

Disponible en [www.hormigonyacero.com](http://www.hormigonyacero.com)

Hormigón y Acero 2019; 70(287):75-84  
<https://doi.org/10.1016/j.hya.2018.10.002>

# Análisis por elementos finitos de la rotura por cortante en vigas de hormigón armado y pretensado

## *Finite element analysis of shear failure of reinforced and prestressed concrete beams*

Alexander Kagermanov

IUSS, Pavia, Italia

Recibido el 23 de enero de 2018; aceptado el 1 de octubre de 2018

### RESUMEN

En el artículo se presenta la aplicación del método de elementos finitos a la rotura por cortante en vigas de hormigón armado y pretensado con bajas cuantías, o incluso total ausencia, de armadura transversal. Se describe en detalle el modelo constitutivo del hormigón fisurado empleado, el cual se basa en un modelo ortotrópico bidimensional con fisuración distribuida. El modelo se implementó en un elemento finito de tipo membrana en el programa de cálculo no lineal IDEEA. El modelo propuesto se verifica con varios ensayos experimentales disponibles en la literatura. El primer ejemplo concierne la respuesta de una viga de gran canto de 19 m de luz, cuya rotura se produjo en la zona sin armadura transversal por tracción diagonal. El segundo ejemplo analiza el voladizo de estribo de un paso superior colapsado en 2006. En el último ejemplo se analizan una serie de vigas de hormigón pretensado en doble T, donde además de predecir la curva carga desplazamiento, se presentan resultados de abertura de fisura en la zona del alma para distintos niveles de carga aplicada.

© 2019 Asociación Española de Ingeniería Estructural (ACHE). Publicado por Cinter Divulgación Técnica S.L.L. Todos los derechos reservados.

PALABRAS CLAVE: Elementos finitos; Vigas hormigón; Cortante; Vigas pretensadas; Colapso puente

### ABSTRACT

Three application examples are presented of the finite element method to the analysis of shear critical reinforced and prestressed concrete beams, with little or no transverse reinforcement. The constitutive model for cracked concrete is described. This is based on an orthotropic smeared-crack model, which has been implemented in a membrane finite element available in the computer program IDEEA. The proposed model is verified with several experimental tests available in the literature. In the first case, we analyze the response of a 19 m long deep beam that failed in the right span with no transverse reinforcement in diagonal-tension failure. The second example concerns an overpass structure that collapsed in 2006 due to shear failure of the cantilever slab in one of the abutments. In the last example we analyze a number of prestressed concrete beams, where also results regarding the maximum crack width in the beam web region at different levels of applied load are presented.

© 2019 Asociación Española de Ingeniería Estructural (ACHE). Published by Cinter Divulgación Técnica S.L.L. All rights reserved.

KEYWORDS: Finite elements; Reinforced concrete beams; Shear; Prestressed beams; Collapse bridge

## 1 INTRODUCCIÓN

Actualmente, existe un interés creciente por métodos fiables y precisos de evaluación de estructuras existentes de hormigón armado (HA) y pretensado (HP), debido principalmente

a los siguientes factores: 1) aumento de estructuras existentes cuya antigüedad supera los 50 años (como referencia, según la EHE-08 la vida útil nominal de estructuras de edificación es 50 años); 2) aumento de las cargas de tráfico, y 3) actualización de

\* Correo electrónico: [alexander.kagermanov@iusspavia.it](mailto:alexander.kagermanov@iusspavia.it)

las normativas de diseño hacia mayores niveles de seguridad y servicio. Como consecuencia, muchas de las estructuras existentes, si son verificadas de acuerdo con los estándares actuales, no cumplirían con las normativas vigentes

Especial preocupación recibe el diseño a cortante, ya que compromete de forma directa la integridad estructural, lleva asociado un tipo de rotura frágil dificultando una posible intervención a tiempo, muchos elementos estructurales típicamente se han diseñado sin armadura de cortante (p. ej., ménsulas, losas, muros, etc.), y además todavía no existe una teoría universal y unánime capaz de predecir la resistencia a cortante para cualquier tipo de carga, geometría y condiciones de apoyo. Como resultado, las normativas vigentes (ACI 318-11, Eurocódigo 2 [EC2], CSA, etc.) proporcionan formulaciones diferentes que en determinados casos aportan valores muy distintos y alejados de la realidad.

De los distintos modelos sobre resistencia a cortante que aparecen en la bibliografía, cabe citar aquí aquellos basados en la teoría del campo de compresiones [1–4], también denominados modelos ortotrópicos con fisuración distribuida (*orthotropic smeared-crack*). En esencia, dichos modelos se basan en la transformación del campo tensional a las direcciones principales del hormigón fisurado, en las cuales se plantean unas leyes constitutivas en tracción y compresión que permiten caracterizar la respuesta de un punto material sujeto a un estado biaxial de tensiones. La teoría presenta una clara base física y se ha aplicado con buenos resultados al análisis frente a cortante. Versiones simplificadas adaptadas al diseño aparecen en el Código Modelo 2010, CSA, AASTHO [5–9]. Además, la teoría es lo suficientemente genérica como para implementarse en programas de cálculo no lineal basados en el método de los elementos finitos (MEF) [10–12]. Sin embargo, su aplicación en el caso de ausencia de armadura transversal, cuando la rotura a cortante se produce por tracción diagonal, sigue siendo objeto de investigación.

En el presente trabajo se presenta un modelo constitutivo del hormigón que incorpora conceptos de la mecánica de fractura para su aplicación a la rotura por cortante de vigas de HA y HP con bajas cuantías, o incluso total ausencia, de armadura transversal. Como aplicación se analizan 3 ejemplos con clara relevancia práctica. El primero concierne la respuesta de una viga de gran canto de 19 m de luz, donde la rotura se produjo en la zona sin armadura transversal por tracción diagonal. En el segundo se analiza el voladizo de estribo del paso superior Concorde, responsable del colapso del puente en el año 2006. En el último ejemplo se investiga una serie de vigas de HP en doble T, incluyendo resultados numéricos de abertura de fisura en la zona del alma para distintos niveles de carga aplicada. En todos los ejemplos se describe en detalle el modelo numérico, condiciones de carga y apoyo, y los parámetros del modelo constitutivo empleado.

## 2. MODELO CONSTITUTIVO DEL HORMIGÓN FISURADO

El modelo constitutivo empleado consiste en un modelo ortotrópico con fisuración distribuida, originalmente propuesto en las referencias [13–15]. Dicho modelo fue modificado incorporando conceptos de la mecánica de fractura para extender su aplicabilidad a elementos con bajas cuantías de armado, donde la respuesta global viene determinada por la propagación de fisuras diagonales.

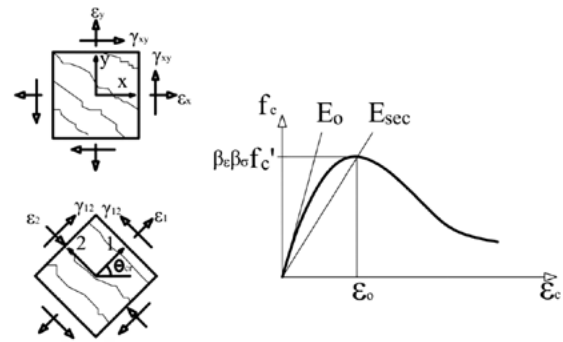


Figura 1. Modelo constitutivo: transformación del campo de deformaciones y envolvente de compresiones.

A continuación, se resumen los aspectos más relevantes.

Conocido el estado deformacional en el sistema de referencia x-y,  $\epsilon_{xy}$ , en un punto material del hormigón fisurado, y el ángulo de inclinación de las fisuras,  $\theta_{cr}$ , el campo de deformaciones en la dirección de las fisuras viene dado como:

$$\epsilon_{12} = T(\theta_{cr}) \epsilon_{xy} \quad (1)$$

donde  $T(\theta_{cr})$  es la matriz de transformación entre el sistema de referencia x-y y el 1-2 (fig. 1). El ángulo  $\theta_{cr}$  se determina cuando se forma la primera fisura, es decir, cuando la tensión principal de tracción supera la resistencia a tracción del hormigón ( $\sigma_1 > f_{ct}$ ), y a partir de allí se mantiene fijo durante el análisis. Este hecho da lugar a que puedan existir deformaciones tangenciales en el plano de la fisura, lo cual requiere un modelo constitutivo que relacione dichas deformaciones con sus correspondientes tensiones tangenciales, tal como se explica a continuación.

Las tensiones correspondientes a las deformaciones  $\epsilon_{12}$  pueden obtenerse a partir de leyes constitutivas «uniaxiales equivalentes» en compresión, tracción y en tensión tangencial. En compresión se utiliza la curva de Popovics como envolvente, caracterizada por un módulo de rigidez inicial,  $E_{cc}$ , la resistencia a compresión,  $f'_c$ , y su correspondiente deformación,  $\epsilon_0$  (fig. 1). La ecuación de la envolvente viene dada como:

$$f_c = \frac{f'_c x r}{r-1+x^r} \quad (2)$$

donde  $x = \epsilon_c/\epsilon_0$ ,  $r = E_{cc}/(E_{cc}-E_{sec})$  y  $E_{sec} = f'_c/\epsilon_0$ . La respuesta en compresión viene reducida en función de las deformaciones de tracción en la dirección perpendicular a las fisuras,  $\epsilon_1$ , fenómeno conocido como «compression softening». Dicha reducción viene cuantificada mediante el factor  $\beta_\epsilon$  dado como:

$$\beta_\epsilon = \frac{1}{0,80 - 0,34 \epsilon_1/\epsilon_0} \quad (3)$$

En el caso de compresión biaxial, se produce un aumento de la resistencia debido al confinamiento lateral, el cual viene cuantificado por el factor  $\beta_\sigma$ :

$$\beta_\sigma = 1 + 0,92 \frac{\sigma_1}{f'_c} - 0,76 \left( \frac{\sigma_1}{f'_c} \right)^2 \quad (4)$$

donde  $\sigma_1$  es la tensión de compresión en la dirección ortogonal. Como puede observarse, dichas leyes «uniaxiales» realmente

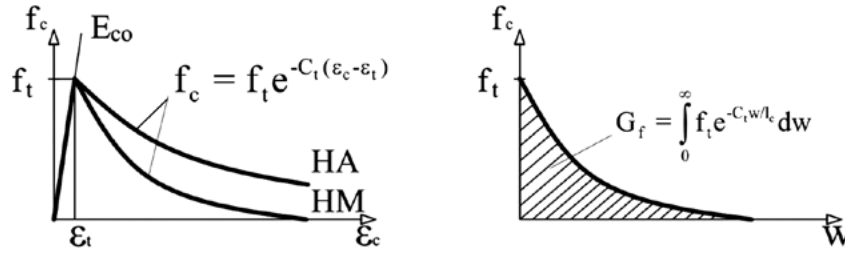


Figura 2. Ley tensión deformación en tracción y tensión de tracción abertura de fisura.

están acopladas entre sí, y por tanto, no son totalmente independientes.

En tracción, se utiliza una ley lineal hasta el punto de fisuración, seguida de un tramo descendente caracterizado por el coeficiente  $C_t$ , dado como:

$$f_c = f_t e^{-C_t(\epsilon_c - \epsilon_t)} \quad (5)$$

donde  $f_t$  es la resistencia a tracción, y  $\epsilon_t$  la correspondiente deformación. El tramo descendente tiene en consideración la contribución del hormigón entre fisuras para transmitir tracciones (*tension-stiffening*), que se transfieren por tensiones de adherencia entre hormigón y acero. El valor del coeficiente  $C_t$  determina la pendiente del tramo descendente, la cual depende de la cuantía de armado, características de adherencia, resistencia del hormigón, etc. Para un HA con muy bajas cuantías u hormigón en masa (HM), el descenso será más pronunciado, mientras que para un HA con cuantías convencionales (HA) el descenso será menor. En este último caso, valores de  $C_t \approx 1.000$  presentan un buen ajuste con resultados experimentales [1]. Para el caso HM, el coeficiente  $C_t$  debe calcularse con base en el concepto de energía de fractura,  $C_f$ , definida como el área bajo la curva tensión de tracción-abertura de fisura (fig. 2). Puesto que la abertura de fisura viene relacionada con la deformación de tracción como  $w = \epsilon_t l_c$  ( $l_c$  = longitud característica), el área bajo la curva  $f_{c-w}$  es igual a:

$$G_f = \frac{l_c f_c}{C_t} \quad (6)$$

En la bibliografía aparecen distintas propuestas para  $G_f$  y  $l_c$ . En el caso de fisuras uniformemente distribuidas con aberturas similares,  $l_c$  corresponde al espaciamiento medio entre fisuras, el cual puede estimarse con expresiones de la normativa. En el caso de fisuras concentradas, por ejemplo fisuras diagonales de cortante, se produce una localización de deformaciones a lo largo de la fisura, lo cual puede aumentar la sensibilidad del modelo numérico a las dimensiones de la malla de discretización. Es, por tanto, necesario asociar  $l_c$  a las dimensiones del elemento finito del modelo numérico. En el presente caso, se utilizaron los valores de  $G_f$  propuestos por VOS 1973 [11], mientras que para  $l_c$  se tomó como referencia la dimensión de la diagonal del elemento finito utilizado en el análisis.

En cuanto a deformaciones tangenciales en el plano de la fisura,  $\gamma_{12}$ , se utiliza una ley que depende del módulo de rigidez a cortante del hormigón fisurado, el cual se obtiene por reducción del módulo elástico inicial mediante el factor  $\beta$ . Además, la

tensión tangencial máxima sobre la fisura se limita al valor  $v_{ci,max}$ , valor empírico obtenido de ensayos *push-off* que representa la resistencia máxima por engranamiento de áridos [1]:

$$\tau_{12} = \beta G_0 \gamma_{12} < v_{ci,max} \quad (7)$$

$$v_{ci,max} = \frac{0,18 \sqrt{f_c}}{0,31 + \frac{24w}{a_g + 16}} \quad (8)$$

donde  $\beta$  es un factor de reducción constante,  $G_0$  es el módulo de rigidez del hormigón sin fisurar ( $G_0 = E_c/2 [1 + \nu]$ ), el coeficiente de Poisson en el rango elástico,  $w$  es la abertura de fisura y  $a_g$  es el tamaño máximo de árido. De nuevo, distintas propuestas aparecen en la literatura para el valor de  $\beta$ . Normalmente,  $0 < \beta < 0,50$ , dependiendo de la cuantía de armado. En el presente caso se utiliza la expresión simplificada que relaciona  $\beta$  con la cuantía de armadura transversal,  $\rho_t$ :

$$\beta = \sqrt[3]{\rho_t} \quad (9)$$

En el caso de  $\rho_t = 0$  (ausencia de armadura transversal), se adopta para  $\beta$  un valor mínimo entre 0,001-0,0001 por cuestiones de estabilidad numérica.

### 3. IMPLEMENTACIÓN EN EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

El campo de deformaciones que se utiliza como entrada en el modelo constitutivo se obtiene a partir de los desplazamientos nodales del elemento finito como:

$$\epsilon_{xy} = Bd \quad (10)$$

donde  $B$  es la matriz de compatibilidad y  $d$  es el vector de desplazamientos nodales del elemento. En el presente caso se utiliza un elemento cuadrilátero isoparamétrico (tipo membrana) con 4 nodos y 3 grados de libertad por nodo: 2 traslacionales y uno rotacional. Dicho elemento se obtiene por condensación de los nodos intermedios de un elemento con 8 nodos (4 en esquinas y 4 intermedios), en cuya formulación aparecen funciones de interpolación hasta orden 3, por lo que un único elemento es capaz de reproducir distribuciones parabólicas de deformación de forma exacta.

Para el caso del hormigón, el campo de deformaciones  $\epsilon_{xy}$  se transformaría a las direcciones de fisuración según la ecuación

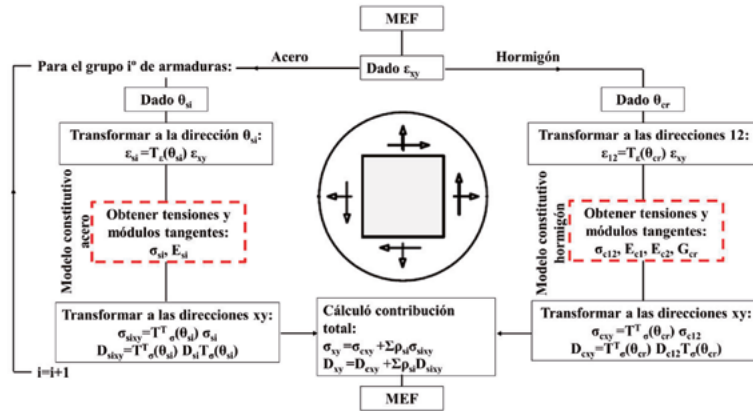


Figura 3. Diagrama de flujo del modelo constitutivo en el MEF.

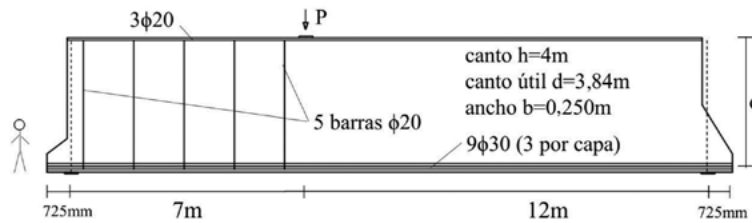


Figura 4. Viga de gran canto ensayada en la Universidad de Toronto.

ción (1), mientras que en el caso de existir armadura distribuida  $\epsilon_{xy}$  se transformaría a la dirección de las barras, inclinadas en un ángulo  $\theta_{si}$  respecto del eje x, donde el subíndice i se refiere al i° grupo de barras. En el caso de existir varios grupos de barras, como por ejemplo en el caso de armadura longitudinal y transversal,  $\epsilon_{xy}$  se transformaría en cada dirección para posteriormente obtener las correspondientes tensiones.

Las tensiones y los módulos tangentes del hormigón y el acero se obtendrían de los modelos constitutivos correspondientes, y se volverían a transformar al sistema de referencia xy para hallar el vector de fuerzas internas y la matriz de rigidez tangencial. El vector de fuerzas internas del elemento,  $f_{int}$ , se obtiene por integración de las tensiones totales,  $\sigma_{xy}$ , multiplicadas por la matriz de compatibilidad como:

$$f_{int} = \int_x B^T \sigma_{xy} dV \quad (11)$$

donde  $\sigma_{xy}$  incluye la contribución del hormigón y acero. Los módulos tangentes  $E_{c1}, E_{c2}, E_{si}, \dots$  se utilizan para formar la matriz de rigidez del material,  $D_{XY}$ , la cual para el caso genérico de presencia de hormigón y acero vendría dada por la suma de ambas partes como:

$$D_{xy} = D_{cxy} + \sum_i \rho_{si} D_{sxy} \quad (12)$$

donde si es la cuantía del i° grupo.  $D_{cxy}$  se obtiene a partir de la matriz de rigidez del material en el sistema de referencia de las fisuras,  $D_{c12}$ , y  $D_{sxy}$  a partir de su correspondiente en el sistema de referencia de las armaduras  $D_{si}$ . Finalmente, la matriz de rigidez tangente del elemento  $K_{el}$  se obtiene por integración de la matriz compuesta  $D_{xy}$ :

$$K_{el} = \int_V B^T D_{xy} B dV \quad (13)$$

El procedimiento se muestra de forma resumida en el diagrama de flujo en la figura 3. Mayores detalles aparecen en las referencias [13–15].

#### 4. APLICACIÓN A LA ROTURA POR CORTANTE

##### 4.1 Ejemplo 1: viga de HA de gran canto de 19 m de luz

La viga de gran canto mostrada en la figura 4 fue ensayada en la Universidad de Toronto en 2015 con el objetivo de investigar la influencia del efecto escala sobre la resistencia a cortante en elementos de gran espesor sin armadura transversal. La viga se ensayó bajo una carga puntual excéntrica a 7 m del apoyo izquierdo y 12 m del derecho, resultando en valores a/d de 1,82 y 3,12, respectivamente, donde d es el canto útil y a la luz a cortante. El semivano a cortante izquierdo presentaba 5 barras Φ20 como armadura transversal, correspondiente a la cuantía mínima según la ACI-318. La rotura se esperaba, por tanto, en el semivano derecho, el cual carecía de armadura transversal y presentaba una relación a/d > 2, impidiendo la formación de una posible biela que transfiriera la carga directamente al apoyo. Para resistir la flexión, se dispusieron 9 barras Φ30 en la parte inferior distribuidas en 3 capas ( $\rho_1 = 0,66\%$ ), y ancladas en los extremos mediante pernos roscados con 65 mm de cabeza embebida en el hormigón. La tensión de fluencia del acero fue de 522 MPa para la armadura longitudinal y 573 MPa para la transversal. La resistencia del hormigón en el día del ensayo fue alrededor de 40 MPa.

En el modelo numérico se utilizaron 842 elementos membrana (fig. 5). En el apoyo izquierdo se dispuso una rótula fija, fijando los grados de libertad horizontal y vertical, mientras

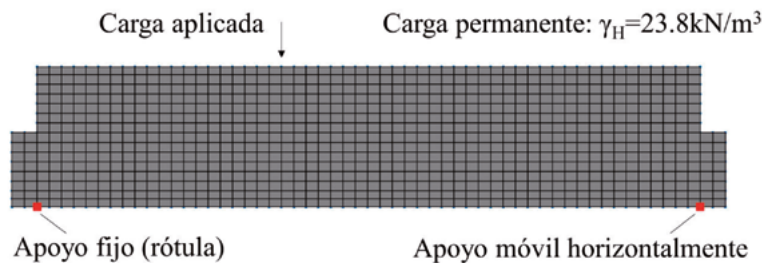


Figura 5. Modelo numérico de la viga de gran canto.

TABLA 1

Parámetros del modelo constitutivo del ejemplo 1

Parámetro	Valor
Resistencia a compresión	$f_c' = 40$ MPa
Deformación correspondiente a $f_c'$	$\epsilon_o = 0,0025$
Resistencia a tracción	$f_{ct} = 3$ MPa
Factor de reducción del módulo de cortante	$\beta = 0,1$ (semivano izquierdo); $= 0,0001$ (semivano derecho)
Tamaño máximo de árido	$a_g = 14$ mm
Energía de fractura	$G_f = 0,000075$ MN/m
Coefficiente $C_t$ (ecuación 5)	$C_t = 16.000$ (elementos sin arm.) $C_t = 8.000$ (elementos con arm. long. o trans.) $C_t = 1.000$ (elementos con arm. long. + trans.)

que en el derecho solo se fijó el vertical. La carga debida al peso propio ( $\gamma_H = 23,8$  kN/m<sup>3</sup>) se incluyó directamente en el modelo como carga permanente, ya que tenía un efecto no despreciable en el análisis. Dicha carga se definió en cada elemento y se mantuvo constante durante el análisis, mientras que la carga aplicada se incrementaba hasta la rotura. La armadura transversal se definió como distribuida, con  $\rho_t = 0,0008$  en el semivano izquierdo y cero en el derecho. La armadura longitudinal de tracción se distribuyó en la banda formada por las 8 filas de elementos inferiores, correspondiente a la zona donde las barras influyen de forma efectiva en la abertura de las fisuras. La cuantía longitudinal para dichos elementos fue de  $\rho_s = 0,012$ . La armadura longitudinal de compresión se asignó a los elementos de las 2 filas superiores, resultando en una cuantía de  $\rho_s = 0,0164$ . Los parámetros correspondientes al modelo constitutivo del hormigón se resumen en la tabla 1.

La figura 6 compara los resultados numéricos y experimentales en términos de carga aplicada-desplazamiento vertical en el punto de aplicación de la carga. La respuesta se caracteriza por un tramo inicial muy rígido previo a la fisuración, seguido de una considerable reducción de la rigidez ( $\approx 80\%$ ) tras la aparición de las primeras fisuras de flexión, y finalmente la formación/propagación de fisuras diagonales a partir de las fisuras verticales de flexión hasta la rotura en el semivano derecho por cortante (tracción-diagonal). La figura 7 muestra la distribución de fisuras y de deformaciones de tracción en la fase elástica, la fase de propagación de fisuras (desplazamiento vertical  $\delta = 10$  mm) y en rotura ( $\delta = 14$  mm).

La rotura se produce bajo una carga aplicada de apenas 600 kN, valor que corresponde a 1,3 veces el peso propio de la viga. En vigas convencionales sin armadura transversal con fallo por cortante, dicho valor de la resistencia es del orden de 20 veces el peso propio. Este fenómeno de reducción de la resistencia

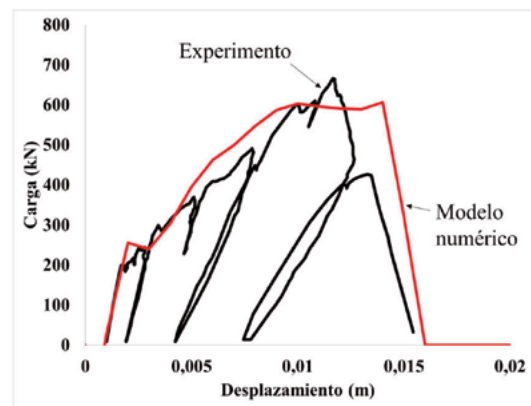


Figura 6. Curva carga-desplazamiento de la viga de gran canto.

a cortante con el aumento del tamaño se denomina efecto escala y se atribuye al mayor espaciamiento entre fisuras en la zona del alma en vigas de gran canto, lo cual produce mayores aberturas de fisura y, consecuentemente, una disminución de la tensión tangencial última (véase también la ecuación 8).

El cálculo de la resistencia según el EC2 vendría dado como:

$$V_{Rd,c} = \frac{0,18}{\gamma_c} k (100 \rho_l f_{ck})^{1/3} b_w d = 0,18 \cdot 1,23 (100 \cdot 0,0066 \cdot 40)^{1/3} 0,25 \cdot 3,840 = 626 \text{ kN} \quad (14)$$

donde  $\gamma_c$  es el coeficiente de seguridad ( $\gamma_c = 1$ ),  $k$  es el factor de escala,  $\rho_l$  la cuantía de armadura longitudinal de tracción,  $b_w$  el ancho eficaz,  $d$  el canto útil y  $f_{ck}$  la resistencia característica



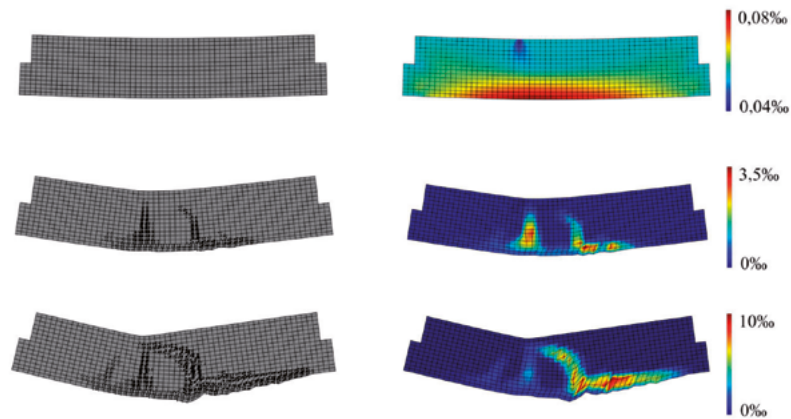


Figura 7. Distribución de fisuras y deformación principal de tracción en la viga de gran canto.

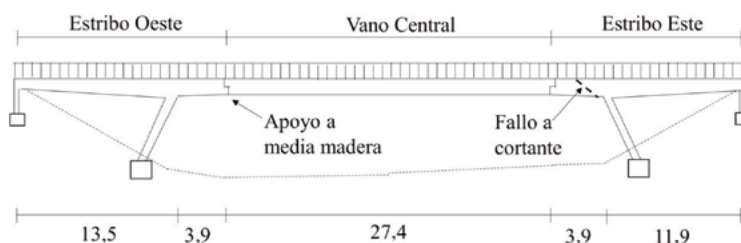


Figura 8. Alzado del paso superior Concorde.

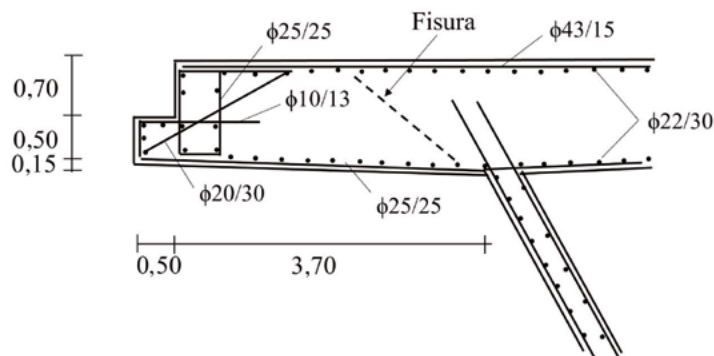


Figura 9. Armado del estribo este del paso superior Concorde.

a compresión (en este caso valor medio igual a 40 MPa). El valor de la carga de rotura para una sección a una distancia  $d$  del apoyo, considerando la contribución del peso propio, sería:

$$P_u = \frac{19}{7} (V_{rd,c} - V_G) = \frac{19}{7} (626 - 151,3) = 1288,5 \text{ kN} \quad (15)$$

donde  $V_G$  es el cortante debido al peso propio.

#### 4.2 Ejemplo 2: voladizo de estribo del paso superior Concorde

El paso superior La Concorde situado sobre la Autopista 19 en Laval (Montreal), colapsó en septiembre del 2006 después de 36 años en servicio (fig. 8) [16]. El colapso se produjo esencialmente bajo carga permanente por fallo a cortante de

la losa en voladizo del estribo este, la cual daba apoyo a un vano central de 27,4 m de luz y 10,8 m de ancho, formado por 10 vigas en cajón monocelular apoyadas sobre apoyos a media madera. Es de destacar que la fisura diagonal responsable del colapso no se formó en la región D del apoyo a media madera, sino en la región central de la losa, que podría considerarse como región B. El armado del estribo se muestra en la figura 9, de donde se observa la ausencia de armadura transversal en la losa, dejando únicamente al hormigón la transferencia del esfuerzo cortante. Tanto el apoyo como la losa cumplían con las normativas vigentes en el momento del diseño (AASTHO 1965, CSA 1966) [17,18], las cuales no contemplaban como requisito la presencia de una cuantía mínima de armadura transversal.

Como parte de la investigación sobre el colapso del puente, se ensayó un prototipo a escala real de la losa en voladizo (fig. 9).

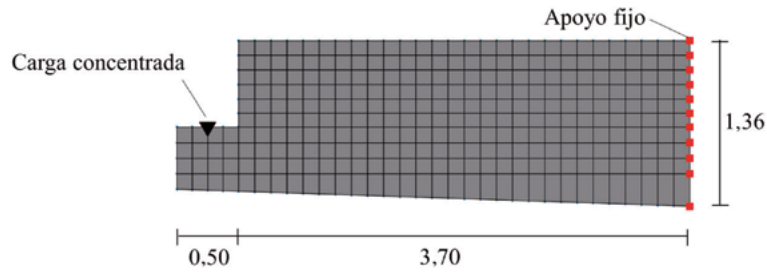


Figura 10. Modelo numérico del voladizo.

TABLA 2  
Parámetros del modelo constitutivo del ejemplo 2

Parámetro	Valor
Resistencia compresión	$f_c' = 30$ MPa
Deformación correspondiente a $f_c'$	$\epsilon_{c0} = 0,0025$
Resistencia a tracción	$f_{ct} = 1,5$ MPa
Factor de reducción del módulo de cortante	$\beta = 0,001$
Tamaño máximo de árido	$a_g = 20$ mm
Energía de fractura	$G_f = 0,000065$ MN/m
Coefficiente $C_t$ (ecuación 5)	$C_t = 4,000$

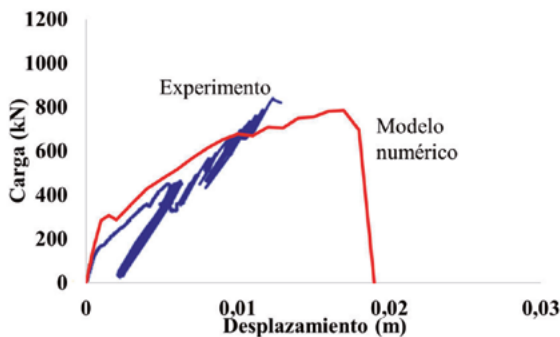


Figura 11. Curva carga-desplazamiento del voladizo.

El prototipo presentaba una luz libre de 4,2 m y un ancho de 1,2 m, con una relación  $a/d$  en el arranque de 2,9. En el modelo numérico (fig. 10) se utilizaron 296 elementos con la armadura distribuida según la figura 9. La tensión de fluencia se tomó como 276 MPa, con una deformación en rotura del 10%. Los parámetros del modelo constitutivo se resumen en la tabla 2. En el ensayo la carga se aplicó de forma cíclica hasta la rotura, la cual se produjo tras 57.800 ciclos de carga, mientras que en el modelo numérico se aplicó de forma monotónica para minimizar el tiempo de análisis.

Tanto en el modelo numérico como en el ensayo, la rotura se produjo por tracción-diagonal a lo largo de una fisura inclinada en la zona central sin armadura de cortante. La carga de rotura fue de 810 kN y 785 kN, en el ensayo y modelo numérico, respectivamente (fig. 11). La figura 12 muestra la distribución de las fisuras y la deformación principal de tracción durante la fase inicial de carga, cuando la respuesta es predominantemente en flexión. En fases posteriores se produce la propagación de una fisura diagonal con una inclinación de aproximadamente  $40^\circ$  que nace de las fisuras verticales del cordón superior traccionado, y que finalmente causa la rotura frágil del voladizo.

El cálculo de la resistencia según el EC2 vendría dado como:

$$\begin{aligned}
 V_{rd,c} &= \frac{0,18}{\gamma_c} k (100 \rho_l f_{ck})^{1/3} b_w d \\
 &= 0,18 \cdot 1,39 (100 \cdot 0,0074 \cdot 30)^{1/3} 1,20 \cdot 1,31 \\
 &= 1.094 \text{ kN}
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

### 4.3 Ejemplo 3: Vigas pretensadas

El último ejemplo concierne un conjunto de vigas pretensadas que se ensayaron con el objetivo de estudiar la abertura de fisura y espaciamiento entre estas en la zona del alma, cuando la rotura se produce por cortante [19]. Se trataba de vigas en doble T de 3 m de luz, 0,5 m de canto y 0,150 m de ancho de alma, simplemente apoyadas y tratadas mediante 2 cargas concentradas separadas 0,30 m, resultando en una relación  $a/d$  de 3 (fig. 13). El pretensado estaba formado por un cordón de 26 mm de diámetro, centrado en el alma de la viga y tesado a 375 kN. Del conjunto de vigas ensayadas, se escogieron 3 para su análisis: IPRC1, IPRC2 y IPRC4 (tabla 3). La sección transversal del semivano izquierdo para las vigas IPRC1 e IPRC2 se muestra en la figura 13. La única diferencia es el espaciamiento entre estribos, el cual es de 125 mm para IPRC1 y 225 mm para IPRC2. La viga IPRC4 presentaba una mayor cuantía de armadura longitudinal inferior, con  $2\Phi 29 + 2\Phi 38$ , y con un espaciamiento entre estribos de 125 mm, siendo el resto de los parámetros idénticos. En el semivano derecho se utilizaron estribos con un diámetro mayor ( $\Phi 10$  mm), con la intención de forzar la rotura en el semivano izquierdo.

En el modelo numérico se utilizaron 174 elementos con un espesor variable en función de si correspondían al alma o al ala de la viga. La armadura pasiva se distribuyó en los distintos elementos según el armado, mientras que el pretensado se definió como elemento externo (*link element*) trabajando solo a tracción con una ley elasto-plástica, y conectado directamente a los nudos del elemento (fig. 14). Puesto que todos los elementos presentaban una cuantía mínima que permite una distribución uniforme de fisuras, se escogió directamente un valor de  $C_t = 1,000$ , independientemente del valor de energía de fractura y del tamaño característico del elemento. La resistencia a compresión en el modelo fue la misma que la obtenida de probetas cilíndricas antes del ensayo, esto es, 41,3 MPa, 49,3 MPa y 43,2 MPa para las vigas IPRC1, IPRC2 y IPRC4, respectivamente. El resto de los parámetros se resumen en la tabla 4.

Las curvas carga aplicada-desplazamiento vertical se muestran en la figura 15, de donde se observa el buen ajuste del modelo numérico tanto en fase de formación de fi-

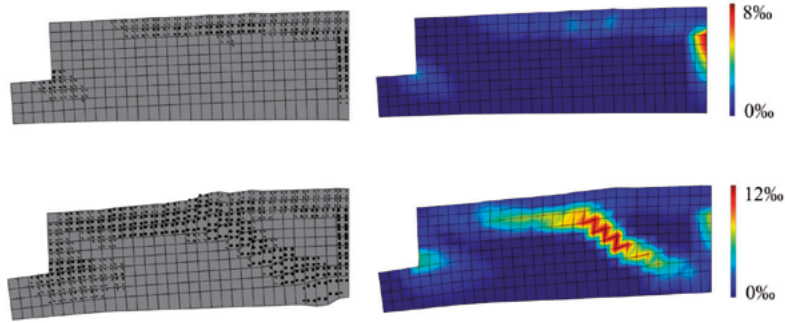


Figura 12. Distribución de fisuras y deformación principal de tracción del voladizo.

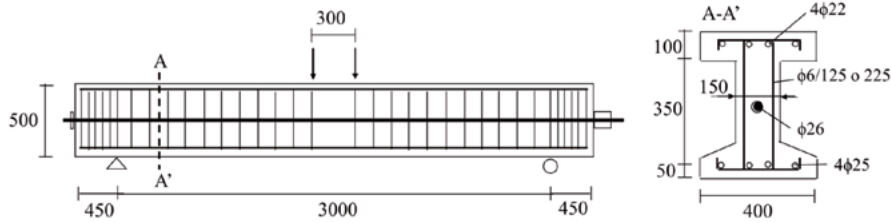


Figura 13. Vigas pretensadas: alzado y sección transversal.

TABLA 3  
Armado de las vigas del ejemplo 3

Viga	Armadura pasiva		Estribos	Pretensado
	Superior $A_s$	Inferior $A_s$		
IPRC1	4φ22 $d' = 40$ mm $f_y = 397$ MPa	4φ25 $d = 450$ mm $f_y = 720$ MPa	φ6/125 (izquierda) $f_y = 438$ MPa φ10/125 (derecha) $f_y = 376$ MPa	φ26 $f_y = 1.205$ MPa $P = 375$ kN
IPRC2	4φ22 $d' = 40$ mm $f_y = 397$ MPa	4φ25 $d = 450$ mm $f_y = 720$ MPa	φ6/225 (izquierda) $f_y = 438$ MPa φ10/225 (derecha) $f_y = 376$ MPa	φ26 $f_y = 1.205$ MPa $P = 375$ kN
IPRC3	4φ22 $d' = 40$ mm $f_y = 397$ MPa	2φ29+2φ38 $d = 450$ mm $f_y = 730$ MPa	φ6/125 (izquierda) $f_y = 438$ MPa φ10/125 (derecha) $f_y = 376$ MPa	φ26 $f_y = 1.205$ MPa $P = 375$ kN

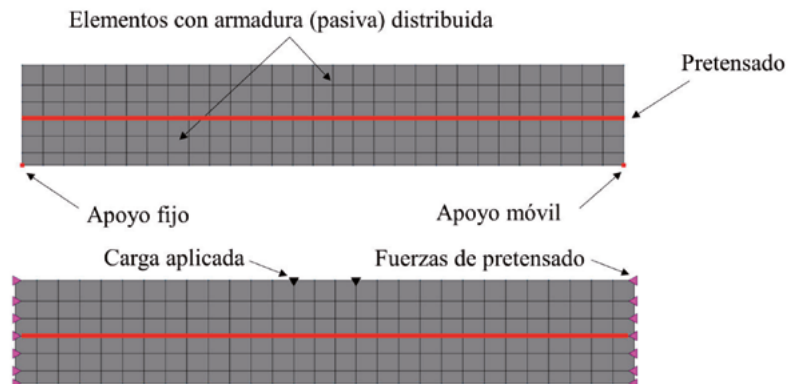


Figura 14. Modelo numérico de las vigas pretensadas.



TABLA 4

Parámetros del modelo constitutivo del ejemplo 3

Parámetro	Valor
Resistencia compresión	$f_c' = 41,3-49,3$ MPa
Deformación correspondiente a $f_c'$	$\epsilon_o = 0,0025$
Resistencia a tracción	$f_{ct} = 1,0$ MPa
Factor de reducción del módulo de cortante	$\beta = 0,15$
Tamaño máximo de árido	$a_g = 20$ mm
Coefficiente $C_i$ (ecuación 5)	$C_i = 1.000$

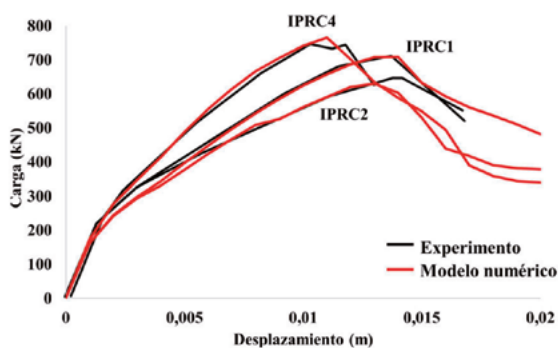


Figura 15. Curvas carga-desplazamiento para las vigas pretensadas.

suras como de la carga última. En los 3 casos se obtienen valores próximos de carga última, que varían entre 630 kN (viga IPRC2) y 760 kN (viga IPRC4). La mayor resistencia se alcanza para la viga IPRC4, con una mayor cuantía de armadura longitudinal ( $\rho_l = 3,2\%$  frente al 1,8% en IPRC1 e IPRC2), mientras que la menor resistencia se produce para la viga IPRC2, que presenta una menor cuantía de armadura transversal ( $\rho_t = 0,17\%$  frente al 0,30% en IPRC1 e IPRC4). Tanto en el ensayo como en el modelo numérico, la rotura se

produce en el semivano izquierdo por cortante, en la zona comprimida al final de la fisura diagonal. Dicho modo de fallo se repite para las 3 vigas. En la figura 16 se muestran la distribución de fisuras y la deformación principal de tracción de la viga IPRC1 para un desplazamiento vertical de 10 mm y de 18 mm.

En la figura 17 se compara la máxima abertura de fisura para distintos niveles de cortante. Dicha abertura se produjo siempre en fisuras diagonales a lo largo del alma de las vigas. Su cálculo numérico consistió en multiplicar el máximo valor de deformación principal de tracción por el espaciamiento medio entre fisuras, el cual se tomó directamente de los valores experimentales. En concreto, dichos valores fueron 150 mm, 108 mm y 138 mm para las vigas IPRC1, IPRC2 e IPRC4, respectivamente. En general, los valores numéricos muestran un buen ajuste con los experimentales, aunque no tan preciso como en el caso de la respuesta global carga-desplazamiento.

El cálculo de la resistencia según el EC2 para la viga IPRC1 vendría dado como:

$$V_{Rd,s} = \frac{A_{sw}}{s} z f_{ywd} \cot g \theta$$

$$= 4,52 \cdot 10^{-4} \cdot 0,405 \cdot 438 \cdot 2,5 = 200,4 \text{ kN} \quad (17)$$

donde para el ángulo de la cotangente se supuso 2,5, verificando, además, que no se producía el agotamiento de las bielas comprimidas. De forma análoga, para las vigas IPRC2 e IPRC4  $V_{Rd,s}$  sería 194,8 kN y 289,4 kN, respectivamente. Los valores de carga última serían 2 veces el cortante, es decir, 400,8 kN, 389,6 kN y 578,8 kN, muy por debajo de los valores experimentales. Nótese que el EC2, al basarse en un modelo plástico, desprecia la contribución del hormigón en el caso de presencia de armadura transversal. En el caso de considerar esta última, tal como se haría con la EHE o Código Modelo, los valores de la carga última vendrían a ser 582,4 kN, 498,6 kN y 705 kN, los cuales estarían más próximos a los experimentales.

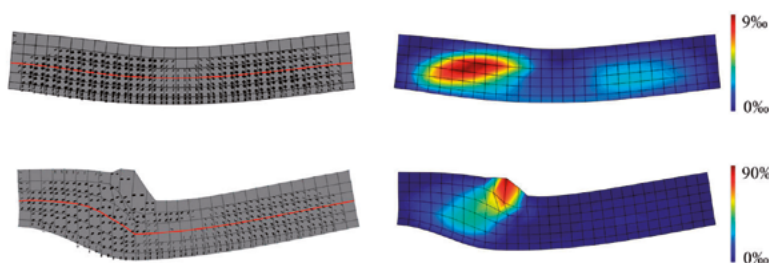


Figura 16. Distribución de fisuras y deformación principal de tracción en las vigas pretensadas.

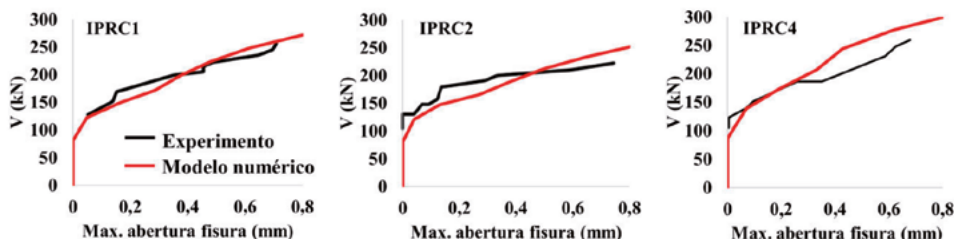


Figura 17. Curvas esfuerzo cortante-máxima abertura de fisura para las vigas pretensadas.

## 5.

### CONCLUSIONES

El modelo constitutivo del hormigón fisurado presentado, basado en la teoría del campo de compresiones e incluyendo conceptos de la mecánica de fractura, se ha validado mediante 3 ejemplos de rotura por cortante en vigas de HA y HP. Los primeros 2 ejemplos carecían totalmente de armadura transversal, por lo que todo el esfuerzo cortante se transfería a través de mecanismos resistentes relacionados con el hormigón, esto es, cabeza comprimida, engranamiento de áridos, efecto pasador y tensiones residuales de tracción en fisuras diagonales. A pesar de la complejidad del fenómeno, los resultados del modelo numérico mostraron un buen ajuste tanto en la fase de formación de fisuras, como en el valor de la carga última y el modo de fallo. En el último ejemplo se comparó, además, la respuesta a nivel local en términos de abertura máxima de fisura para distintos niveles de carga, mostrando resultados aceptables para el rango de la práctica ingenieril. En los casos sin armadura transversal, los valores de la carga última obtenidos con la normativa (EC2) quedaban muy alejados de la realidad, en algunos casos sobreestimando significativamente la carga de rotura.

### Bibliografía

- [1] F. Vecchio, M. Collins, The modified compression field theory for RC elements subjected to shear, *ACI. Struct. J.* (1986) 219–231, Title n.º 82-S22.
- [2] S. Foster, P. Marti, Cracked membrane model: Finite element implementation, *J. Struct. Eng., ASCE* 129 (9) (2003) 1155–1163.
- [3] M.F. Ruiz, A. Muttoni, Applications of critical shear crack theory to punching of reinforced concrete slabs with transverse reinforcement, *ACI. Struct. J.* 106 (4) (2009) 485–494.
- [4] J.N. Gregori, P.M. Sosa, M.A.F. Prada, J.R. Martí-Vargas, A theoretical model for including the effect of monotonic shear loading in the analysis of reinforced concrete beams, *Eng. Struct.* 52 (2013) 257–272.
- [5] American Concrete Institute (ACI). Building code requirements for structural concrete and commentary ACI 318-11 (2011), Farmington Hills, MI.
- [6] Comité Europeo de Normalización. Eurocode 2. Design of concrete structures-Part 1: General rules and rules for buildings. EN 1992-1. Comité Europeo de Normalización, Bruselas, 2004.
- [7] Canadian Standards Association (CSA). Canadian highway bridge design code. CAN/CSA S6-06, Mississauga, Ontario, 2006.
- [8] Federation International Du Beton (FIB). Model code for concrete structures 2010 (MC2010). Ernst & Sohn, Lausanne, 2013.
- [9] Association of State Highway Transportation Officials. AASHTO LRFD. Bridge design specifications and commentary, 6 th ed., Washington DC, 2012.
- [10] E.J. Vecchio, P. Wong. VecTor2 and FormWorks manual, VecTor Analysis Group, Dept. of Civil Engineering, University of Toronto, Ontario, Canada, 2003.
- [11] J. Cervenka, L. Jendele, V. Cervenka. ATENA Program documentation. 2015, Cervenka Consulting [consultado 20 Nov 2017]. Disponible en: [www.cervenka.cz](http://www.cervenka.cz).
- [12] IDEEA3D: Inelastic Dynamic Analysis for Earthquake Engineering Applications, 2016 [consultado 20 Nov 2017]. Disponible en: <https://sites.google.com/site/ideeanalysis/>.
- [13] A. Kagermanov, P. Ceresa, Physically-based cyclic tensile model for RC membrane elements, *J. Struct. Eng., ASCE* 142 (12) (2016).
- [14] A. Kagermanov, P. Ceresa. Fiber-section model with an exact shear strain distribution for RC frame elements. *J. Struct. Eng., ASCE*, 143, N.º 10 (2017).
- [15] A. Kagermanov. RC fiber-based frame elements with shear-normal stress interaction, PhD Thesis, Institute for Advanced Studies (IUSS), Pavia, Italy, 2016.
- [16] D. Mitchell, J. Marchand, P. Croteau, D. Cook, Concorde overpass collapse: Structural aspects, *J. Perform. Constr. Fac. (ASCE)* 25 (6) (2011) 545–553.
- [17] Canadian Standards Association (CSA). Design of highway bridges. CSA S6-1966, Ottawa, Ontario, 1966.
- [18] American Concrete Institute (ACI). Building code requirements for reinforced concrete. ACI, Detroit, 1963, pp. 318-363.
- [19] S. De Silva, H. Mutsuyoshi, E. Witchukreangrai, Evaluation of shear crack width in I-shaped prestressed reinforced concrete beams, *J. Adv. Concr. Tech.* 6 (3) (2008) 443–458.