema del trazado de las barras de pretensado en las vigas ensayadas por Breckenridge y Bugg [29].

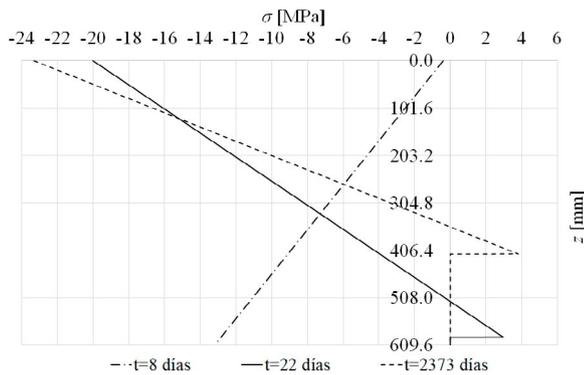


Figura 5. Evolución de la tensión en el hormigón en la sección central de la viga para el caso N°3.

La comparación entre los resultados obtenidos de la pérdida de pretensado entre el modelo computacional y los resultados experimentales, permite concluir que el modelo propuesto reproduce satisfactoriamente el comportamiento de viga con pretensado no adherente a lo largo del tiempo, la validez estadística de esta afirmación se presenta en el apéndice. Si bien algunas diferencias algo significativas se observan con respecto a la pérdida de pretensado para el caso N°3, es oportuno mencionar que las tensiones en el hormigón superan el límite para considerar un comportamiento lineal de la fluencia y por lo tanto válidas las hipótesis de linealidad, lo que puede estar dando lugar a tales diferencias.

Si asumimos que el coeficiente de rozamiento en curva es $\mu=0.06$ y que la relación entre el coeficiente de rozamiento parásito y el coeficiente de rozamiento en curva es $K/\mu=0.010$ (del lado de la seguridad), el valor de la pérdida por rozamiento entre el anclaje activo y la sección central de la viga es del orden de 10980 N, que representa una pérdida del 1.25 % (2.50% entre las secciones extremas). El valor de la pérdida por rozamiento es relativamente pequeño, por lo que es razonable utilizar la hipótesis de no adherencia perfecta al modelar este tipo de elementos pretensados.

7.2. Ejemplo 2

Supongamos a modo de ejemplo que a la viga con pretensado interior no adherente del ejemplo anterior, bajo las mismas condiciones de fabricación y de exposición ambiental se le hormigona una losa a los 35 días. Consideremos que la dimensión de la losa es de 1000 mm \times 200 mm y que su resistencia característica es de 25 MPa. Supongamos además que una carga permanente uniformemente distribuida de 11.1 kN/m a los 35 días. Esta carga incluye el peso propio de la losa y cualquier otra carga muerta. Se pretende calcular la pérdida de pretensado.

Los parámetros del hormigón han sido calculados de acuerdo al CEB-FIP [19]. El módulo de elasticidad del hormigón de la viga a los 35 días es $E_{c,G}(35)=30.28$ GPa. Los coeficientes de fluencia de la viga son $\phi_G(35,8)=1.039$, $\phi_G(10000,35)=1.606$ y $\phi_G(10000,8)=2.119$, la retracción es $\epsilon_{sh,G}(10000,8)=-401.41 \times 10^{-6}$ y $\epsilon_{sh,G}(35,8)=-101.74 \times 10^{-6}$. El módulo de elasticidad de la losa a los 3 días de edad es $E_{c,D}(3)=19.96$ GPa. El coeficiente de fluencia de la losa es $\phi_D(9965,3)=3.288$, y la retracción de la losa es $\epsilon_{sh,D}(9965,3)=-445.00 \times 10^{-6}$.

La pérdida de pretensado calculada mediante la formulación propuesta a 10000 días es de 125.1 MPa (14.3 %). La

figura 6 muestra la evolución de la tensión en el hormigón en la sección central de la viga.

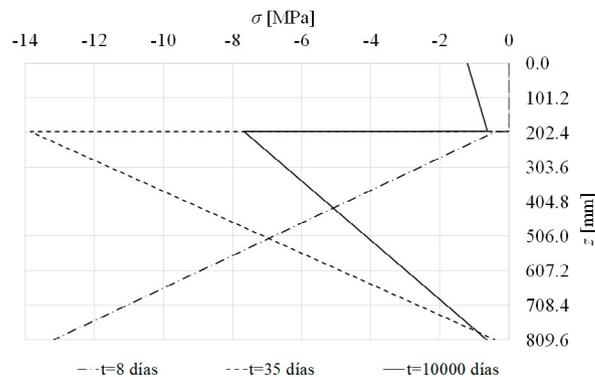


Figura 6. Evolución de la tensión en el hormigón en la construcción compuesta a diferentes edades.

Es importante observar a partir de este ejemplo que la construcción de la losa del tablero in situ, según el procedimiento descrito en este trabajo, tiene un efecto beneficioso en lo que respecta a la redistribución de las tensiones en el hormigón en zonas de momentos positivos y por lo tanto en la pérdida del pretensado.

7.3. Ejemplo 3

La viga utilizada en este ejemplo corresponde a la viga YLB2 tomada del trabajo de Lou *et al.* [16]. Se trata de una viga continua de dos vanos, pretensada con pretensado interior no adherente, cuya longitud de vano es 4800 mm. La sección de la viga es rectangular de dimensiones 150 mm \times 300 mm, el acero de pretensado consistente en un tendón no adherente de 140 mm² de sección, 197 GPa de módulo de elasticidad y 1941 MPa de resistencia máxima característica. La tensión de pretensado efectiva es de 1193 MPa y su trazado viene dado por la ecuación (33). El esquema de armado de la armadura pasiva está de acuerdo con la figura 7 siendo las secciones de dicho acero $A_{s1}=603.2$ mm², $A_{s2}=226.2$ mm² y $A_{s3}=508.9$ mm² y su módulo de elasticidad 200 GPa. El hormigón de la viga es de resistencia característica 33 MPa. La viga fue tesada a los 28 días de edad contra su peso propio. Dos estados de carga fueron analizados: la viga sometida a la acción del pretensado y su peso propio; y la viga sometida al pretensado, su peso propio y dos cargas puntuales Q de 30 kN aplicadas a los tercios en cada vano, los que denominemos casos N°1 y N°2 respectivamente. Para ambos casos se estudiaron las deformaciones a la edad de pretensado y a 600 días.

Dado que el autor no dispuso de los datos de temperatura y de la humedad relativa bajo las cuales fueron realizadas las mediciones, se han considerado aquí 20°C y 50%, respectivamente, como valores razonables.

Los valores del coeficiente de fluencia y de la retracción han sido calculados de acuerdo a los lineamientos del CEB-FIP [19], siendo $\phi(600,28)=1.885$ y es $\epsilon_{sh}(600,28)=-350.66 \times 10^{-6}$.

$$d_p(x) = -2.5297 \cdot 10^{-5} x^2 + 0.1006 x + 150 \text{ for } 0 \leq x < 1988 \text{ mm}$$

$$d_p(x) = -3.0518 \cdot 10^{-5} x^2 + 0.1214 x + 129.3 \text{ for } 1988 \leq x < 4320 \text{ mm}$$

$$d_p(x) = 1.4817 \cdot 10^{-5} x^2 - 1.4225 x + 3463.9 \text{ for } 4320 \leq x \leq 4800 \text{ mm}$$

(33)

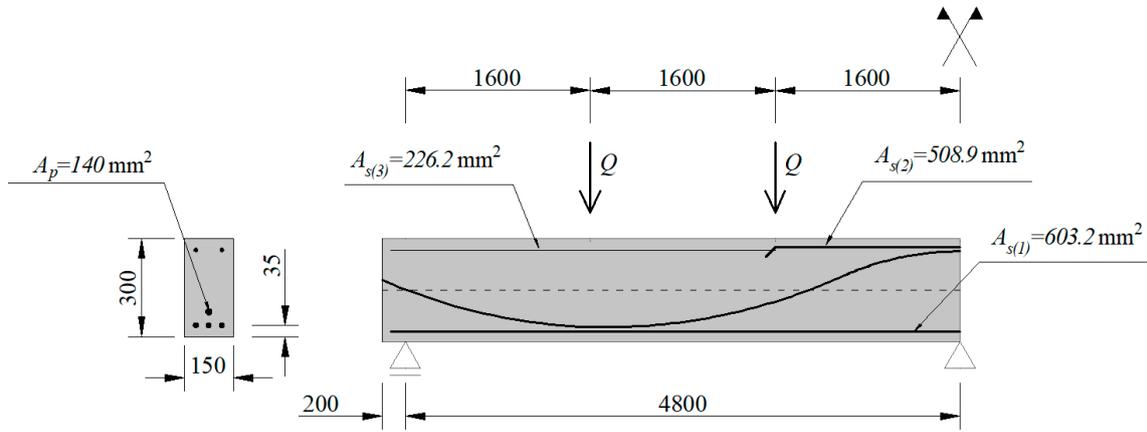


Figura 7. Viga YLB2 ensayada por Lou *et al.* [16].

La tabla 3 muestra la comparación entre los valores medidos y los calculados con el modelo computacional propuesto de la deformación máxima en el vano a los 28 y a los 600 días; mientras que la figura 8 muestra la gráfica de la deformación vertical para ambos casos y para ambos instantes de tiempo. La gráfica de la figura 9 muestra los diagramas de momentos flectores.

El valor de la pérdida de pretensado calculado para el caso N°1 es de 106.1 MPa, mientras que para el caso N°2 es de 51.4 MPa, que representan una pérdida del 8.9% y del 4.3%, respectivamente.

TABLA 3. Deformación en el centro del vano (flecha) en milímetros.

Caso N°	Medido		Modelo computacional		Error relativo [%]	
	t= 28 días	t= 600 días	t= 28 días	t= 600 días	t= 28 días	t= 600 días
1	-1.8	-3.5	-1.8	-2.9	0.0	17.1
2	2.0	8.2	2.5	7.2	25.0	12.2

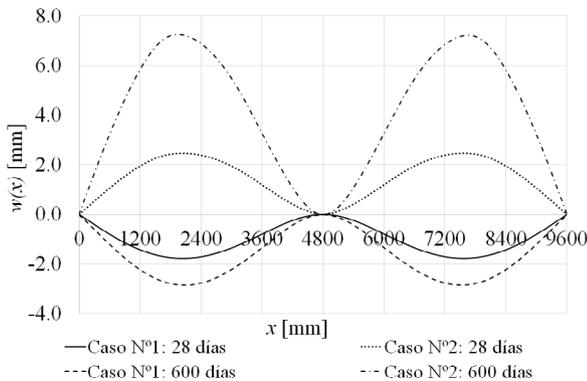


Figura 8. Deformación vertical $w(x)$.

Con respecto a la reacción en el apoyo central, para el caso N°1 se produce un aumento de esta de 4633 N a 6061 N (hacia arriba) que es del orden del 31%, mientras que en el caso N°2 la reacción cuyo valor es de 84318 N luego de aplicada la carga Q , tiene un aumento del orden del 2%. Con respecto al mo-

mento flector, mientras que los momentos máximos en el vano se mantuvieron aproximadamente constantes, los momentos sobre el apoyo tuvieron una variación del 17% y del 37% para el caso N°1 y N°2, respectivamente.

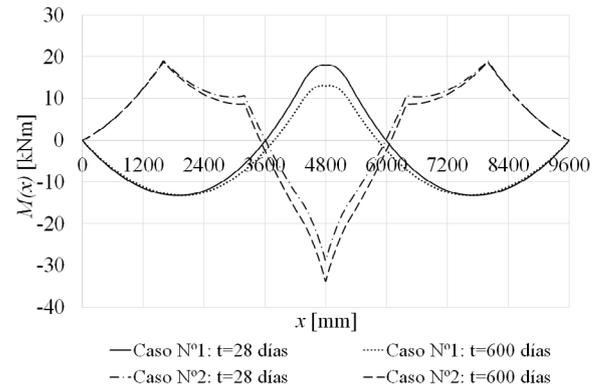


Figura 9. Diagrama de momentos flectores.

Nuevamente podemos decir que el modelo computacional propuesto reproduce satisfactoriamente el comportamiento de viga con pretensado no adherente a lo largo del tiempo.

Si asumimos que la penetración de la cuña es de 5 mm (ya que este dato no es suministrado por los autores), que el coeficiente de rozamiento en curva es 0.06 y que el coeficiente de rozamiento parásito es de $5.24 \times 10^{-4} \text{ m}^{-1}$ (valores recomendados por los diferentes fabricantes), el valor de la pérdida por rozamiento entre las secciones extremas de la viga es del orden de 5812.5 N, que representa una pérdida del 3.48%.

7.4. Ejemplo 4

Supongamos a modo de ejemplo que a la viga continua con pretensado interior no adherente ensayada por Lou *et al.* [16] se le hormigona una losa a los 60 días formando así una sección compuesta. Consideremos que la losa tiene dimensiones de 1000 mm \times 50 mm, que las condiciones de exposición ambiental y de fabricación se mantienen iguales, que la resistencia característica a compresión de la losa es igual a la de la viga y que en la losa es colocada una armadura pasiva cuya sección

es de $A_{s4}=140 \text{ mm}^2$ ubicada en la mitad de su espesor. Suponemos además que a los 90 días de edad es aplicada una carga muerta uniformemente distribuida de 3.5 kN/m .

Los parámetros del hormigón han sido calculados de acuerdo al CEB-FIP [19]. El módulo de elasticidad del hormigón de la viga a los 28 días es $E_{c,G}(28)=29.32 \text{ GPa}$. Los coeficientes de fluencia de la viga son $\varphi_G(60,28)=0.999$, $\varphi_G(90,28)=1.197$ y $\varphi_G(10000,28)=2.441$, los valores de la retracción son $\varepsilon_{sh,G}(60,28)=-89.09 \times 10^{-6}$, $\varepsilon_{sh,G}(90,28)=-138.31 \times 10^{-6}$ y $\varepsilon_{sh,G}(10000,28)=-456.11 \times 10^{-6}$. El módulo de elasticidad de la losa a los 3 días de edad es $E_{c,D}(3)=22.67 \text{ GPa}$. Los coeficientes de fluencia de la losa son $\varphi_D(30,3)=2.366$, $\varphi_D(9940,3)=4.165$ y los valores de retracción son $\varepsilon_{sh,D}(30,3)=-303.14 \times 10^{-6}$ y $\varepsilon_{sh,D}(9940,3)=-597.09 \times 10^{-6}$.

Las gráficas de las figuras 10 y 11 muestran al evolución de las tensiones en las secciones ubicadas en $x=2.76 \text{ m}$ y en $x=4.80 \text{ m}$. La primera sección corresponde a la sección donde se produce el momento flector máximo en el vano a los 10000 días de edad y la segunda está ubicada sobre el apoyo intermedio. Las gráficas de las figuras 12 y 13 muestran la deformación vertical y los diagramas de momentos flectores. La pérdida estimada de pretensado a los 10000 días es de 125.7 MPa (10.5%).

Para la sección del vano se puede observar el efecto beneficioso de la redistribución de las tensiones entre la viga y la losa, aliviando las tensiones sobre ésta. En el caso de la sección sobre el apoyo, las tensiones generadas en la losa producen su fisuración a edades tempranas, y si bien se produce redistribución en las tensiones y variación en los momentos flectores a lo largo de la viga, la fibra superior de la viga se mantiene algo traccionada sin que se produzca fisuración, mientras que la losa continúa completamente fisurada. Es importante remarcar que luego de producida la fisuración es necesario que la fibra de hormigón de la sección se comprima para continuar llevando tensiones.

Con respecto a la reacción en el apoyo central, a partir de los 90 días se produce una disminución de la misma del orden del 8.3%, pasando de 38480 N a los 90 días a 35516 N a los 10000 días.

7.5. Ejemplo 5

Consideremos la losa unidireccional de tres vanos que se muestra de manera esquemática en la figura 14. Los datos han sido extraídos de la referencia [30]. El espesor de la losa es 250 mm , la longitud de los vanos extremos es $L_1=8000 \text{ mm}$ y la longitud del vano interior es $L_2=10000 \text{ mm}$. La losa es postensada con tendones no adherentes de 98.7 mm^2 de sección colocados cada 250 mm ($A_p=394.8 \text{ mm}^2/\text{m}$). La tensión de tendado es 1024.1 MPa , su resistencia máxima característica es 1862 MPa y su módulo de elasticidad es 196.5 GPa . El trazado de los tendones es parabólico y ha sido obtenido de acuerdo a balancear el peso propio de la losa [31]. Las excentricidades del tendón son $e_1=75 \text{ mm}$ a $0.4L_1$ desde el apoyo exterior, $e_2=95 \text{ mm}$ sobre los apoyos interiores y $e_3=95 \text{ mm}$ en el centro del vano interior. La sección de armadura pasiva inferior y superior es $A_s=513 \text{ mm}^2/\text{m}$ colocada con un recubrimiento mecánico de 30 mm , su módulo de elasticidad es de 200 GPa . La resistencia característica del hormigón es de 35 MPa .

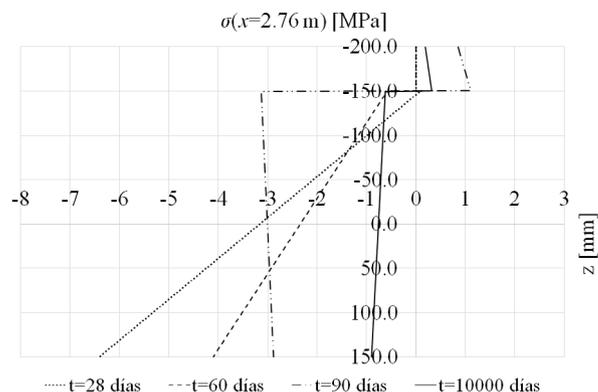


Figura 10. Evolución de las tensiones en la sección ubicada en $x=2.76 \text{ m}$.

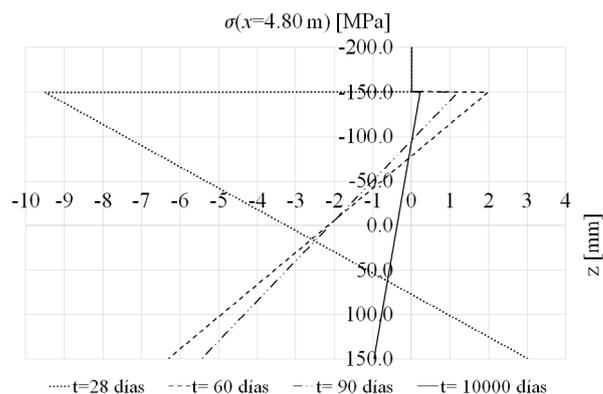


Figura 11. Evolución de las tensiones en la sección sobre el apoyo, $x=4.80 \text{ m}$.

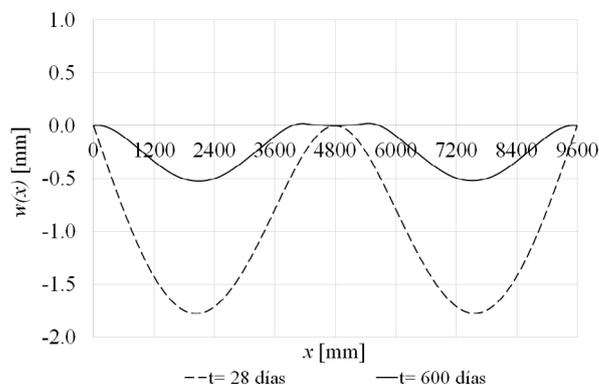


Figura 12. Deformación vertical $w(x)$.

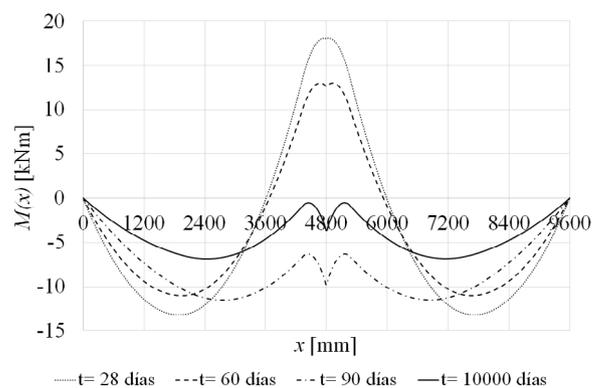


Figura 13. Diagrama de momentos flectores.

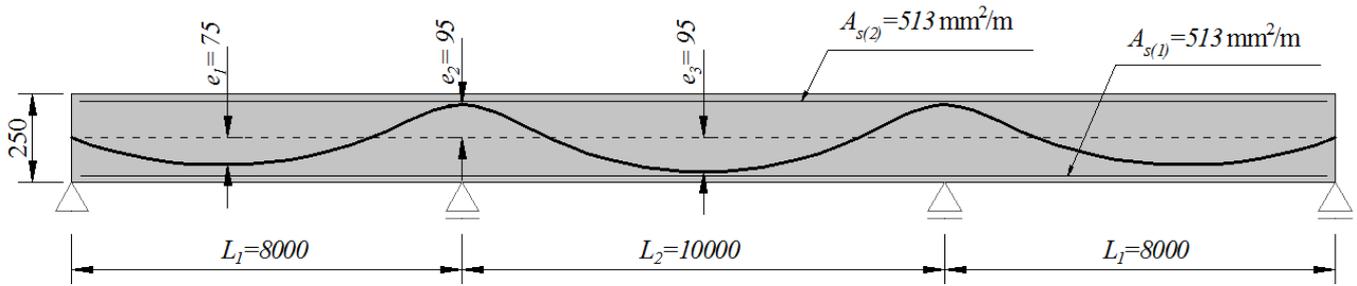


Figura 14. Losa unidireccional de tres vanos.

Dado que el autor [30] no realiza un estudio a largo plazo se asume para el ejemplo una temperatura de 20°C, humedad relativa 70%, inicio de la retracción $t_s=7$ días y la edad de tensado $t_0=28$ días. Los valores del coeficiente de fluencia y de la retracción han sido calculados de acuerdo a las formulaciones del CEB-FIP [19], siendo $E_c(28)=29.89$ GPa, $\phi(10000, 28)=1.742$ y es $\epsilon_{sh}(10000, 28)=-354.31 \times 10^{-6}$.

En el primer caso de estudio se asume que la única carga de largo plazo corresponde al peso propio de la losa. En el segundo caso se asume que al peso propio se le adiciona una carga muerta q_{DL} de valor 4.50 kN/m². Esta carga muerta es agregada en t_0 inmediatamente luego del tensado.

Las gráficas de las figuras 15 y 16 muestran la deformación vertical y el momento flector para la losa sometida a su peso propio y las gráficas de las figuras 17 y 18 muestran los mismos parámetros para el caso de la losa sometida a su peso propio y a la carga muerta q_{DL} .

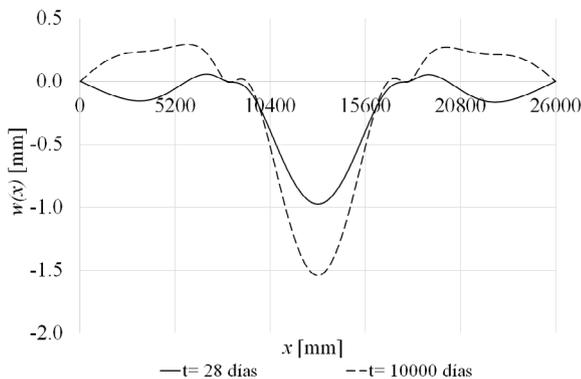


Figura 15. Deformación vertical de la losa unidireccional sometida a su peso propio.

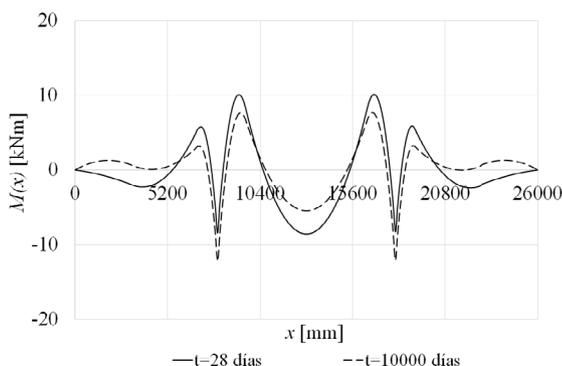


Figura 16. Momento flector de la losa unidireccional sometida a su peso propio.

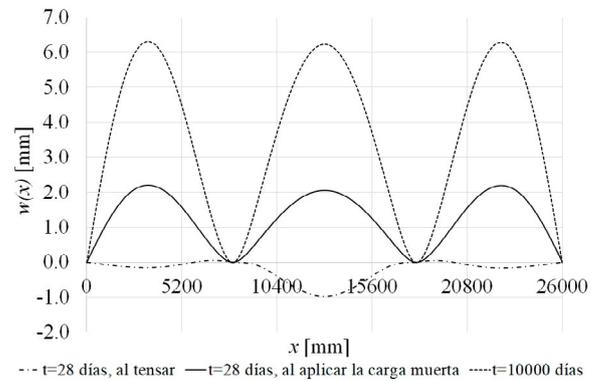


Figura 17. Deformación vertical de la losa unidireccional sometida a su peso propio y a la carga muerta.

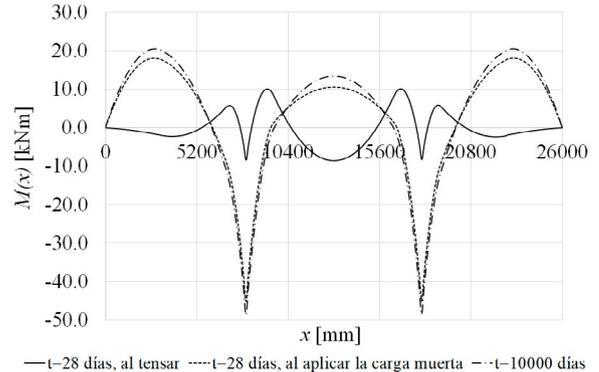


Figura 18. Momento flector de la losa unidireccional sometida a su peso propio y a la carga muerta.

La pérdida de pretensado a los 10000 días para la losa sometida a su peso propio es de 92.2 MPa que corresponde a una pérdida de pretensado del orden del 9.0%. Para este caso de carga, el momento flector negativo máximo aumenta con el tiempo, siendo del orden del 45% superior al momento correspondiente a los 28 días, tanto el momento positivo máximo como el momento negativo máximo del vano interior disminuyen, siendo esta disminución del orden del 32% y del 57%, respectivamente.

Para el caso de la losa sometida a su peso propio y a la carga muerta q_{DL} , la pérdida de pretensado a los 10000 días es de 81.1 MPa que corresponde a una pérdida del 7.9%. Los valores de los momentos flectores máximo en los vanos extremos,

los momentos sobre los apoyos intermedios y el momento máximo en el vano central aumentaron a lo largo del tiempo, dicho aumento es del orden del 13%, 8% y 27%, respectivamente. Es importante hacer notar que para ambos casos de carga los valores de las reacciones se mantuvieron aproximadamente constantes a lo largo del tiempo.

Con relación a las deformaciones máximas, mientras que para el caso de la viga sometida a su peso propio las deformaciones verticales máximas a largo plazo son el orden de una vez y media la deformación vertical instantánea, para el segundo caso de estudio las deformaciones verticales máximas a largo plazo son del orden de tres veces la deformación instantánea.

Si asumimos los mismos valores para la penetración de las cuñas, para el coeficiente de rozamiento en curva y para el coeficiente de rozamiento parásito que en el [ejemplo N°3](#), el valor de la pérdida por rozamiento entre los puntos de anclaje del acero de pretensado es del orden de 11 825.2 N, que representa una pérdida del 2.92%.

8. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha desarrollado una formulación para el análisis de vigas compuestas de hormigón pretensado con pretensado interior no adherente en estado de servicio. Esta formulación contempla tanto el análisis en el corto como en el largo plazo, el estado no fisurado y fisurado del miembro, la fluencia y la retracción del hormigón, la relajación del acero de pretensado y la presencia de armadura pasiva. Adicionalmente, el trazado de la armadura de pretensado puede ser genérico. A partir de dicha formulación se ha propuesto un algoritmo computacional para el análisis de este tipo de vigas sin utilizar el método de elementos finitos. Dicha implementación computacional permite el análisis tanto de vigas estáticamente determinadas como el de vigas continuas.

Una de las principales ventajas del algoritmo computacional propuesto es que se basa en los principios básicos de la resistencia de los materiales. Es por ello que además de poder aplicarse en el diseño y el cálculo de las estructuras, puede utilizarse como una herramienta de verificación para formulaciones matemáticas más complejas.

La comparación entre los resultados obtenidos de la pérdida de pretensado entre el modelo computacional y los resultados experimentales, permite concluir que el modelo propuesto reproduce satisfactoriamente el comportamiento de viga con pretensado no adherente en estado de servicio a lo largo del tiempo tanto para vigas estáticamente determinadas como para vigas continuas. Si bien algunas diferencias fueron observadas para uno de los casos comparados, es oportuno mencionar que para dicho caso las tensiones en el hormigón superan el límite para considerar un comportamiento lineal de la fluencia y por lo tanto válidas las hipótesis de linealidad, lo que puede estar dando lugar a tales diferencias.

Podemos concluir además que la construcción de la losa del tablero en sitio, según el procedimiento descrito en este trabajo, tiene un efecto beneficioso en lo que respecta a la

distribución de las tensiones en el hormigón en zonas de momentos positivos y por lo tanto en la pérdida del pretensado.

Referencias

- [1] Wang, Y.L. (1967) Método directo para calcular secciones compuestas, en hormigón pretensado, *Hormigón y Acero*, 18(85), 7-21. Recuperado de <http://www.hormigonyacero.com/index.php/ache/article/view/1510>
- [2] Dilger, W.H. (1982). Creep analysis of prestressed concrete structures using creep-transformed section properties. *PCI Journal*, 98-118.
- [3] Martínez Calzón, J. (1991) Puentes compuestos, continuos, con pretensado exento. Puentes sobre el río Turia, en Valencia, *Hormigón y Acero*, 179 (1991) 81-88. Recuperado de <http://www.hormigonyacero.com/index.php/ache/article/view/726>
- [4] Mari Bernat, A. (1995). Análisis de puentes continuos de hormigón de luces medias de sección evolutiva. *Rev. Cemento-Hormigón, IECA*, 866-90.
- [5] Mari Bernat, A., López, I.V. & Fragnet, J.M. (1996). Evaluación de flecha y estados tensodeformacionales en servicio, en puentes isostáticos de vigas prefabricadas de hormigón pretensado, *Hormigón y Acero*, 47(202) 25-58. Recuperado de <http://www.hormigonyacero.com/index.php/ache/article/view/478>
- [6] Hué, F., Ontañón, G. (1998). Puente sobre el río Guadalete de tablero de vigas pretensadas prefabricadas de hormigón de alta resistencia. *Hormigón y Acero*, (49)207, 67-81. Recuperado de <http://www.hormigonyacero.com/index.php/ache/article/view/438>
- [7] Sánchez Pérez, M., Pérez Caldentey, A. & Corres Peiretti, H. (2004) Comportamiento en rotura y en servicio de puentes de vigas prefabricadas in situ con continuidad de negativos. *Hormigón y Acero*, 55(233), 7-22. Recuperado de <http://www.hormigonyacero.com/index.php/ache/article/view/182>
- [8] Rivas, I.E., Perez, G.A. & Barlek, J.R. (2005). Análisis numérico y experimental de vigas compuestas para puentes bajo cargas repetitivas, *Hormigón y Acero*, 236 (2005) 57-60. Recuperado de <http://www.hormigonyacero.com/index.php/ache/article/view/158>
- [9] de la Fuente, A. & Aguado, C. (2008) Modelo numérico para el análisis no lineal de secciones prefabricadas construidas evolutivamente. *Hormigón y Acero*, 59(247), 69-87. Recuperado de <http://www.hormigonyacero.com/index.php/ache/article/view/86>
- [10] Comité Euro-International du Béton (CEB) (2010). *Structural concrete textbook on behaviour, design and performance*, vol. 2. CEB-FIP Bulletin no. 52, Lausanne, Switzerland.
- [11] Gauvreau, D.P. (1993) *Ultimate limit state of concrete girders prestressed with unbonded tendons*, Basel: Birkhauser Verlag.
- [12] Guo, T., Chen, Z., Lu, S. & Yao, R. (2018). Monitoring and analysis of long-term prestress losses in post-tensioned concrete beams, *Measurement*, 122, 573-581.
- [13] Paez, P.M. & Sensale, B. (2018). Improved prediction of prestress loss in unbonded prestressed concrete members. *Engineering Structures*. 174, 111-125.
- [14] Moon, J. & Burns, N.H. (1997). Flexural behavior of members with unbonded tendons I: theory. *Journal of the Structural Engineering*. 123, 1087-94.
- [15] Barbieri, R.A., Simoes Lopes Gastal, F. & Campos Filho, A. (2006). Numerical model for the analysis of unbonded prestressed members. *Journal of the Structural Engineering*. 132, 34-42.
- [16] Lou, T., Lopes, S. & Lopes, A.V. (2013). Nonlinear and time-dependent analysis of continuous unbonded prestressed concrete beams. *Computers and Structures*. 119, 166-76.
- [17] Bazant, Z.P. (1982). Mathematical models for creep and shrinkage of concrete. In Bazant, Z.P. and Wittmann, F.H. (eds.), *Creep and Shrinkage in Concrete Structures*, 163-256. London: Wiley.
- [18] Branson, D.E. & Trost, H. (1982) Unified procedures for predicting the deflection and centroidal axis location of partially cracked non-prestressed and prestressed concrete members. *ACI Journal* 79, 119-30.
- [19] Comité Euro-International du Béton (CEB). (2012) *Model Code 2010*, vol. 1. CEB-FIP Bulletin no. 65, Lausanne, Switzerland.
- [20] McHenry, D.A. (1943). A new aspect of creep in concrete and its application to design, *ASTM Proc.*, 43.

- [21] Ross, A.D. (1958). Creep of concrete under variable stress. *Journal of the American Concrete Institute*. 54, 739-58.
- [22] Galhi, A., Favre, R. & Eldbadry, M. (2002). *Concrete structures: stresses and deformation*. Third ed., New York: Spon Press.
- [23] Comité Euro-International du Béton (CEB). (1985). Design manual on cracking and deformations. Lausanne, Switzerland.
- [24] Torres, L.I., López-Almanza F. & Bozzo, L.M. (2004) Tension-stiffening model for cracked flexural concrete members. *Journal of Structural Engineering*. 130, 1242-251.
- [25] Gilbert, R.I. & Ranzi, G. (2011). Time-dependent behavior of concrete structures. New York: Spon Press.
- [26] Menn, C. (1990). *Prestressed concrete bridges*. Basel: BirkhauserVerlag AG.
- [27] Calavera, J. (1999). *Proyecto y cálculo de estructuras de hormigón. Tomo 2*. España: Intemac Ed.
- [28] Hilderbrand, F.B. (1987). *Introduction to numerical analysis, second edition*. New York: Dover Publications, INC.
- [29] Breckenridge, R.A. & Bugg, S.L. (1964). Effect of long-time loads on prestressed concrete beams. *PCI Journal*. December 1964, 75-89.
- [30] Harajli, M.H. (2012). Tendon stress at ultimate in continuous unbonded post-tensioned members: proposed modification of ACI 318, Eq. (18-4) and (18-5). *ACI Structural Journal*. Technical paper 109-S17, 183-92.
- [31] Lin, T.Y. (1963). Load balancing method for design and analysis of prestressed concrete structures. *Journal of the American Concrete Institute*, June 1963, 719-42.
- [32] Ross, S. (2007). *Introducción a la Estadística*. Barcelona, España: Editorial Reverte.
- [33] Gatti, P.L. (2005). *Probability theory and mathematical statistic for engineers*. New York: Spon Press.
- [34] Shaprio, S.S. & Wilk, M.B. (1965). An analysis of variance test for normality (complete samples). *Biometrika*. 52, 591-611.

Apéndice A.

Validación estadística de la formulación propuesta.

A los efectos de validar estadísticamente la formulación propuesta podemos utilizar la prueba *T* de Student para muestras relacionadas, una muestra con los valores obtenidos por los ensayos disponibles en la bibliografía y la otra con los valores calculados por la formulación propuesta [32, 33].

Para los valores medidos y los calculados de la pérdida de pretensado presentados en la *tabla 1*, podemos hacer la hipótesis de que las medias de ambos conjuntos de datos relacionados no difieren significativamente (hipótesis nula). Para aceptar o rechazar esta hipótesis debemos realizar la prueba *T* de Student para dos muestras relacionadas.

Como esta metodología es válida para distribuciones normales, primero se debe realizar una prueba de normalidad de la muestra. A tales efectos se puede utilizar la prueba de Shapiro - Wilk [34]. Para estas muestras el valor calculado del estadístico *W* de Shapiro - Wilk es $W = 0.91$, el cual es mayor que el valor crítico del estadístico obtenido por según el tamaño de la muestra y para un nivel de significación mayor al 5%, $W_{crit} = 0.77$, por lo que se acepta la hipótesis nula. En otras palabras la hipótesis de normalidad no puede ser rechazada.

En la *tabla A1* se hallan tabulados los parámetros de la prueba *T* de Student. El valor del estadístico *T* es -3.1460 y el valor crítico del estadístico con un nivel de confianza mayor al 95% es $T_{crit} = 4.3027$. Por lo que se acepta la hipótesis nula.

TABLA A1.
Parámetros de cálculo de la prueba *T* de Student para los valores de la *tabla 1*.

	Medido	Calculado
Media	93.133	98,867
Varianza	3372.143	3102.823
Observaciones	3	3
Coefficiente de correlación de Pearson	0.9993	
Diferencia hipotética de las medias	0	
Grados de libertad	2	
Estadístico <i>T</i>	-3.1460	
$P(T^* \leq T)$ dos colas	0.0879	
Valor crítico de <i>T</i> (dos colas)	4.3027	

En conclusión, la media de las pérdidas obtenidas en los ensayos, no difieren significativamente de la media de las pérdidas calculadas por la formulación propuesta, lo cual valida la utilización de esta última.

De manera análoga, podemos estudiar la validez de la formulación propuesta para calcular las deformaciones diferidas. Para ello consideraremos los tres resultados de las deformaciones diferidas de la *tabla 2* y los dos de la *tabla 3* obtenidos para una edad del hormigón de 600 días. El estadístico *W* de Shapiro - Wilk es 0.836 y el valor crítico del estadístico es $W_{crit} = 0.762$ por lo que la hipótesis nula no puede ser rechazada. En la *tabla A2* se hallan tabulados los parámetros de la prueba *T* de Student. El valor del estadístico *T* es 1.5924 y el valor crítico del estadístico con un nivel de confianza mayor al 95% es $T_{crit} = 2.7764$. Por lo que se acepta la hipótesis nula.

TABLA A2.
Parámetros de cálculo de la prueba *T* de Student para los valores de la *tabla 2* y los valores a $t=600$ días de la *tabla 3*.

	Medido	Calculado
Media	19.56	14,5
Varianza	2003.413	1449.415
Observaciones	5	5
Coefficiente de correlación de Pearson	0.9983	
Diferencia hipotética de las medias	0	
Grados de libertad	4	
Estadístico <i>T</i>	1.5924	
$P(T^* \leq T)$ dos colas	0.1865	
Valor crítico de <i>T</i> (dos colas)	2.7764	

Nuevamente podemos concluir que la media de las flechas diferidas obtenidas en los ensayos, no difieren significativamente de la media de las flechas calculadas por la formulación propuesta.