

La sección abierta y cerrada bajo sollicitación excéntrica... en una viga curva. Un tributo a Javier Manterola

The open and closed cross-section under eccentric loading... on a curved beam. A tribute to Javier Manterola

Salvador Monleón, Carlos Lázaro* y Josep Casanova

Universitat Politècnica de València. Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras,
Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, Valencia, Spain

Recibido el 22 de diciembre de 2017; aceptado el 29 de junio de 2018

RESUMEN

En este artículo se desarrolla una formulación elástico-lineal exacta para el análisis de vigas curvas de directriz plana. El propósito es idéntico al de un artículo que Javier Manterola publicó en 1976: profundizar en el comportamiento de las piezas esbeltas cuando estas se ven sollicitadas excéntricamente por cargas transversales. Al incorporar la curvatura en la formulación, aparecen nuevos parámetros seccionales que condicionan el comportamiento de la pieza, cuya respuesta queda gobernada por la *esbeltez torsional*. A continuación se ha estudiado la relación de estos parámetros con la curvatura, y finalmente se ha evaluado la respuesta estructural de vigas de sección abierta y cerrada en función de la curvatura y de la *esbeltez torsional*. Este trabajo proporciona un método riguroso para evaluar la respuesta de las vigas curvas frente a la torsión, y constituye una extensión de los criterios tradicionalmente establecidos para vigas rectas.

© 2019 Asociación Española de Ingeniería Estructural (ACHE). Publicado por Cinter Divulgación Técnica S.L.L. Todos los derechos reservados.

PALABRAS CLAVE: Viga curva, acoplamiento flexión-torsión, esbeltez de torsión, torsión alabeada, torsión mixta

ABSTRACT

In this paper, an exact linear-elastic formulation for the analysis of curved beams with planar centerline has been developed. The purpose is identical to that of an article which Javier Manterola authored in 1976: to deepen in the behavior of beams when they are eccentrically loaded by transverse forces. When incorporating curvature in the formulation, new sectional parameters appear; they condition the structural behavior of the beam, which is governed by the *torsional slenderness*. The relation between these parameters and the curvature has been studied. Finally, the structural response of beams of open and closed cross-section has been evaluated in terms of curvature and torsional slenderness. This work provides a rigorous method to assess the response of curved beams under torsion and is therefore an extension of the traditionally established criteria for straight beams.

© 2019 Asociación Española de Ingeniería Estructural (ACHE). Published by Cinter Divulgación Técnica S.L.L. All rights reserved.

KEYWORDS: Curved beam, bending-torsion coupling, torsional slenderness, warped torsion, mixed torsion

1. INTRODUCCIÓN

En el año 1976 la A.F.C.E. (Agrupación de Fabricantes de Cemento de España) publicó el N°15 de su Serie Monográfica, dividido en tres volúmenes denominados Puentes I, II y III. En el segundo de ellos (Figura 1), Javier Manterola presentó un formidable artículo [1] que tituló *La sección abierta y cerrada bajo sollicitación excéntrica*, en el que mostró con maestría cómo

la resistencia de materiales y en particular la teoría de vigas rectas podía extenderse más allá del modelo elemental de viga de Navier-Bernoulli-Timoshenko –que en lo sucesivo denominaremos Modelo de Viga Simple, o más brevemente MVS– adoptando para ello una intensidad de alabeo independiente de la intensidad de la rotación torsional al analizar la torsión no uniforme de vigas cajón y computando los efectos globales de flexión, torsión y distorsión producidos, en servicio, por las car-

* Autor para correspondencia.
Correo electrónico: carlafer@mes.upv.es (C. Lázaro).

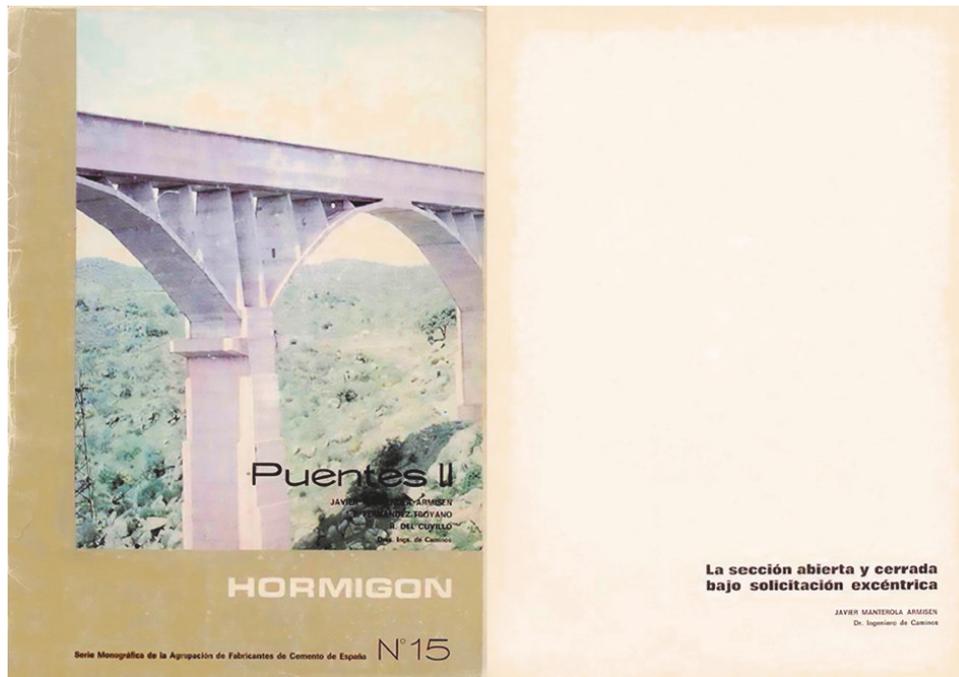


Figura 1. Portadas del N°15 —Puentes II— de la Serie Monográfica de la A.F.C.E. y del artículo de Javier Manterola.

gas excéntricas sobre este mismo tipo de tableros, así como su evolución hasta rotura, evaluada mediante ensayos. Este trabajo formaba parte de una iniciativa mucho más amplia de Javier Manterola, orientada a la divulgación de nuevos métodos de cálculo especialmente apropiados para el análisis de tableros de puentes [2, 3], con el fin de actualizar y mejorar la praxis estructural en la España de la década de 1970. En particular, en lo que al modelo viga se refiere, destacaban las publicaciones de Vlassov [4] y Kollbrunner y Basler [5], referencias clave en el artículo del que hemos partido.

Nuestra modesta contribución al reconocimiento colectivo del inmenso trabajo desarrollado por Javier Manterola Armisen, ingeniero y profesor a lo largo de más de 50 años, consistirá en extender el problema anterior a las vigas curvas, como un primer paso hacia su generalización a los tableros de planta curva.

El problema de las piezas de directriz curva ha preocupado a los ingenieros desde hace mucho tiempo. El primero del que se tiene noticias de que lo abordara fue Kirchhoff [6], a mediados del siglo XIX. Desarrolló un modelo de viga muy esbelta, sin limitación en los desplazamientos de la directriz, considerando la deformabilidad de la sección debida al efecto Poisson y al alabeo torsional. Es válido para secciones macizas o cerradas en las que el centro de gravedad y el centro de esfuerzos cortantes pueden suponerse coincidentes. Aproximadamente en la misma época, Winkler [7] planteó un modelo lineal de viga curva, que se convirtió en la base de la formulación de este problema incluida en los manuales clásicos, como Timoshenko [8] o Courbon [9], que se centran en el problema del arco.

En 1959 Anderson [10] investigó las tensiones en vigas curvas con sección en doble T y en cajón, y proporcionó tablas y fórmulas para determinarlas. Posteriormente, Samartín y González de Cangas [11] dedujeron las ecuaciones generales del comportamiento de vigas curvas en el espacio y las aplicaron al caso de la viga balcón. El estudio no considera el

alabeo torsional ni la posible excentricidad del centro de esfuerzos cortantes. El trabajo de Gimena *et al.* [12] sistematiza el planteamiento exacto del problema basándose en hipótesis similares (sin consideración del alabeo). Cabe mencionar también otros estudios analíticos más recientes relacionados con la torsión de vigas como Barretta *et al.* [13] y Romano *et al.* [14], que tratan de la distribución de tensiones debidas a la torsión en vigas rectas de sección arbitraria, y de la posición relativa de centros de torsión y de cortante, respectivamente.

En las últimas décadas, la investigación en vigas curvas se ha centrado en la resolución numérica del problema empleando modelos de elementos finitos, y específicamente en el tratamiento de la principal dificultad asociada: el bloqueo de cortante y de membrana [15-18]. En el ámbito de las vigas con grandes desplazamientos, Reissner [19] desarrolló una teoría no lineal sin considerar alabeo de la sección, que fue la base para la formulación de modelos de elementos finitos como los desarrollados por Simó, primero sin incorporar alabeo [20] y más adelante considerándolo [21].

Nuestra aportación consistirá en el desarrollo de las ecuaciones exactas de la formulación lineal del problema de la viga curva de directriz contenida en un plano, con sección abierta o cerrada, considerando tanto el alabeo torsional como la posible excentricidad del centro de esfuerzos cortantes. Esto amplía el ámbito de aplicación de las referencias clásicas [8,9] y también de la referencia [11], más reciente.

Para ello, comenzaremos por unas consideraciones generales sobre las piezas curvas, de carácter geométrico, acompañadas de algún resultado mecánico apropiado para nuestros desarrollos futuros. A continuación, en la sección 3, abordaremos la parte central del trabajo, que consiste en la formulación de la estática lineal de la viga curva sometida a cargas transversales, desarrollada en el marco de la teoría unificada de vigas (UBT por sus siglas en inglés) [22]. Esta formulación permite, sin abandonar el modelo viga, identificar las características mecá-

nicas de la sección que influyen en la respuesta, y definir la esbeltez torsional como parámetro que gobierna (junto con la curvatura) el reparto de la torsión entre la parte de Saint-Venant y la parte debida al alabeo. El problema estudiado no ha sido tratado en la citada referencia y constituye por tanto una aportación original. En la sección 4 estudiaremos en primer lugar la influencia de la curvatura en los parámetros asociados a la sección transversal en tres tipos de sección: rectangular hueca, doble T y U; a continuación se llevará a cabo un estudio paramétrico (basado en las expresiones obtenidas en la sección 3) de la influencia de la esbeltez torsional y la curvatura en la respuesta cinemática y estática de la viga, que muestra el potencial de la formulación presentada como herramienta para evaluar la respuesta de vigas curvas frente a torsión y profundizar en la comprensión del fenómeno. Finalmente, cerraremos el artículo con las conclusiones pertinentes y algunas sugerencias para desarrollos futuros. En la sección 6 se incluye una lista de los símbolos más relevantes.

2. CONSIDERACIONES GENERALES SOBRE LAS PIEZAS CURVAS: EL ARCO Y LA VIGA CURVA

En esta primera sección del artículo nos proponemos describir el marco geométrico en el que se desarrollará el análisis, justificar la elección de un sistema de referencia específico basado en considerar una curva particular –a la que llamaremos *eje principal*– como directriz de la pieza, mostrar los valores que adoptan ciertas propiedades geométricas en esta referencia y, finalmente, exponer en qué condiciones las respuestas de arco y de viga curva se presentan desacopladas. Para ello nos basaremos en el *MVS*, que determina el modelo más elemental de viga curva.

En primer lugar, conviene reflexionar sobre el problema de la elección del sistema de referencia y de la curva directriz $\Gamma(s)$ en el caso más elemental de las piezas alargadas de sección constante. La respuesta del sólido es independiente del sistema de referencia seleccionado para formular el problema, sin embargo, el modelo matemático que se genera sí que es tributario de esta elección. Esto introduce la posibilidad de escoger el sistema de referencia de tal forma que la resolución del modelo resulte más sencilla.

En lo sucesivo denotaremos por $\tilde{\Gamma}$ y denominaremos *directriz material* de la pieza al lugar geométrico de los centros de gravedad G de las secciones transversales, reservando el símbolo Γ y la denominación *directriz principal* para el lugar geométrico de los puntos ocupados por nuevo polo O , cuyas propiedades estableceremos más adelante. Ambas curvas quedan relacionadas por sus vectores posición $\tilde{\mathbf{P}}$ y \mathbf{P} mediante la fórmula $\mathbf{P} = \tilde{\mathbf{P}} + \tilde{y}_0 \tilde{\mathbf{n}} + \tilde{z}_0 \tilde{\mathbf{b}}$. En ella, $\tilde{\mathbf{n}}$ y $\tilde{\mathbf{b}}$ son los vectores normal y binormal del triedro intrínseco de la directriz material, mientras que \tilde{y}_0 y \tilde{z}_0 definen las coordenadas de la intersección de la directriz principal con una sección transversal genérica, referidas a la parametrización material del sólido, basada en la directriz $\tilde{\Gamma}$.

A continuación, vamos a interesarnos por el modelo más elemental de pieza alargada, formulándolo en la referencia basada en la directriz principal Γ . Según el *MVS*, sus desplazamientos generalizados son $\mathbf{u}(s) = \{u, v, w, \theta_s, \theta_y, \theta_z\}^T$ y no incluyen

el alabeo torsional. Las deformaciones generalizadas, de acuerdo con [22, fórmulas (3.1)], resultan

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_s &= \frac{du}{ds} - \chi v & \kappa_s &= \frac{d\theta_s}{ds} - \chi \theta_y \\ \gamma_{sy} &= \frac{dv}{ds} - \chi u - \theta_z & \kappa_y &= \frac{d\theta_y}{ds} + \chi \theta_s \\ \gamma_{sz} &= \frac{dw}{ds} + \theta_y & \kappa_z &= \frac{d\theta_z}{ds} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

donde $\chi(s)$ es la curvatura de la directriz $\Gamma(s)$.

Agrupando en el vector $\mathbf{e}(s) = \{\varepsilon_s, \gamma_{sy}, \gamma_{sz}, \kappa_s, \kappa_y, \kappa_z\}^T$ las deformaciones generalizadas, la densidad lineal de energía potencial del modelo puede escribirse como

$$F(s, \mathbf{u}, \mathbf{e}) = \frac{1}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{D}_{11} \mathbf{e} - \mathbf{u}^T \mathbf{Q} \quad (2)$$

donde $\mathbf{Q}(s) = \{q_s, q_y, q_z, m_s, m_y, m_z\}^T$ es el vector densidad lineal de carga generalizada consistente con los desplazamientos generalizados $\mathbf{u}(s)$ del *MVS*, y el operador constitutivo \mathbf{D}_{11} se calcula como sigue [22, fórmula (2.34)]

$$\mathbf{D}_{11} = \int_A \mathbf{B}_1^T \mathbf{C} \mathbf{B}_1 \mu dA = \int_A \mathbf{h}^T \mathbf{C} \mathbf{h} \frac{dA}{\mu} \quad (3)$$

El escalar $\mu = 1 - \chi y$ permite expresar el diferencial de volumen del sólido como $dV = \mu ds dy dz$; la matriz constitutiva \mathbf{C} y el operador cinemático $\mathbf{h}(y, z)$ están definidos en [22, fórmulas (2.20) y (2.85)]. De todo ello resulta, en nuestro caso

$$\mathbf{D}_{11} = \begin{pmatrix} E\bar{A} & 0 & 0 & 0 & E\bar{S}_y & -E\bar{S}_z \\ 0 & G\bar{A} & 0 & -E\bar{S}_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G\bar{A} & E\bar{S}_z & 0 & 0 \\ 0 & -E\bar{S}_y & E\bar{S}_z & G\bar{I}_0 & 0 & 0 \\ E\bar{S}_y & 0 & 0 & 0 & E\bar{I}_y & -E\bar{I}_{yz} \\ -E\bar{S}_z & 0 & 0 & 0 & -E\bar{I}_{yz} & E\bar{I}_z \end{pmatrix} \quad (4)$$

con

$$\left. \begin{aligned} \bar{A} &= \int_A \frac{dA}{\mu} & \bar{S}_y &= \int_A z \frac{dA}{\mu} & \bar{S}_z &= \int_A y \frac{dA}{\mu} \\ \bar{I}_y &= \int_A z^2 \frac{dA}{\mu} & \bar{I}_{yz} &= \int_A yz \frac{dA}{\mu} & \bar{I}_z &= \int_A y^2 \frac{dA}{\mu} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

e $\bar{I}_0 = \bar{I}_y + \bar{I}_z$. Conviene subrayar que la composición del operador \mathbf{D}_{11} dada en (4) es válida cualquiera que sea la geometría de la curva directriz (plana o alabeada).

Se define la *directriz* o *eje principal* de la pieza curva mediante la propiedad siguiente

$$\bar{S}_y = \int_A z \frac{dA}{\mu} = 0 \quad , \quad \bar{S}_z = \int_A y \frac{dA}{\mu} = 0 \quad (6)$$

Por lo tanto, las coordenadas en sección transversal del polo O que lo determina, referidas al centro de gravedad de la misma, son

$$\tilde{y}_0 = \frac{\int_A \tilde{y} \frac{dA}{\tilde{\mu}}}{\int_A \frac{dA}{\tilde{\mu}}}, \quad \tilde{z}_0 = \frac{\int_A \tilde{z} \frac{dA}{\tilde{\mu}}}{\int_A \frac{dA}{\tilde{\mu}}} \quad (7)$$

Apoyándonos ahora en la Figura 2, obtenemos las siguientes relaciones de transformación

$$\left. \begin{aligned} y &= \tilde{y} - \tilde{y}_0, & z &= \tilde{z} - \tilde{z}_0 \\ R &= \tilde{R} - \tilde{y}_0, & r &= \tilde{R} - \tilde{y} = R - y \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

De la última se deduce además que

$$\tilde{R}\tilde{\mu} = R\mu = r \quad (9)$$

Por otra parte, las constantes estáticas recogidas en (5) merecen un estudio más detallado. En particular, la definición del escalar μ permite escribir

$$\bar{S}_z = \int_A R(1-\mu) \frac{dA}{\mu} = R(\bar{A}-A) \quad (10)$$

Y, como $\bar{S}_z = 0$ por (6), se cumplirá

$$\bar{A} = \int_A \frac{dA}{\mu} = A \quad (11)$$

La parametrización adoptada, en adelante *parametrización principal*, asociada a la selección de la directriz expresada por las fórmulas (7), simplifica notablemente la formulación, puesto que con ella la composición del operador constitutivo \mathbf{D}_{11} resulta cuasi-diagonal y la función lagrangiana $F(s, \mathbf{u}, \mathbf{e})$, definida en (2), resulta

$$\begin{aligned} F(s, \mathbf{u}, \mathbf{e}) &= \frac{1}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{D}_{11} \mathbf{e} - \mathbf{u}^T \mathbf{Q} \\ &= \frac{1}{2} \left[EA\epsilon_s^2 + GA(\gamma_{sy}^2 + \gamma_{sz}^2) + G\bar{I}_0\kappa_s^2 + E\bar{I}_y\kappa_y^2 \right. \\ &\quad \left. - 2E\bar{I}_z\kappa_y\kappa_z + E\bar{I}_z\kappa_z^2 \right] - (uq_s + vq_y + wq_z + \theta_s m_s + \theta_y m_y + \theta_z m_z) \end{aligned} \quad (12)$$

En esta expresión cada sumando corresponde a un modo de deformación del modelo (extensión, cortante, torsión y flexión), y su simple observación nos indica de forma inmediata que, en general, las flexiones están acopladas, salvo que se cancele el coeficiente \bar{I}_{yz} .

Hablemos ahora de vigas y arcos. *A priori*, la simple orientación de la pieza de directriz plana en el espacio parece sugerir la clasificación indicada en el título de esta sección: denominaríamos *viga curva* a aquel elemento simple cuya directriz $\Gamma(s)$ reside en el plano horizontal y reservaríamos el término *arco* para el caso complementario, cuando el plano de la curva directriz es vertical. Sin embargo, esto no es suficiente. Para que tenga sentido distinguir entre la respuesta de arco y la de viga curva es necesario que cada una se pueda determinar por separado, y ello depende no solo de la posición espacial de la pieza, sino también de la forma de la sección transversal. Para evaluar la influencia de esta, conviene considerar conjuntamente la fórmula de las deformaciones generalizadas (1) y la estructura

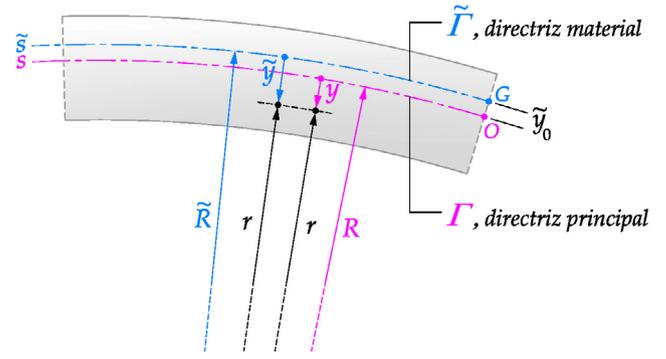


Figura 2. Sistemas de referencia material y principal de la pieza curva con directriz plana, sección por el plano osculador ($z = 0$).

de la densidad lineal de energía potencial del modelo, Ecuación (12), recordando que ambas corresponden al MVS y la última está asociada a la parametrización principal. Se puede observar como las componentes ϵ_s , γ_{sy} y κ_z son funciones lineales de los desplazamientos generalizados $\{u, v, \theta_z\}$ que se desarrollan en el plano de la directriz, mientras que γ_{sz} , κ_s y κ_y lo son de $\{w, \theta_s, \theta_y\}$, desplazamientos transversales a este plano. En consecuencia, para que el comportamiento arco se desacople de la respuesta de viga bastará que $\bar{I}_{yz} = 0$, obteniendo entonces que la densidad lineal de energía potencial del arco resulta

$$\begin{aligned} F(s, \mathbf{u}, \mathbf{e}) &= \frac{1}{2} (EA\epsilon_s^2 + GA\gamma_{sy}^2 + E\bar{I}_z\kappa_z^2) \\ &\quad - (uq_s + vq_y + \theta_z m_z) \end{aligned} \quad (13)$$

mientras que la correspondiente a la viga curva valdrá

$$\begin{aligned} F(s, \mathbf{u}, \mathbf{e}) &= \frac{1}{2} (GA\gamma_{sz}^2 + G\bar{I}_0\kappa_s^2 + E\bar{I}_y\kappa_y^2) \\ &\quad - (wq_z + \theta_s m_s + \theta_y m_y) \end{aligned} \quad (14)$$

La condición de desacoplamiento anterior se satisface sistemáticamente si la sección transversal de la pieza es simétrica respecto al plano $z=0$, plano osculador de la curva $\Gamma(s)$, que la contiene.

3.

LA VIGA CURVA

En este apartado nos proponemos establecer las ecuaciones que gobiernan la respuesta de una pieza de directriz plana y sección transversal simétrica respecto al plano osculador de la directriz, restringiéndonos al caso de la viga curva y teniendo en cuenta el alabeo torsional. Así pues, los grados de libertad a considerar serán $\{w, \theta_s, \theta_y, \phi\}$, donde al desplazamiento w y los giros θ_s y θ_y propios del MVS se ha añadido la *intensidad de alabeo* ϕ . La Figura 3 muestra este tipo de pieza, así como los desplazamientos generalizados y los esfuerzos consistentes, correspondientes al MVS; no aparecen, pues, los desplazamientos generalizados y esfuerzos relacionados con el alabeo, de difícil representación gráfica.

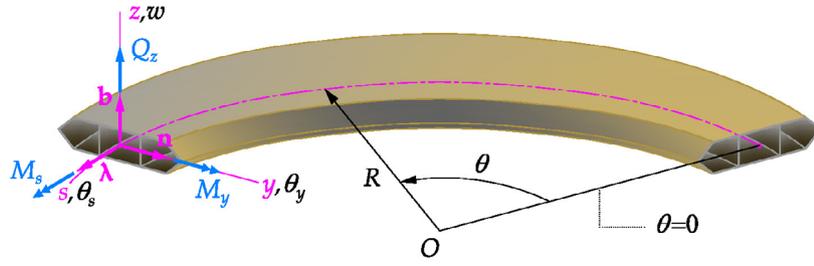


Figura 3. Sistema de referencia intrínseco, desplazamientos y esfuerzos generalizados de una viga circular.

3.1 Deducción de las ecuaciones que gobiernan el problema

En el marco de la *UBT*, la hipótesis cinemática se expresa a través de la matriz $\mathbf{h}(y,z)$ [22, pág. 25] mediante

$$\mathbf{d}^*(s, y, z) = \mathbf{h}(y, z) \mathbf{u}(s) \quad (15)$$

que, en nuestro caso, se desarrolla en componentes como

$$\begin{Bmatrix} u^*(s, y, z) \\ v^*(s, y, z) \\ w^*(s, y, z) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & z & \hat{\omega}(y,z) \\ 0 & -z & 0 & 0 \\ 1 & \hat{y} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w(s) \\ \theta_s(s) \\ \theta_y(s) \\ \varphi(s) \end{Bmatrix} \quad (16)$$

siendo $\hat{\omega}(y,z)$ el alabeo unitario de la sección transversal, $\varphi(s)$ la intensidad de alabeo, (y_c, z_c) las coordenadas del centro de esfuerzos cortantes –nótese que $z_c=0$ por la condición de simetría de la sección– e $\hat{y} = y - y_c$ y $\hat{z} = z - z_c$. Con estas últimas relaciones, todos los elementos del operador $\mathbf{h}(y,z)$ quedan referidos al *sistema principal* de la pieza mientras que los desplazamientos debidos a la rotación de eje longitudinal tienen su polo en el centro de esfuerzos cortantes.

En cuanto a estática, para la viga curva tendremos [22, fórmula (2.24)]

$$\mathbf{f}(s) = \int_A \mathbf{h}^T \mathbf{t}^* dA = \int_A \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\hat{z} & y \\ z & 0 & 0 \\ \hat{\omega}(y,z) & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_s^* \\ \tau_{sy}^* \\ \tau_{sz}^* \end{Bmatrix} dA = \begin{Bmatrix} Q_z \\ M_s \\ M_y \\ B_{\hat{\omega}} \end{Bmatrix} \quad (17)$$

que muestra como el vector de esfuerzos $\mathbf{f}(s)$ incluye las componentes de esfuerzos de flexión estándar, cortante y momento flector

$$Q_z = \int_A \tau_{sz}^* dA \quad , \quad M_y = \int_A z \sigma_s^* dA \quad (18.a)$$

y las propias de la torsión, momento torsor y bimomento, ambas referidas al centro de esfuerzos cortantes, que actúa como polo de la torsión

$$M_s = \int_A (\hat{y} \tau_{sz}^* - \hat{z} \tau_{sy}^*) dA = \int_A (\hat{y} \tau_{sz}^* - \hat{z} \tau_{sy}^*) dA - y_c Q_z \quad ,$$

$$B_{\hat{\omega}} = \int_A \hat{\omega}(y,z) \sigma_s^* dA \quad (18.b)$$

El sistema de ecuaciones diferenciales que gobierna la respuesta de la viga curva [22, ecuaciones 2.42] depende de la matriz de equilibrio \mathbf{H} , la matriz de acoplamiento $\hat{\mathbf{D}}_{00}$ y el operador constitutivo \mathbf{D}_{11} . Para establecer las matrices \mathbf{H} y $\hat{\mathbf{D}}_{00}$ se requiere conocer los operadores \mathbf{D}_{00} , \mathbf{D}_{01} y \mathbf{D}_{11} . [22, página 34] que quedan definidos en [22, ecuación 2.34]. A continuación procedemos a obtenerlos. Para ello se parte de los resultados generales para el cálculo de las matrices de deformación del sólido [22, ecuación (2.13)]

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_s^* &= \frac{1}{\mu} (u_{,s}^* - \chi v^*) \\ \gamma_{sy}^* &= u_{,y}^* + \frac{1}{\mu} (v_{,s}^* + \chi u^*) \\ \gamma_{sz}^* &= u_{,z}^* + \frac{1}{\mu} w_{,s}^* \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Llevando las expresiones de la Ecuación (16) a estas fórmulas se obtiene

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_s^* &= \frac{1}{\mu} [z(\theta_y' + \chi \theta_s) + \hat{\omega} \varphi'] \\ \gamma_{sy}^* &= \frac{1}{\mu} [z(\chi \theta_y - \theta_s') + (\chi \hat{\omega} + \mu \hat{\omega}_{,y}) \varphi] \\ \gamma_{sz}^* &= \frac{1}{\mu} (w' + \mu \theta_y + \hat{y} \theta_s' + \mu \hat{\omega}_{,z} \varphi) \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Las matrices de deformación \mathbf{B}_0 y \mathbf{B}_1 , que intervienen en el cálculo de \mathbf{D}_{00} , \mathbf{D}_{01} y \mathbf{D}_{11} , resultan de factorizar las deformaciones anteriores, componentes del vector $\mathbf{e}^*(s,y,z)$, en $\mathbf{u}(s)$ y $\mathbf{u}'(s)$ [22, ecuación 2.12]

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{B}_0 &= \frac{1}{\mu} \begin{bmatrix} 0 & \chi z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \chi z & \chi \hat{\omega} + \mu \hat{\omega}_{,y} \\ 0 & 0 & 0 & \mu \hat{\omega}_{,z} \end{bmatrix} \\ \mathbf{B}_1 &= \frac{1}{\mu} \begin{bmatrix} 0 & 0 & z & \hat{\omega} \\ 0 & -z & 0 & 0 \\ 0 & \hat{y} & 0 & 0 \end{bmatrix} \equiv \frac{1}{\mu} \mathbf{h} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Los operadores constitutivos \mathbf{D}_{rs} se definen mediante la expresión (2.34) de [22]. El primero de ellos, \mathbf{D}_{00} , resulta

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}_{00} &= \int_A \mathbf{B}_0^T \mathbf{C} \mathbf{B}_0 \mu dA \\
&= \int_A \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \chi^2 E z^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G(\chi^2 z^2 + \mu^2) & G[\chi z(\chi \hat{\omega}_x + \mu \hat{\omega}_y) + \mu^2 \hat{\omega}_z] \\ 0 & 0 & G[\chi z(\chi \hat{\omega}_x + \mu \hat{\omega}_y) + \mu^2 \hat{\omega}_z] & G[(\chi \hat{\omega}_x + \mu \hat{\omega}_y)^2 + (\mu \hat{\omega}_z)^2] \end{bmatrix} \frac{dA}{\mu} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \chi^2 E \bar{I}_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & GA + \chi^2 G \bar{I}_0 & y_C GA + \chi(GW_0 + G \bar{I}_z) + \chi^2 G \bar{I}_{y\hat{\omega}} \\ 0 & 0 & y_C GA + \chi(GW_0 + G \bar{I}_z) + \chi^2 G \bar{I}_{y\hat{\omega}} & G \hat{W} + \chi G \hat{\Omega} + \chi^2 G \bar{I}_{y\hat{\omega}} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{22}$$

donde se han introducido las constantes estáticas

$$\begin{aligned}
\bar{I}_0 &= \bar{I}_y + \bar{I}_z \quad \text{con} \quad \bar{I}_y = \int_A z^2 \frac{dA}{\mu}, \quad \bar{I}_z = \int_A y^2 \frac{dA}{\mu} \\
\bar{I}_{\hat{\omega}} &= \int_A \hat{\omega}^2 \frac{dA}{\mu}, \quad \bar{I}_{y\hat{\omega}} = \int_A z \hat{\omega} \frac{dA}{\mu} \\
\hat{W} &= \int_A [(\hat{\omega}_y)^2 + (\hat{\omega}_z)^2] dA = \int_A (\hat{z} \hat{\omega}_y - \hat{y} \hat{\omega}_z) dA \\
\hat{\Omega} &= \int_A \{(\hat{\omega}^2)_y - y[(\hat{\omega}_y)^2 + (\hat{\omega}_z)^2]\} dA
\end{aligned} \tag{23}$$

junto con

$$\begin{aligned}
W_0 &= \int_A (z \hat{\omega}_y - y \hat{\omega}_z) dA \\
&= \hat{W} - (y_C^2 + z_C^2) A - \chi(y_C \bar{I}_z + z_C \bar{I}_y) \\
&= \hat{W} - y_C(y_C A + \chi \bar{I}_z)
\end{aligned} \tag{24}$$

Análogamente, el bloque \mathbf{D}_{01} es

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}_{01} &= \int_A \mathbf{B}_0^T \mathbf{C} \mathbf{B}_1 \mu dA \\
&= \int_A \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \chi E z^2 & \chi E z \hat{\omega} \\ G \mu & G(\mu \hat{y} - \chi z^2) & 0 & 0 \\ G \mu \hat{\omega}_z & G[\mu \hat{y} \hat{\omega}_z - z(\chi \hat{\omega}_x + \mu \hat{\omega}_y)] & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{dA}{\mu} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \chi E \bar{I}_y & \chi E \bar{I}_{y\hat{\omega}} \\ GA & -(y_C GA) + \chi G \bar{I}_0 & 0 & 0 \\ y_C GA + \chi G \bar{I}_z & -(G \hat{W} + \chi G \bar{I}_{y\hat{\omega}}) & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{25}$$

Este resultado se ha obtenido teniendo en cuenta la siguiente propiedad del alabeo unitario (para el tipo de secciones considerado)

$$\begin{aligned}
\int_A \hat{\omega}_y dA &= \int_A \hat{z} dA = \int_A (z - z_C) dA \\
&= \int_A z dA - z_C A = \int_A (1 - \chi y) z \frac{dA}{\mu} = 0 \\
\int_A \hat{\omega}_z dA &= -\int_A \hat{y} dA = -\int_A (y - y_C) dA \\
&= y_C A - \int_A y dA = y_C A - \int_A (1 - \chi y) y \frac{dA}{\mu} \\
&= y_C A + \chi \bar{I}_z
\end{aligned} \tag{26}$$

Finalmente, el bloque constitutivo \mathbf{D}_{11} vale

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}_{11} &= \int_A \mathbf{B}_1^T \mathbf{C} \mathbf{B}_1 \mu dA \\
&= \int_A \begin{bmatrix} G & G \hat{y} & 0 & 0 \\ G \hat{y} & G(\hat{y}^2 - z^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E z^2 & E z \hat{\omega} \\ 0 & 0 & E z \hat{\omega} & E \hat{\omega}^2 \end{bmatrix} \frac{dA}{\mu} \\
&= \begin{bmatrix} GA & -y_C GA & 0 & 0 \\ -y_C GA & G \bar{I}_0 + y_C^2 GA & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E \bar{I}_y & E \bar{I}_{y\hat{\omega}} \\ 0 & 0 & E \bar{I}_{y\hat{\omega}} & E \bar{I}_{\hat{\omega}} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{27}$$

Con los resultados anteriores, estamos en condiciones de calcular la matriz de equilibrio de la viga curva, [22, página 34], igual a

$$\mathbf{H} = \mathbf{D}_{01} \mathbf{D}_{11}^{-1} \tag{28}$$

obteniendo sucesivamente

$$\mathbf{D}_{11}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{GA} + \frac{y_C^2}{GA} & \frac{y_C}{G \bar{I}_0} & 0 & 0 \\ \frac{y_C}{G \bar{I}_0} & \frac{1}{G \bar{I}_0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{(1-\varepsilon) E \bar{I}_y} & \frac{1}{(1-\varepsilon) E \bar{I}_{y\hat{\omega}}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{(1-\varepsilon) E \bar{I}_{y\hat{\omega}}} & \frac{1}{(1-\varepsilon) E \bar{I}_{\hat{\omega}}} \end{bmatrix} \tag{29}$$

donde $\varepsilon = \bar{I}_{y\omega}^2 / \bar{I}_y \bar{I}_{\omega}$, y

$$\mathbf{H} = \mathbf{D}_{01} \mathbf{D}_{11}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \chi & 0 \\ 1 - \chi y_c & -\chi & 0 & 0 \\ y_c^* & -\kappa_0^* & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (30)$$

con unos nuevos parámetros estáticos y_c^* , κ_0^* y κ_0^* definidos a continuación. El primero de ellos tiene dimensión de longitud mientras que los restantes son adimensionales.

$$\left. \begin{aligned} y_c^* &= (1 - \kappa_0^*) y_c + \chi \bar{F}_z^2 \\ \kappa_0 &= \frac{W_0}{\bar{I}_0}, \quad \kappa_0^* = \frac{W_0 + \chi \bar{I}_{y\omega}}{\bar{I}_0}, \quad \bar{F}_z = \sqrt{\frac{\bar{I}_z}{A}} \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

En cuanto a la matriz de acoplamiento [22, página 34], esta adopta el siguiente valor

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{D}}_{00} &= \mathbf{D}_{00} - \mathbf{D}_{01} \mathbf{D}_{11}^{-1} \mathbf{D}_{10} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1 - \kappa_0^*) G \hat{W} - y_c y_c^* GA + \chi G [\hat{\Omega} - (y_c^* \bar{I}_z + \kappa_0^* \bar{I}_{y\omega})] + \chi^2 G \bar{I}_{\omega} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (32)$$

que, de manera más compacta, escribiremos

$$\hat{\mathbf{D}}_{00} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \kappa_0^* G J^* \end{bmatrix} \quad (33)$$

donde el valor de J^* se deduce de la simple comparación de ambas expresiones.

Nos interesaremos a continuación por las deformaciones generalizadas $\mathbf{e}(s)$ consistentes con los esfuerzos $\mathbf{f}(s)$ presentados y evaluados estáticamente en la Ecuación (17). En la formulación general [22, página 36], estas se definen como $\mathbf{e}(s) = \mathbf{H}^T \mathbf{u} + \mathbf{u}'$ y aplicando ahora el resultado obtenido para la matriz de equilibrio –Ecuación (30)–, se llega a un conjunto de expresiones compactas para sus cuatro componentes

$$\begin{aligned} \mathbf{e}(s) &= \mathbf{H}^T \mathbf{u} + \mathbf{u}' \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 - \chi y_c & y_c^* \\ 0 & 0 & -\chi & -\kappa_0^* \\ 0 & \chi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega \\ \theta_s \\ \theta_y \\ \varphi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega' \\ \theta_s' \\ \theta_y' \\ \varphi' \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (34)$$

Por lo tanto

$$\mathbf{e}(s) = \begin{bmatrix} \gamma_{sz} \\ \kappa_s \\ \kappa_y \\ \varphi' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w' + (1 - \chi y_c) \theta_y + y_c^* \varphi \\ \theta_s' - \chi \theta_y - \kappa_0^* \varphi \\ \theta_y' + \chi \theta_s \\ \varphi' \end{bmatrix} \quad (35)$$

Con todo ello, los esfuerzos $\mathbf{f}(s)$ se pueden expresar como [22, ecuación 2.51]

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(s) &= \mathbf{D}_{11} \mathbf{e}(s) \\ &= \begin{bmatrix} GA & -y_c GA & 0 & 0 \\ -y_c GA & G \bar{I}_0 + y_c^2 GA & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E \bar{I}_y & E \bar{I}_{y\omega} \\ 0 & 0 & E \bar{I}_{y\omega} & E \bar{I}_{\omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{sz} \\ \kappa_s \\ \kappa_y \\ \varphi' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_z \\ M_s \\ M_y \\ B_{\omega} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (36)$$

Estas relaciones exhiben el acoplamiento constitutivo existente entre flexión y torsión, que afecta tanto al cortante Q_z y al momento torsor M_s como al momento flector M_y y al bimomento B_{ω} , los primeros producidos por las tensiones tangenciales τ_{xy}^* , τ_{sz}^* y estos últimos debidos a las tensiones normales σ_s^* –ver definiciones estáticas (18)–. Finalmente, la densidad lineal de energía potencial de la viga curva vale [22, tabla II.1]

$$\begin{aligned} F(s, \mathbf{u}, \mathbf{e}) &= \frac{1}{2} (\mathbf{e}^T \mathbf{D}_{11} \mathbf{e} + \mathbf{u}^T \hat{\mathbf{D}}_{00} \mathbf{u}) - \mathbf{u}^T \mathbf{Q} \\ &= \frac{1}{2} \left[GA \gamma_{sz}^2 - 2 y_c GA \gamma_{sz} \kappa_s + G \bar{I}_0 \kappa_s^2 + E \bar{I}_y \kappa_y^2 \right. \\ &\quad \left. + 2 E \bar{I}_{y\omega} \kappa_y \varphi' + E \bar{I}_{\omega} (\varphi')^2 + \kappa_0^* G J \varphi^2 \right] \\ &\quad - (w q_z + \theta_s m_z + \theta_y m_y + b_{\omega} \varphi) \end{aligned} \quad (37)$$

donde el vector $\mathbf{Q}(s) = \{q_z, m_s, m_y, b_{\omega}\}^T$ recoge las densidades lineales de cargas generalizadas distribuidas a lo largo del modelo, e $\bar{I}_0 = \bar{I}_0 + y_c^2 A$.

En la formulación lineal del problema, las ecuaciones que gobiernan el equilibrio de una viga curva de directriz plana adoptan la forma siguiente [22, ecuación (2.42)]

$$\mathbf{E}'(s) = \mathbf{W}(s) \mathbf{E}(s) - \mathbf{F}(s) \quad (38)$$

o bien

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}'(s) \\ \mathbf{f}'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{H}^T & \mathbf{D}_{11}^{-1} \\ \hat{\mathbf{D}}_{00} & \mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}(s) \\ \mathbf{f}(s) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{Q}(s) \end{bmatrix} \quad (39)$$

Llevando a esta fórmula la composición de las matrices de equilibrio $\mathbf{H}(s)$ y de acoplamiento $\hat{\mathbf{D}}_{00}(s)$, se consigue una es-

critura simple del operador $W(s)$, válida para analizar de forma exacta el equilibrio de vigas curvas de directriz plana $\Gamma(s)$ con forma arbitraria y sección transversal simétrica respecto al plano que contiene a $\Gamma(s)$. Esta es la siguiente

$$W(s) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \chi y_c + 1 & -y_c^* & \frac{1}{GA} + \frac{y_c^2}{GI_0} & \frac{y_c}{GI_0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \chi & \kappa_0^* & \frac{y_c}{GI_0} & \frac{1}{GI_0} & 0 & 0 \\ 0 & -\chi & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{(1-\varepsilon)EI_y} & \frac{1}{(1-\varepsilon)EI_{y\omega}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{(1-\varepsilon)EI_{y\omega}} & \frac{1}{(1-\varepsilon)EI_{\omega}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \chi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 - \chi y_c & -\chi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \kappa_0^* GJ^* & y_c^* & -\kappa_0^* & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (40)$$

Así pues, las ecuaciones diferenciales del problema son

$$\left. \begin{aligned} \frac{dw}{ds} &= -(1 - \chi y_c) \theta_y - y_c^* \varphi + \frac{Q_z}{GA} + y_c \frac{M_s + y_c Q_z}{GI_0} \\ \frac{d\theta_s}{ds} &= \chi \theta_y + \kappa_0^* \varphi + \frac{M_s + y_c Q_z}{GI_0} \\ \frac{d\theta_y}{ds} &= -\chi \theta_s + \frac{1}{1-\varepsilon} \left(\frac{M_y}{EI_y} - \varepsilon \frac{B_{\omega}}{EI_{y\omega}} \right) \\ \frac{d\varphi}{ds} &= \frac{1}{1-\varepsilon} \left(\frac{B_{\omega}}{EI_{\omega}} - \varepsilon \frac{M_y}{EI_{y\omega}} \right) \\ \frac{dQ_z}{ds} &= -q_z \\ \frac{dM_s}{ds} &= \chi M_y - m_s \\ \frac{dM_y}{ds} &= (1 - \chi y_c) Q_z - \chi M_s - m_y \\ \frac{dB_{\omega}}{ds} &= \kappa_0^* GJ^* \varphi + y_c^* Q_z - \kappa_0^* M_s - b_{\omega} \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

3.2 Descomposición del momento torsor. Esbeltez de torsión

Resulta oportuno analizar la estructura del momento torsor M_s . Para ello, volvamos a la última ecuación del sistema (41) y sobre ella definamos el *bicortante* como

$$M_{\omega} = -(B'_{\omega} + b_{\omega}) = \kappa_0^* (M_s - GJ^* \varphi) - y_c^* Q_z \quad (42)$$

Es sencillo comprobar, a partir de la fórmula (36) y las definiciones de γ_{sz} y κ_s facilitadas en (35), que

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi} = B'_{\omega} = -(M_{\omega} + b_{\omega}) \quad (43)$$

Ahora sumemos y restemos el momento torsor M_s al miembro de la derecha de la Ecuación (42)

$$M_{\omega} = (\kappa_0^* - 1) M_s + M_s - \kappa_0^* GJ^* \varphi - y_c^* Q_z \quad (44)$$

reordenemos esta expresión para obtener

$$M_s = (1 - \kappa_0^*) M_s + M_{\omega} + \kappa_0^* GJ^* \varphi - y_c^* Q_z \quad (45)$$

a continuación, sustituyamos y_c^* por su definición (31) y hagamos uso de las expresiones constitutivas de Q_z y M_s para llegar a

$$\begin{aligned} M_s &= (1 - \kappa_0^*) (M_s + y_c Q_z) + M_{\omega} + \kappa_0^* GJ^* \varphi + \chi r_z^2 Q_z \\ &= (1 - \kappa_0^*) G\bar{I}_0 \kappa_s + M_{\omega} + \kappa_0^* GJ^* \varphi + \chi r_z^2 Q_z \\ &= (1 - \kappa_0^* - J^*/\bar{I}_0) G\bar{I}_0 \kappa_s + (J^*/\bar{I}_0) G\bar{I}_0 \kappa_s \\ &\quad + M_{\omega} + \kappa_0^* GJ^* \varphi + \chi r_z^2 Q_z \\ &= (1 - \kappa_0^* - J^*/I_0) G\bar{I}_0 \kappa_s + GJ^* (\kappa_0^* \varphi + \kappa_s) + M_{\omega} + \chi r_z^2 Q_z \end{aligned} \quad (46)$$

Finalmente, introduciendo la definición de κ_s en el tercer sumando del miembro de la derecha se obtiene

$$M_s = GJ^* (\theta'_s - \chi \theta_y) + M_{\omega} + (1 - \kappa_0^* - J^*/\bar{I}_0) G\bar{I}_0 \kappa_s - \chi r_z^2 Q_z \quad (47)$$

Se comprueba de forma inmediata que esta ecuación, particularizada al caso de directriz recta, muestra cómo el momento torsor se divide en la fracción de Saint-Venant –primer sumando del término de la derecha– y el bicortante o momento torsor de alabeo –segundo sumando de la derecha–, como es característico en la torsión mixta de vigas rectas. A su vez, la curvatura introduce unas correcciones en las medidas propias de la torsión, M_s y θ_s , que se ven afectadas por los efectos de la flexión a través de las funciones Q_z y θ_y . El último sumando se cancela exactamente cuando la curvatura χ es nula.

En el caso de vigas de sección y curvatura constantes, el operador fundamental principal del sistema autónomo de ecuaciones diferenciales ordinarias asociado a W , que gobierna la solución general del problema de valores iniciales determinado por la ecuación de equilibrio $E'(s)=WE(s)-F(s)$ y $E|_{s=0}=E_0$, es

$$G(s) = \exp [sW] \quad (48)$$

El resultado del cálculo explícito del mismo *para torsión sin alabeo* (basta prescindir de la intensidad de alabeo ϕ en toda la formulación) así como la obtención de soluciones cerradas para los problemas de contorno o la expresión de la matriz de rigidez de esta misma pieza pueden consultarse en [22, páginas 119 a 121].

Volviendo al caso general de la viga curva con alabeo torsional, si admitimos que tiene sección transversal y curvatura constantes, el cálculo de los autovalores del operador W obtenido en (40) conduce a la ecuación característica siguiente

$$|W-KI| = K^2(K^2 + \chi^2)^2 \left[K^2 - \frac{\kappa_0^* GJ^*}{(1-\varepsilon)EI_\phi} \right] \quad (49)$$

cuyos resultados son las raíces $K=0$ con multiplicidad dos, $K=\pm i\chi$, ambas también con multiplicidad dos, y $K=\pm\lambda_0/L$, siendo λ_0 un parámetro definido como

$$\lambda_0 = L \sqrt{\frac{\kappa_0^*}{1-\varepsilon} \frac{GJ^*}{EI_\phi}} \quad (50)$$

al que denominaremos *esbeltez torsional*.

4. RESULTADOS

4.1 Resultados que dependen de la sección transversal

El primer paso en el análisis de una viga curva consiste en la determinación del eje principal y de las características geométricas de la sección definidas en las expresiones (23); ambos procesos requieren realizar una serie de cálculos sobre la sección transversal.

En este ámbito, el primer paso es definir el alabeo unitario. En este trabajo hemos optado por utilizar como tal a la función de alabeo que resuelve el problema de torsión de Saint-Venant, que debe cumplir la ecuación de Laplace con condiciones de contorno de Neumann [23, ecuaciones 139 y 140]. Para hallarla hemos utilizado el programa *FlexPDE*, que facilita tanto la resolución de problemas de este estilo como la evaluación de integrales sobre su dominio de definición, dependan o no de la solución del problema. Con los medios de cálculo actuales, no tiene sentido recurrir a expresiones que aproximen dicha función de alabeo, porque los procedimientos para establecerlas [24, página 252 y s.s.] pueden resultar tan laboriosos o más que su determinación por el método de los elementos finitos. De hecho, el código de *FlexPDE* utilizado apenas ocupa un par de páginas y su ejecución dura menos de un segundo (Con *FlexPDE* 6.36s, en un ordenador con proce-

sador *Intel i7-6700* a 3.40 GHz dotado de sistema operativo *Windows 10 Enterprise*).

Hemos analizado tres secciones, una cerrada, rectangular hueca, de dimensiones exteriores 50×25 cm y espesor 1 cm, y dos abiertas, una en U, resultado de eliminar de la anterior el alma izquierda, y otra en I, obtenida trasladando el alma de esta última al eje de simetría de las alas. Las dimensiones de la sección rectangular inicial son similares a las de los tubos estructurales de mayor tamaño que se pueden encontrar en el mercado; además, la proporción entre las dimensiones exteriores es semejante a la de una sección de puente en cajón —excluidas las alas—.

La *Figura 4* muestra el alabeo unitario calculado en cada una de ellas, representado con la misma escala cromática en todas. Se observa que, como es bien conocido, este resulta mucho mayor en las secciones abiertas.

A continuación se presentan una serie de gráficas en las que se comparan los parámetros geométricos de estas secciones calculados para diferentes valores del radio de curvatura; se han considerado 14 de ellos, variando entre 2.5 m y 5120 m. En todas las gráficas la escala es lineal en ordenadas y logarítmica en abscisas, y en ellas se representan de color oscuro los resultados de la sección cerrada, con un tono intermedio los de la U y de color más claro los de la doble T.

En primer lugar, se analiza la distancia entre el centro de gravedad de la sección y el polo principal, o lo que es lo mismo, la relación entre el radio de curvatura \tilde{R} del eje material y el radio de curvatura R del eje principal. La *Figura 5* muestra el cociente R/\tilde{R} frente a \tilde{R} . Se observa que ambos radios son prácticamente iguales en todos los casos. La mayor diferencia, que se da para el menor valor de \tilde{R} , es del orden del 5%; para valores mayores resultan indistinguibles.

Seguidamente se estudian los cocientes entre los momentos de inercia I_y e I_z de la viga curva, que dependen de la curvatura a través de μ —Ecuación (23)—, y los valores correspondientes \tilde{I}_y e \tilde{I}_z en una viga recta de la misma sección, donde no interviene este parámetro. También se analiza la relación entre el módulo de alabeo \tilde{I}_ϕ de la viga curva, que depende de la curvatura, y el de la viga recta de igual sección, \tilde{I}_ϕ , que no lo hace. La *Figura 6* muestra los cocientes entre los momentos de inercia y la *Figura 7* los correspondientes a los módulos de alabeo. Ambas agrupan a la izquierda las secciones en cajón y en I, en las que el centro de gravedad y el centro de esfuerzos cortantes coinciden, y presentan a la derecha la sección en U, en la que están separados. En el primer caso los tres parámetros son casi idénticos sea cual sea el radio de curvatura, pues las diferencias apenas alcanzan el 3%; en el segundo, la diferencia es algo mayor, pero sigue siendo inferior al 1% salvo para el menor de los radios procesados, de solo cinco veces la anchura de la pieza. Así pues, las diferencias son siempre muy pequeñas, y que sean solo muy pequeñas o casi imperceptibles no depende de que la sección sea abierta o cerrada, sino de que el centro de gravedad y el de esfuerzos cortantes estén próximos o alejados.

La *Figura 8* muestra los valores del parámetro $\tilde{I}_{y\phi}$ para el conjunto de casos estudiado. No se pueden presentar normalizados por el valor correspondiente a la viga recta porque este es nulo. La gráfica muestra claramente que $\tilde{I}_{y\phi}$ tiende a cero cuando el radio de curvatura crece, pero los valores son significativos para un amplio rango de curvaturas. Ahora lo que influye en el resultado es que la sección sea abierta o cerrada

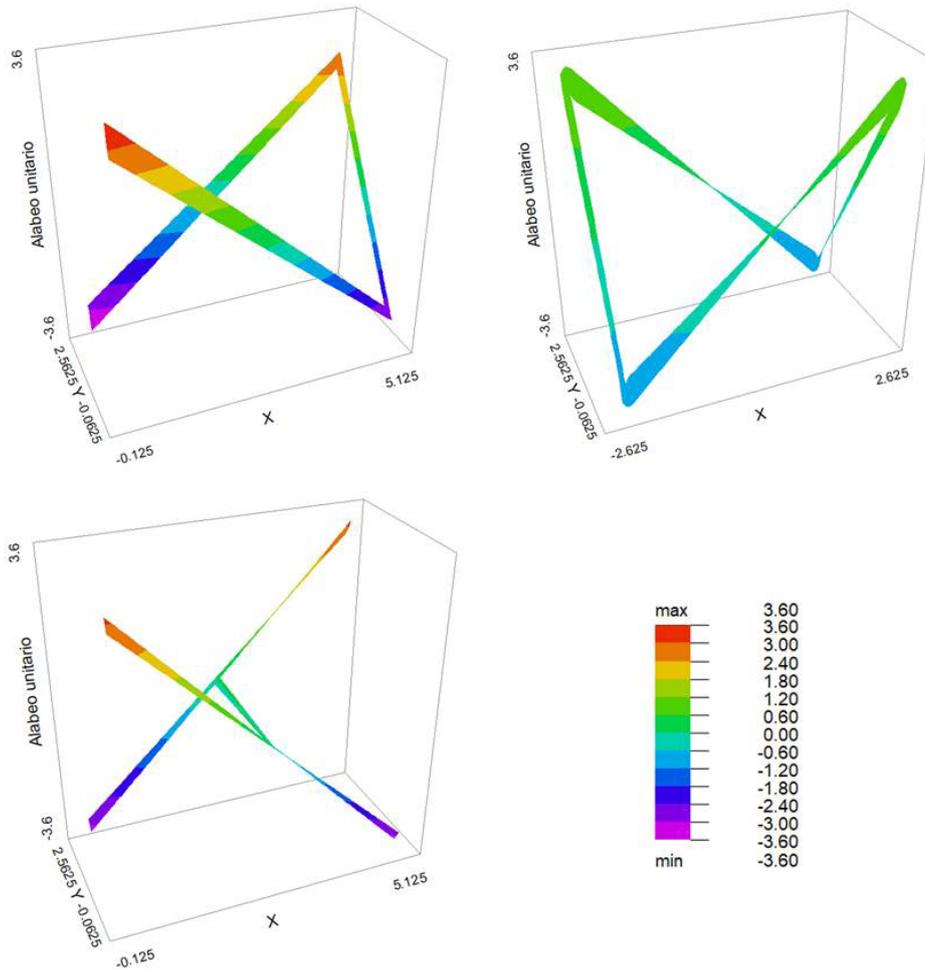


Figura 4. Representación del alabeo unitario en las secciones analizadas.

y no la distancia entre los centros de gravedad y de esfuerzos cortantes. En secciones cerradas el valor absoluto es menor, y el signo cambia respecto al de las secciones abiertas.

El parámetro \hat{W} no depende de la curvatura. Adopta el valor 26452 cm^4 en la sección rectangular cerrada, 272372 cm^4 en la U y 36216 cm^4 en la I. Así pues, en él influye más la distancia entre los centros de gravedad y de esfuerzos cortantes que el hecho de ser abierta o cerrada la sección, y su orden de magnitud es mayor cuando dichos puntos están alejados que cuando están próximos.

En cuanto a la constante $\hat{\Omega}$, Figura 9, depende del radio de curvatura y su valor es varios órdenes de magnitud menor en secciones donde el centro de gravedad y el de esfuerzos cortantes están próximos que en aquellas en que están separados. Además, la gráfica $\hat{\Omega} - \bar{R}$ tiene una asíntota horizontal en ambos casos, pero en el primero corresponde a $\hat{\Omega} = 0$ y en el segundo a un valor finito diferente de cero, del orden de 2900000 cm^5 en nuestro caso. Que las secciones sean abiertas o cerradas no influye en este resultado.

La coordenada y_c del centro de esfuerzos cortantes en la referencia principal, Figura 10, depende de la curvatura y tiende al valor de la coordenada \hat{y}_c de dicho punto respecto al centro de gravedad en todos los casos. En contraposición a lo que ocurría con los radios R y \bar{R} , las diferencias entre y_c e \hat{y}_c son

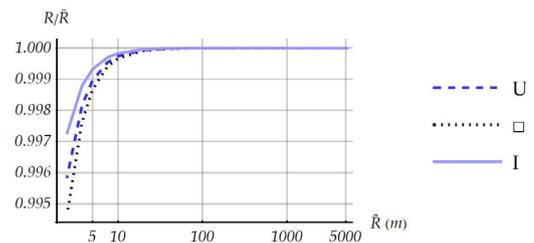


Figura 5. Relación entre el radio de curvatura de la directriz principal y el de la directriz material en los tres tipos de sección estudiados.

más significativas para un rango amplio de radios de curvatura; no obstante, las mayores diferencias, que se dan para radios pequeños, son inferiores al 1% de la anchura de la sección en los casos en que los centros de gravedad y de esfuerzos cortantes coinciden, y del orden de 2.3% de \hat{y}_c cuando no lo hacen.

Por último, en la Figura 11 se presenta la comparación del parámetro J^* con el módulo de torsión J , con el que está claramente relacionado. En el caso de la sección cerrada el cociente entre ambos es inferior al 0.8‰ para cualquier curvatura. En el de las secciones abiertas la diferencia es mayor, pero como el

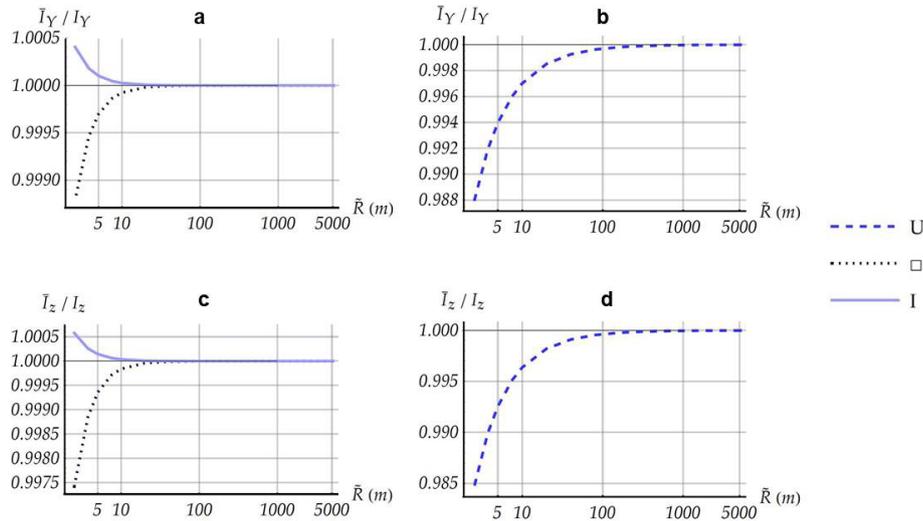


Figura 6. Relación entre los momentos de inercia de la viga curva y los de la viga recta. (a) y (c) secciones en las que el centro de gravedad y el de esfuerzos cortantes coinciden; (b) y (d) sección en la que no lo hacen.

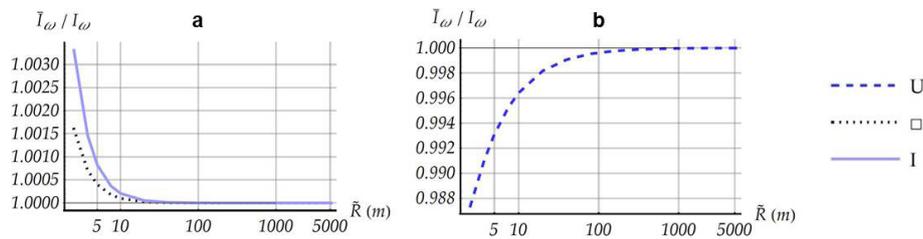


Figura 7. Relación entre el módulo de alabeo de la viga curva y el de la viga recta. (a) secciones en las que el centro de gravedad y el de esfuerzos cortantes coinciden; (b) sección en la que no lo hacen.

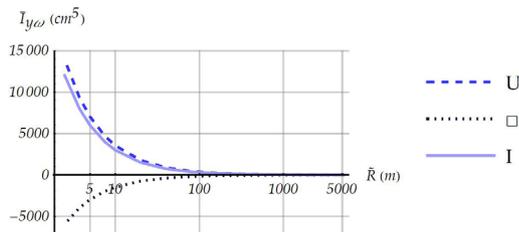


Figura 8. Evolución del valor del parámetro $I_{y\omega}$.

módulo de torsión de este tipo de secciones es muy pequeño es razonable pensar que el término J^* , o GJ^* , será despreciable frente a otros términos en las ecuaciones en las que intervenga –fundamentalmente, la última del sistema (41) y la Ecuación (2.23)–.

En resumen, hemos comprobado que el radio de curvatura de la directriz principal puede aproximarse por el de la directriz material en prácticamente todos los casos; que sucede lo mismo con los momentos de inercia y el módulo de alabeo de la viga curva \bar{I}_y , \bar{I}_z e $\bar{I}_{y\omega}$ y la viga recta; y que también se puede proceder así con el módulo de torsión J^* , porque las diferencias son despreciables en secciones cerradas y el valor absoluto muy bajo en secciones abiertas. Las similitudes o diferencias en \bar{Q} son irrelevantes, puesto que esta constante solo interviene a en la definición de J^* , cuya variación ya se ha comentado.

4.2 Comparación de la esbeltez torsional en vigas de sección abierta y cerrada

En esta sección vamos a comparar el valor de la esbeltez torsional λ_0 para la sección en U y para la sección en cajón. Para ello obtenemos los valores de la misma según la Ecuación (50) para distintos valores de la longitud y de la curvatura medida en el centroide. En la Figura 12 se representan los valores de la esbeltez para ambas secciones. Es interesante observar que en la sección abierta los valores de la esbeltez correspondiente a una misma longitud y curvatura son dos órdenes de magnitud inferiores a los valores que corresponden a la sección en cajón. Por ejemplo, si comparamos la esbeltez correspondiente a una viga recta de longitud 10 m, la viga con sección en U tiene una esbeltez $\lambda_0 = 0.21$ y la viga con sección cerrada $\lambda_0 = 10.937$. La viga de sección abierta de mayor longitud y curvatura (30 m, $1/10 \text{ m}^{-1}$) tiene una esbeltez torsional $\lambda_0 = 8.081$, y la viga de sección cerrada más larga y curva (2 m, $1/2.5 \text{ m}^{-1}$) $\lambda_0 = 22.004$, a pesar de ser 15 veces más corta. Por otra parte, los valores de la esbeltez son bastante insensibles a la curvatura, especialmente en el caso de la sección en cajón.

4.3 Desplazamientos generalizados y esfuerzos para distintas curvaturas

Ahora vamos a presentar grupos de soluciones del sistema de ecuaciones (41) para las dos secciones consideradas. Para ello

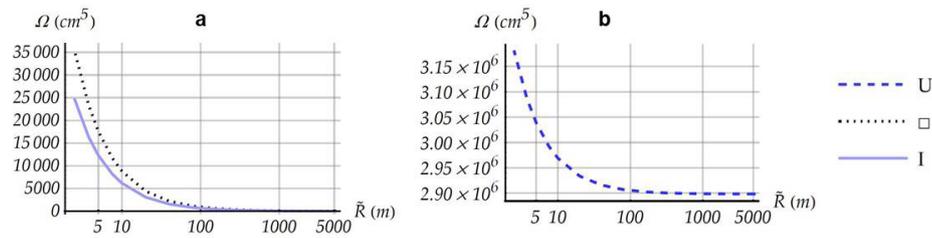


Figura 9. Evolución del valor del parámetro $\hat{\Omega}$. (a) secciones en las que el centro de gravedad y el de esfuerzos cortantes coinciden; (b) sección en la que no lo hacen.

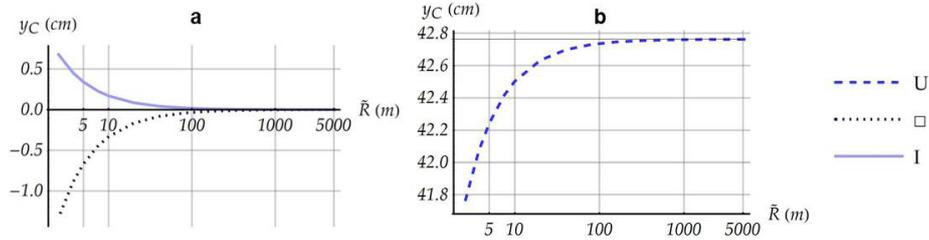


Figura 10. Evolución del valor de y_C , coordenada del centro de esfuerzos cortantes respecto al polo principal. (a) secciones en las que el centro de gravedad y el de esfuerzos cortantes coinciden; (b) sección en la que no lo hacen.

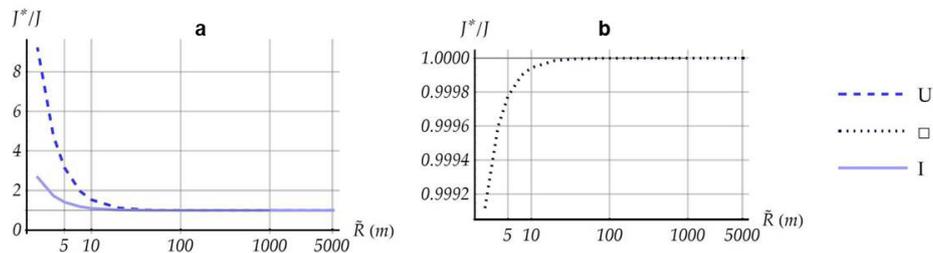


Figura 11. Comparación del parámetro J^* con el módulo de torsión J . (a) secciones abiertas; (b) sección cerrada.

planteamos la solución del problema genérico de una viga curva de longitud l dada y curvatura χ variable, empotrada en ambos extremos. El empotramiento considerado implica que todos los grados de libertad del modelo (incluida la intensidad de alabeo φ) son nulos. La viga se somete en todos los casos a una carga uniforme $q_z = 100 \text{ kN/m}$ y a un par torsor uniforme $m_s = 1 \text{ kN m/m}$.

4.3.1 Sección en U

Para esta sección se escoge una longitud de viga $l = 15 \text{ m}$ y se analiza una secuencia de curvaturas (referidas al centroide de la sección) que comprende desde la viga recta hasta una apertura muy cercana a la de una semicircunferencia. En todos los casos, la esbeltez torsional tiene valores bajos. Las curvaturas, aperturas α_0 y esbelteces torsionales asociadas λ_0 se recogen en la **Tabla 1**:

Tabla 1
Curvaturas, aperturas y esbelteces empleadas en el análisis de la viga con sección en U.

$\chi(\text{m}^{-1})$	0	1/60	1/40	1/10
α_0 (rad)	0	0.03π	0.12π	0.48π
λ_0	3.20	3.21	3.26	4.04

Los resultados normalizados de las variables estáticas y cinemáticas para la sección en U se representan en las **Figuras**

13 y 14. En la **Figura 13** se observa cómo la flecha normalizada aumenta considerablemente con la curvatura, como es esperable, y lo mismo sucede con el giro de flexión. El giro de torsión cambia de sentido para curvaturas bajas ya que el efecto torsional de la carga vertical dominante supera al de la acción torsora distribuida; con curvaturas más altas el giro de torsión presenta varios cambios de signo. La intensidad de alabeo exhibe un comportamiento semejante, cambiando de sentido con curvaturas bajas, y aumentando el número de ondas con curvaturas mayores.

Por lo que respecta a las variables estáticas normalizadas (**Figura 14**), el cortante es prácticamente idéntico para todos los valores de la curvatura. El momento flector no tiene una dependencia muy marcada de esta, y mantiene la forma del diagrama. Sin embargo, el momento torsor deja de ser una función lineal en cuanto la curvatura crece, y el bimomento, como sucedía con la intensidad de alabeo, tiene un desarrollo marcadamente diferente y valores extremos muy superiores cuando la viga deja de ser recta.

4.3.2 Sección en cajón

En este caso se analiza una viga de longitud $l = 2 \text{ m}$ con la misma secuencia de curvaturas que en el caso de la sección en U, a la que corresponden las aperturas y esbelteces torsionales

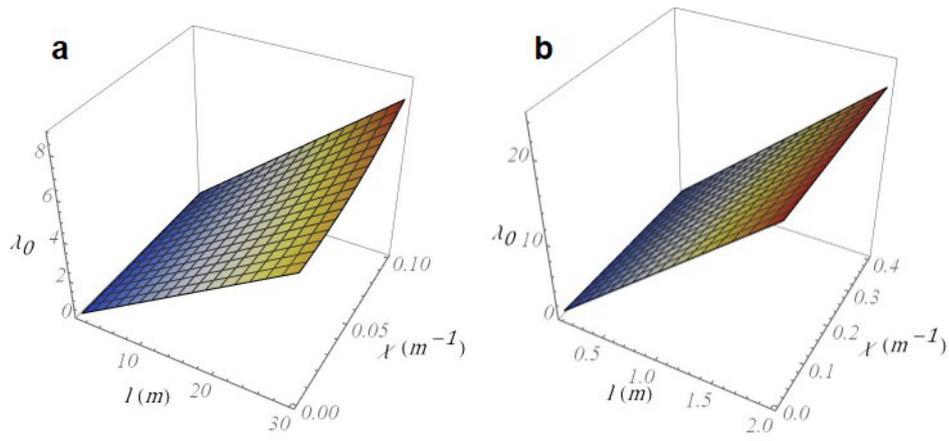


Figura 12. Esbeltez torsional en función de la longitud de la viga y de la curvatura. (a) sección en U; (b) sección en cajón.

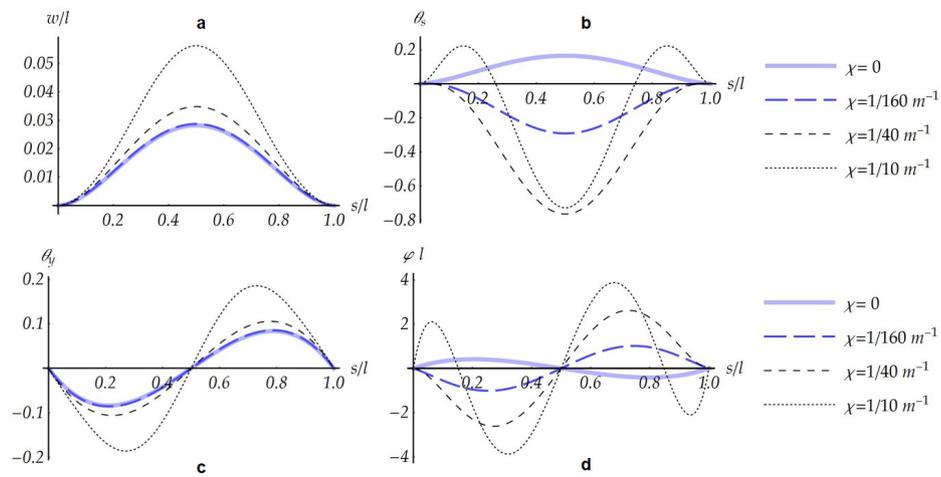


Figura 13. Variables cinemáticas normalizadas para distintas curvaturas en una viga biempotrada de sección abierta sometida a carga y par torsor uniformes. (a) desplazamiento vertical normalizado; (b) giro de flexión; (c) giro de torsión; (d) intensidad de alabeo normalizada.

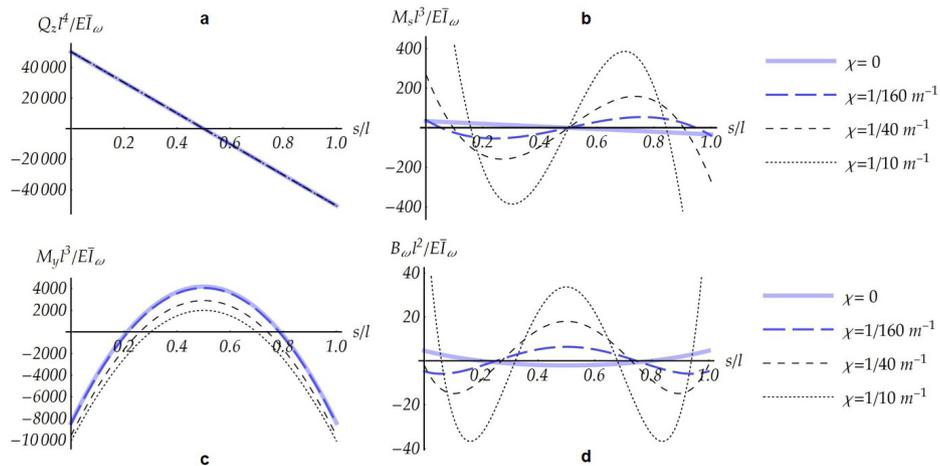


Figura 14. Variables estáticas normalizadas para distintas curvaturas en una viga biempotrada de sección abierta sometida a carga y par torsor uniformes. (a) esfuerzo cortante normalizado; (b) momento torsor normalizado; (c) momento flector normalizado; (d) bimomento normalizado.

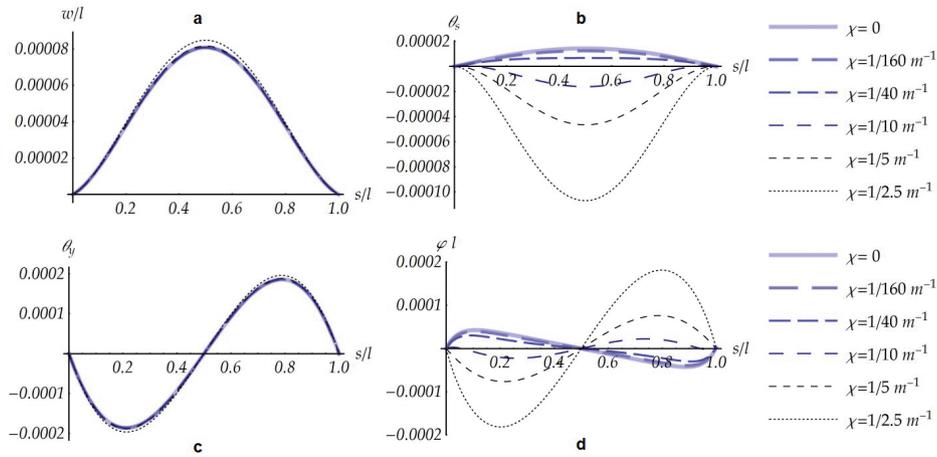


Figura 15. Variables cinemáticas normalizadas para distintas curvaturas en una viga biempotrada de sección en cajón sometida a carga y par torsor uniformes. (a) desplazamiento vertical normalizado; (b) giro de flexión; (c) giro de torsión; (d) intensidad de alabeo normalizada.

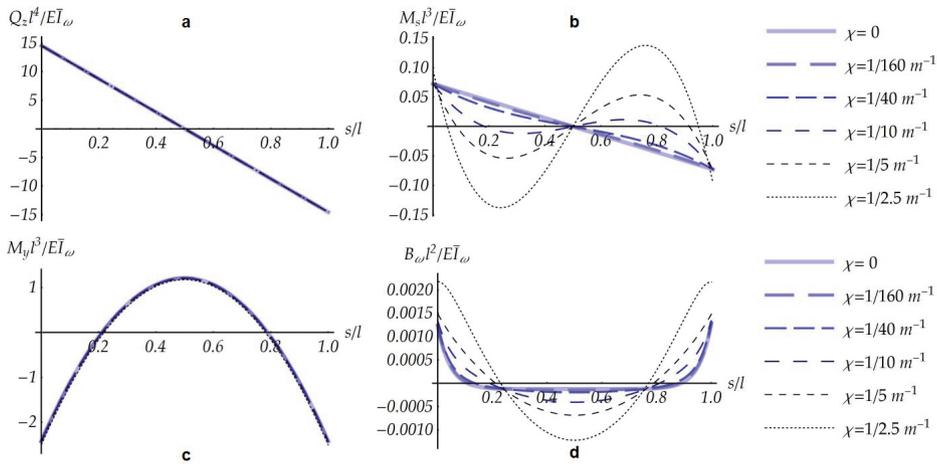


Figura 16. Variables estáticas normalizadas para distintas curvaturas en una viga biempotrada de sección en cajón sometida a carga y par torsor uniformes. (a) esfuerzo cortante normalizado; (b) momento torsor normalizado; (c) momento flector normalizado; (d) bimomento normalizado.

recogidas en la siguiente tabla:

TABLA 2
Curvaturas, aperturas y esbelteces empleadas en el análisis de la viga con sección cerrada.

χ (m ⁻¹)	0	1/60	1/40	1/10	1/5	1/2.5
α_0 (rad)	0	0.004 π	0.016 π	0.064 π	0.127 π	0.255 π
λ_0	21.875	21.875	21.875	21.883	21.907	22.004

En la Figura 15 se observa que, en la pieza cerrada analizada, la flecha y el giro de flexión normalizados no dependen prácticamente de la curvatura. El giro de torsión y la intensidad de alabeo sí están fuertemente influidas por la misma, y cambian de sentido a medida que aumenta la curvatura por la misma razón que en la pieza abierta.

En cuanto a los esfuerzos normalizados (Figura 16), el cortante y el momento flector tampoco se modifican en la práctica con

la curvatura. Por el contrario, los valores extremos del momento torsor y del bimomento crecen apreciablemente a medida que lo hace la curvatura.

4.4 Influencia de la esbeltez torsional y de la curvatura en la respuesta

En esta sección vamos a emplear la descomposición del torsor introducida en la Sección 3 con objeto de evaluar la influencia de la esbeltez torsional y la curvatura en la respuesta estática de la viga. Para cada una de las secciones estudiadas (abierta y cerrada) representamos, a partir de la descomposición introducida en la Ecuación (47), las siguientes fracciones del torsor total:

El momento torsor de Saint-Venant:

$$GJ^* (\theta'_s - \chi \theta_y) \quad (51)$$

El bicortante o momento torsor de alabeo:

$$M_{\omega} = (\kappa_0^* - 1) M_s + M_s - \kappa_0^* GJ^* \varphi - \gamma_c^* Q_z \quad (52)$$

La corrección dependiente de la deformación generalizada de torsión:

$$(1 - \kappa_0^* - J^*/\bar{I}_0) G\bar{I}_0 \kappa_s \quad (53)$$

La corrección dependiente del cortante:

$$\chi \bar{r}_z^2 Q_z \quad (54)$$

En la representación gráfica de las funciones que se explica a continuación, se ha empleado en todos los casos el siguiente criterio para la leyenda de las gráficas:

- La Curva 1 representa el momento torsor total.
- La Curva 2 representa la suma del momento torsor de Saint-Venant más el torsor de alabeo, más la corrección asociada a la deformación de torsión.
- La Curva 3 representa la suma del momento torsor de Saint-Venant más el torsor de alabeo.
- La Curva 4 representa el momento torsor de Saint-Venant.

En todas las curvas se ha representado valores normalizados (adimensionales). La parte sombreada del diagrama corresponde a la suma del torsor de alabeo (bicortante) más los dos términos correctores. En el caso de curvatura nula, estos últimos se anulan y los diagramas obtenidos se corresponden con la descomposición esperada del torsor en la parte de Saint-Venant y la parte debida al alabeo.

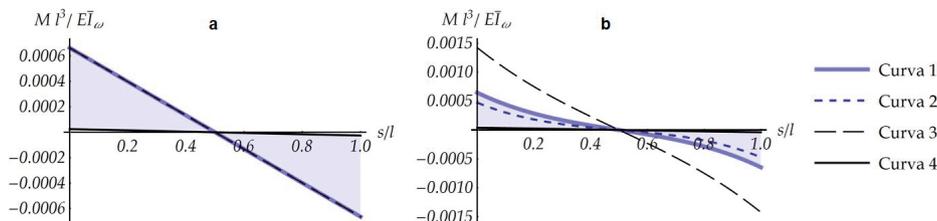


Figura 17. Descomposición del momento torsor normalizado en la viga biempotrada con sección abierta de 1 m de longitud. (a) viga recta; (b) curvatura $1/10 \text{ m}^{-1}$. Curva 1: Torsor total; Curva 2: Torsor de Saint-Venant, más torsor de alabeo, más corrección asociada a la deformación de torsión; Curva 3: Torsor de Saint-Venant, más torsor de alabeo; Curva 4: Torsor de Saint-Venant. El sombreado representa la parte del torsor debida al alabeo y a las correcciones asociadas a la curvatura.

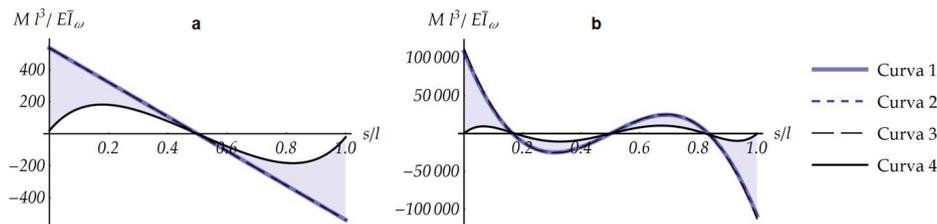


Figura 18. Descomposición del momento torsor normalizado en la viga biempotrada con sección abierta de 30 m de longitud. (a) viga recta; (b) curvatura $1/10 \text{ m}^{-1}$. Curva 1: Torsor total; Curva 2: Torsor de Saint-Venant, más torsor de alabeo, más corrección asociada a la deformación de torsión; Curva 3: Torsor de Saint-Venant, más torsor de alabeo; Curva 4: Torsor de Saint-Venant. El sombreado representa la parte del torsor debida al alabeo y a las correcciones asociadas a la curvatura.

4.4.1 Sección en U

En la Figura 17 se representa la descomposición (normalizada) del torsor en la viga biempotrada con sección abierta de 1 m de longitud en el caso de la viga recta (izquierda) y con una curvatura $1/10 \text{ m}^{-1}$ (derecha). Las esbelteces torsionales que corresponden a estos dos casos son, respectivamente, $\lambda_0 = 0.214$, y $\lambda_0 = 0.270$. Para estos valores tan bajos de la esbelteza, como era de esperar, el torsor de Saint-Venant es despreciable, y prácticamente la totalidad del torsor es consecuencia del alabeo de la sección. Para la viga curva, el valor del bicortante supera al torsor total, y entran en juego los términos correctores, que en este caso no son despreciables.

La Figura 18 recoge el caso de la viga de 30 m de longitud, de nuevo recta o con curvatura $1/10 \text{ m}^{-1}$. Las esbelteces torsionales asociadas son, respectivamente, $\lambda_0 = 6.407$, y $\lambda_0 = 8.081$. En este rango de valores de la esbelteza, el torsor de Saint-Venant es prácticamente nulo en las secciones de empotramiento, y representa una fracción apreciable del torsor total en secciones suficientemente alejadas de los extremos. Esta proporción se mantiene en el caso curvo, en el que el torsor total ya no tiene una distribución lineal.

4.4.2 Sección en cajón

Las Figuras 19 y 20 reflejan la descomposición del torsor en el caso de una viga biempotrada con sección en cajón. Para mostrar valores suficientemente diferentes de la esbelteza torsional, se ha estudiado una pieza muy corta de medio metro de longitud (Figura 19), y otra más larga de 2 m (Figura 20), en los casos de curvatura nula y curvatura $1/2.5 \text{ m}^{-1}$. En la pieza corta, las esbelteces torsionales son $\lambda_0 = 5.469$ (viga recta), y $\lambda_0 = 5.501$ (viga curva). En la viga de 2 m de longitud las esbelteces crecen hasta $\lambda_0 = 21.875$ (viga recta), y $\lambda_0 = 22.004$ (viga curva).

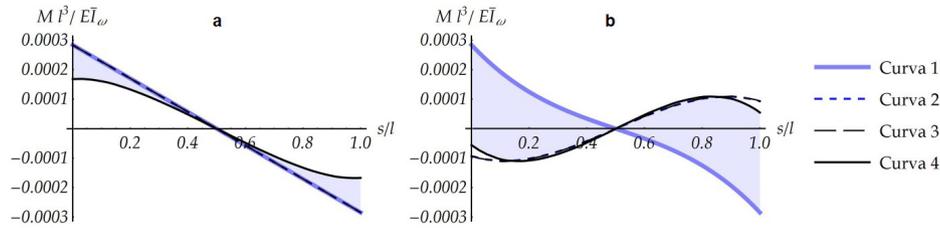


Figura 19. Descomposición del momento torsor normalizado en la viga biempotrada con sección cerrada de 0.5 m de longitud. (a) viga recta; (b) curvatura $1/2.5 \text{ m}^{-1}$. Curva 1: Torsor total; Curva 2: Torsor de Saint-Venant, más torsor de alabeo, más corrección asociada a la deformación de torsión; Curva 3: Torsor de Saint-Venant, más torsor de alabeo; Curva 4: Torsor de Saint-Venant. El sombreado representa la parte del torsor debida al alabeo y a las correcciones asociadas a la curvatura.

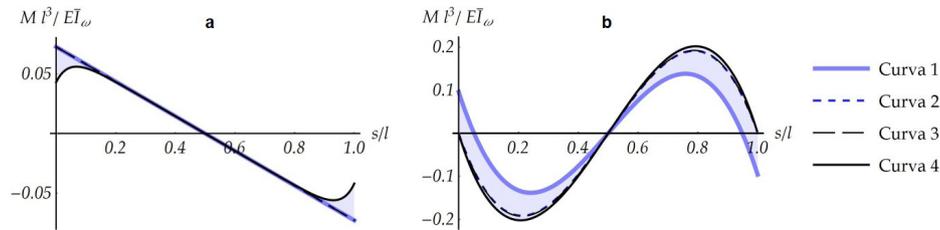


Figura 20. Descomposición del momento torsor normalizado en la viga biempotrada con sección cerrada de 2.0 m de longitud. (a) viga recta; (b) curvatura $1/2.5 \text{ m}^{-1}$. Curva 1: Torsor total; Curva 2: Torsor de Saint-Venant, más torsor de alabeo, más corrección asociada a la deformación de torsión; Curva 3: Torsor de Saint-Venant, más torsor de alabeo; Curva 4: Torsor de Saint-Venant. El sombreado representa la parte del torsor debida al alabeo y a las correcciones asociadas a la curvatura.

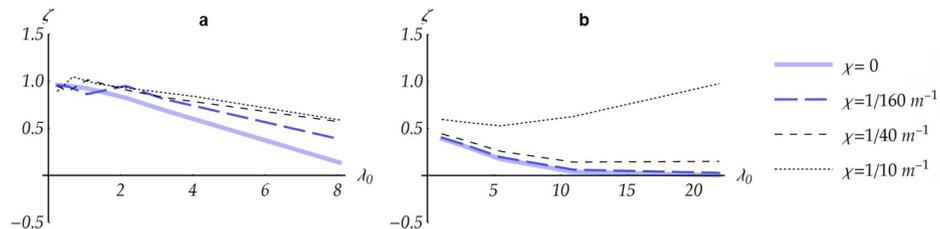


Figura 21. Relación entre el bicortante corregido y el torsor total, evaluados en $s/l = 0.3$, en función de la esbeltez torsional, para distintos valores de la curvatura. (a) viga con sección en U; (b) viga con sección en cajón

En la viga recta de menor esbeltez, el comportamiento es parecido al caso de sección abierta, salvo por el hecho de que en el empotramiento, el torsor de Saint-Venant no tiende a ser nulo. En la viga recta de mayor esbeltez, como era esperable, el bicortante es prácticamente nulo salvo en secciones muy próximas a los extremos, y su valor es en todo caso pequeño.

En los casos de sección cerrada con curvatura (diagramas de la parte derecha en las Figuras 19 y 20) sucede algo que no se había observado en la pieza recta: en valor absoluto, el torsor de Saint-Venant supera al torsor total; el bicortante y los términos correctores actúan entonces en sentido contrario al primero para que la suma iguale al torsor total.

4.4.3 Síntesis de resultados

Para concluir la sección de resultados hemos analizado la relación ζ entre valores absolutos del bicortante corregido y del

torsor total en función de la esbeltez torsional, para distintas curvaturas. Entendemos por bicortante corregido la diferencia entre el torsor total y el torsor de Saint-Venant.

$$\zeta = \frac{|M_s - GJ^*(\theta'_s - \chi\theta'_y)|}{|M_s|} \quad (55)$$

Esta relación es indicativa del mecanismo por el que se resiste la torsión: cuando tiende a 0 la torsión se resiste como torsión de Saint-Venant, y cuando tiende a 1, la torsión se resiste mediante alabeo de la sección. Los resultados se recogen en la Figura 21.

En ella se observa que en el rango de esbelteces pequeñas (sección en U y pieza corta) la relación ζ , evaluada en la sección $s = 0.3l$, es cercana a 1 (lo que indica que la torsión se resiste por alabeo), y que en ese caso el aumento de la curvatura

produce fluctuaciones en ella. En la viga larga con sección abierta (esbelteces torsionales del orden de 8) ζ llega a ser muy bajo en la viga recta, pero la curvatura incrementa la fracción de torsor resistida por alabeo. La viga con sección cerrada muy corta (esbelteces torsionales del orden de 5) ζ presenta ratios en el entorno de 0.5, pero en este caso el comportamiento es divergente: a medida que aumenta la longitud de la viga, en el caso recto o de curvatura baja ζ decrece rápidamente, y la torsión es de Saint-Venant para esbelteces superiores a 10, pero si la curvatura es alta, una fracción importante del torsor se resiste por otros mecanismos.

La Figura 21 sintetiza por tanto el comportamiento de vigas curvas de sección abierta y cerrada en función de su esbeltez torsional y de su curvatura.

5. CONCLUSIONES Y DESARROLLOS FUTUROS

Dedicaremos las próximas líneas a subrayar los aspectos más relevantes del análisis de piezas curvas expuesto en este trabajo y las conclusiones que de él se extraen.

- El ámbito del estudio se ha limitado a piezas con *directriz plana*, que son las únicas que pueden proporcionar sistemas autónomos. Esto no merma su interés, ya que esta condición se cumple en la mayoría de las estructuras de ingeniería civil, y en particular en los puentes.
- Se han establecido y analizado las *condiciones de desacoplamiento* de las respuestas arco y viga curva. Incluso para el modelo más elemental, el MVS, esto solo lo garantiza la directriz plana. Por el mismo motivo se ha adoptado un segunda restricción, que la sección sea simétrica respecto al plano osculador de la directriz; a falta de profundizar en este aspecto, esperamos que suavizando esta condición se puedan obtener soluciones suficientemente aproximadas. Es una de las líneas por las que continuará este trabajo.
- Se han obtenido las ecuaciones generales de la viga plana con curvatura variable, Ecuaciones (41), que evidencian el acoplamiento torsión-flexión. La formulación es aplicable a cualquier tipo de sección transversal de la viga que cumpla el requisito de simetría asociado al desacoplamiento de las respuestas, sea abierta o cerrada.
- Se ha justificado que, para el tipo de piezas considerado en el estudio, se pueden identificar la directriz material y la directriz principal.
- Así mismo, se ha mostrado que, para tales piezas, los parámetros \bar{I}_y , \bar{I}_z e \bar{I}_{yz} que incorporan la curvatura en su definición, se pueden sustituir por los momentos de inercia y el módulo de alabeo de la pieza recta prácticamente sin error cuando el centro de gravedad y el de esfuerzos cortantes están muy próximos, y con un error pequeño cuando no lo están. Además, se ha argumentado que el parámetro J^* se puede aproximar por el módulo de torsión de la pieza recta cuando la sección es cerrada. La deducción de las condiciones en las que se podría adoptar un valor de y_C e \bar{I}_{y_C} independiente de la curvatura, lo cual simplificaría notablemente el análisis de piezas de curvatura variable, queda pendiente para desarrollos posteriores.
- Se ha identificado la esbeltez torsional como parámetro

que gobierna la solución del sistema de ecuaciones diferenciales de la viga curva.

- El valor de la esbeltez depende fundamentalmente de la forma de la sección transversal y de la longitud de la viga, y en mucha menor medida de la curvatura. Esto último es especialmente cierto en secciones cerradas, en las que la esbeltez es prácticamente independiente de la curvatura.
- Se ha propuesto una descomposición del torsor total en una fracción asimilable al torsor de Saint-Venant, otra que denominamos bicortante, que coincide con el torsor de alabeo en la pieza recta, y otras dos fracciones correctoras, dependientes de la deformación generalizada de torsión y del cortante, que tienden a cero con la curvatura.
- A partir de esta descomposición, se ha estudiado la relación entre la torsión resistida por alabeo y la torsión total en función de la curvatura y de la esbeltez. Los resultados se han expresado en forma gráfica y muestran cómo, al contrario que en la viga recta, en vigas curvas ambos tipos de torsión son relevantes incluso con esbelteces altas.

Por último, el cómputo de la distorsión de la sección transversal, que Manterola también abordó para la viga recta en [1], podría llevarse a cabo en la viga curva con el mismo esquema general que el desarrollado para la torsión. Bastaría ampliar la hipótesis cinemática (16), incorporando al vector de desplazamientos generalizados del modelo dos componentes adicionales: la intensidad de distorsión $\gamma_D(s)$ y la intensidad de alabeo de distorsión $\varphi_D(s)$, conjugadas con un patrón de alabeo de distorsión $\omega_D(y,z)$, tal y como se muestra en [15].

6. LISTA DE SÍMBOLOS

SÍMBOLOS GENERALES

$\tilde{\Gamma}$	Curva directriz material de la pieza alargada (lugar geométrico de los centros de gravedad de las secciones)
$\tilde{\mathbf{P}}$	Vector posición de los puntos de la directriz material
\tilde{y}_0, \tilde{z}_0	Coordenadas del eje principal en la sección transversal, referidas al centro de gravedad
Γ	Curva directriz principal de la pieza alargada
s	Longitud de arco sobre la directriz principal
$\chi(s)$	Curvatura de la directriz principal
\mathbf{P}	Vector posición de la directriz principal
y, z	Coordenadas en la sección transversal, referidas al eje principal
μ	Determinante del tensor métrico del espacio viga, igual a $1 - \chi y$

SÍMBOLOS RELACIONADOS CON LA TEORÍA UNIFICADA

$\mathbf{d}^*(s,y,z)$	Vector de desplazamientos del sólido tridimensional, de tres componentes
$\mathbf{u}(s)$	Vector de desplazamientos generalizados del modelo unidimensional
$\mathbf{h}(y,z)$	Operador cinemático característico del modelo propuesto. Relaciona los desplazamientos generalizados del modelo con los del sólido

$\mathbf{e}^*(s,y,z)$	Vector de deformaciones del sólido tridimensional, de seis componentes
$\mathbf{e}(s)$	Vector de deformaciones generalizadas del modelo unidimensional
\mathbf{B}_r	Matrices de deformación (Relacionan las deformaciones generalizadas del modelo con las del sólido.)
$\mathbf{Q}(s)$	Vector de densidades lineales de carga (se aplica al modelo unidimensional)
$F(s,\mathbf{u},\mathbf{e})$	Densidad lineal de energía potencial del modelo unidimensional
\mathbf{C}	Operador constitutivo del sólido
\mathbf{D}_{rs}	Operadores constitutivos del modelo unidimensional
$\mathbf{f}(s)$	Vector de esfuerzos del modelo unidimensional
$\mathbf{H}(s)$	Operador de equilibrio del modelo unidimensional
\mathbf{D}_{00}	Operador de acoplamiento del modelo unidimensional
$\mathbf{E}(s)$	Vector estado del modelo. Agrupa los desplazamientos y esfuerzos, incógnitas del problema
$\mathbf{W}(s)$	Operador Wronskiano del modelo. Relaciona el vector estado con su primera derivada
$\mathbf{G}(s)$	Operador fundamental principal. Resuelve el problema de equilibrio homogéneo y permite construir la solución del problema de valores iniciales asociado a \mathbf{W} así como resolver los problemas de contorno de la pieza de curva

SÍMBOLOS RELACIONADOS CON EL MODELO DE VIGA CURVA

y_C	Coordenada del centro de torsión (referida al eje principal)
\hat{y}, \hat{z}	Coordenadas en la sección transversal referidas al centro de torsión
$\hat{\omega}(y,z)$	Alabeo unitario o patrón de alabeo de la sección transversal
$w(s)$	Desplazamiento transversal de los puntos de la directriz
$\theta_x(s)$	Rotación de eje tangente a la directriz de las secciones transversales
$\theta_y(s)$	Rotación de flexión de las secciones transversales
$\varphi(s)$	Intensidad de alabeo
$Q_z(s)$	Esfuerzo cortante
$M_s(s)$	Momento torsor
$M_y(s)$	Momento flector
$B_\omega(s)$	Bimomento
$M_\omega(s)$	Bicortante o momento torsor de alabeo
\bar{A}	Área de la sección transversal
$\bar{I}_{yy}, \bar{I}_{zz}, \bar{I}_{yz}$	Momentos de inercia y producto de inercia referidos al eje principal
\bar{I}_0	Momento polar de inercia con respecto al eje principal
$\bar{I}_\omega, \bar{I}_{y\omega}$	Módulo de alabeo y producto de alabeo de la sección
\bar{W}, \bar{Q}	Nuevas constantes estáticas seccionales referidas al centro de torsión
W_0	Resultado de referir la constante \bar{W} al eje principal
κ_0^*, y_C^*	Nuevos parámetros dependientes de la curvatura
κ_0^*, J^*	Módulo de torsión corregido por efecto de la curvatura
λ_0	Esbeltez de torsión de la viga curva

Bibliografía

- [1] Manterola, J. (1976) *La sección abierta y cerrada bajo sollicitación excéntrica*. Hormigón - Puentes II, A.F.C.E., Monografía n° 15
- [2] Manterola, J. (1977) *Cálculo de tableros por el método del emparrillado*, Hormigón y Acero, núm. 122, pp. 93-149
- [3] Manterola, J. (1977), *Análisis de tableros rectos de puentes por métodos armónicos*, I.E.T.C.C., Monografía n° 343
- [4] Vlassov, B.Z., *Pièces longues en voiles minces*, Eyrolles (1962)
- [5] Kollbrunner, C.F.; Basler, K., *Torsion in structures. An engineering approach*, Springer (1969)
- [6] Kirchhoff, G., (1859) *Ueber das Gleichgewicht und die Bewegung eines unendlich dünnen elastischen Stabes*. J. für die reine und Angew. Math.; núm. 56, pp. 285-313.
- [7] Winkler, E. (1858) *Formänderung und Festigkeit gekrümmter Körper, insbesondere der Ringe*. Civilingenieur; vol. 4, pp. 232-246.
- [8] Timoshenko, S.P. *Resistencia de Materiales*. Espasa Calpe (1967).
- [9] Courbon, J. *Tratado de Resistencia de Materiales*, (2ª ed.). Aguilar (1968).
- [10] Anderson, C.G. (1959) *Flexural Stresses in Curved Beams of I- and Box-section*. Proc. Inst. Mech. Eng.; vol. 163 núm. 1, pp. 295-306.
- [11] Samartín, A., González de Cangas, J.R. *Teoría elemental de vigas alabeadas. Aplicación a la viga balcón circular*. Universidad de Santander. ETSI de Caminos, Canales y Puertos. (1980)
- [12] Gimena, L., Gimena, F.N., Gonzaga, P. (2008) *Structural analysis of a curved beam element defined in global coordinates*, Engineering Structures, vol. 30, pp. 3355-3364
- [13] Barretta R., Barretta A. (2010) *Shear stresses in elastic beams: an intrinsic approach*, European Journal of Mechanics A/Solids, vol. 29, pp. 400-409
- [14] Romano, G., Barretta, A., Barretta, R. (2012) *On torsion and shear of Saint-Venant beams*, European Journal of Mechanics A/Solids, vol. 35, pp. 47-60
- [15] Yamada, Y.; Ezawa, Y. (1977) *On curved finite elements for the analysis of circular arches*. Int. J. Numer. Methods Eng.; vol. 11, núm. 11, pp. 1635-1651.
- [16] Lee, P-G.; Sin, H-C. (1994) *Locking-free curved beam element based on curvature*. Int. J. Numer. Methods Eng.; vol. 37, núm. 6, pp. 989-1007.
- [17] Choit, J.; Lim, J. (1995) *General curved beam elements based on the assumed strain fields*. Comput. Struct.; vol. 55, núm. 3, pp. 379-86.
- [18] Raveendranath, P.; Singh, G.; Venkateswara Rao, G. (2001) *A three-noded shear-flexible curved beam element based on coupled displacement field interpolations*. Int. J. Numer. Methods Eng.; vol. 51, núm. 1, pp. 85-101.
- [19] Reissner, E. (1981) *On finite deformations of space-curved beams*. ZAMP Zeitschrift für Angew. Math. und Phys.; vol. 32, núm. 6, pp. 734-44.
- [20] Simó, J.C. (1985) *A finite strain beam formulation. The three-dimensional dynamic problem. Part I*. Comput. Methods Appl. Mech. Eng.; vol. 49, núm. 1, pp. 55-70.
- [21] Simó, J.C.; Vu-Quoc, L. (1991) *A Geometrically-exact rod model incorporating shear and torsion-warping deformation*. Int. J. Solids Struct.; vol. 27, núm. 3, pp. 371-93.
- [22] Monleón, S. *Teoría unificada de elementos estructurales esbeltos*. Editorial de la Universidad Politécnica de Valencia (2017)
- [23] Timoshenko, S. y Goodier, J.N. *Teoría de la Elasticidad*. Urmo (1972)
- [24] Sáez Benito, J.M. *Cálculo matricial de estructuras formadas por piezas rectas*. Fondo editorial de ingeniería naval (1975)